DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-127-132

УДК 517.958

АППРОКСИМАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ НАГРУЖЕННЫМ УРАВНЕНИЕМ СМЕШАННОГО ТИПА

Л. И. Сербина

Ставропольский государственный педагогический институт, 355029, Ставропольский край, Ставрополь, ул. Ленина, д. 417а, Россия
E-mail: SerbinaL@mail.ru

В рамках развития методов поиска эффективных приближенных аналитических методов решения обобщенного нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка параболического типа, лежащего в основе решения задач долгосрочного прогноза режима грунтовых вод, предложен и реализован метод его редукции к линейным дифференциальным уравнениям смешанного типа с сопутствующими краевыми интегральными условиями.

Ключевые слова: нелинейное параболическое уравнение, локальные и нелокальные краевые условия, аппроксимация, интегральное условие, нагруженные уравнения, уравнения смешанного типа.

MSC 35M10

APPROXIMATION OF A NONLINEAR PARABOLIC FILTERING EQUATION WITH A LOADED MIXED-TYPE EQUATION

L. I. Serbina

Stavropol State Pedagogical Institute, 355029, Stavropol Territory, Stavropol, ul. Lenina, 417a, Russia
E-mail: SerbinaL@mail.ru

In the framework of the development of search methods for effective approximate analytical methods for solving a generalized nonlinear partial differential equation of second order of parabolic type, which is the basis for solving long-term forecast problems of groundwater regime, a method of its reduction to linear differential equations of mixed type with associated boundary integral conditions.

Key words: nonlinear parabolic equation, local and nonlocal boundary conditions, approximation, integral condition, loaded equations, equations of mixed type.

Введение

Одно из важнейших направлений развития теории краевых задач, существенно расширяющих возможности методов моделирования нелинейных динамических процессов и систем различной природы, связано с постановкой и поиском методов разрешимости качественно новых неклассических задач. Одним из таких классов задач, не имеющих аналогов в математической физике, являются нелокальные краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений. основных и смешанного типа.

Особое место среди этих качественно новых неклассических задач занимают нелокальные начально-краевые задачи для уравнений с интегральными краевыми условиями. Краевые условия подобного типа являются существенным обобщением локальных и нелокальных краевых условий, заданных в виде линейной комбинации значений искомой функции и (или) ее производных в различных точках границы. и позволяют описывать поведение искомого решения во внутренних точках области в виде некоторого среднего. Интегральные условия естественным образом возникают в ряде задач математического моделирования нелинейных эволюционных процессов и систем, когда располагают незначительным объемом информации о количественных характеристиках изменения их свойств.

Однако, следует отметить, что корректная постановка и решение краевых задач с интегральными условиям, с исчерпывающей полнотой раскрывающих многие внутренние механизмы динамических процессов массопереноса, протекающих в рамках трудно формализуемых природных системах, сопряжено с довольно серьезными математическими сложностями, не позволяющих применять непосредственно известную теорию краевых задач.

Решение многих весьма важных задач оптимального управления и долгосрочного прогноза режима подземных вод [1], ставит проблему выхода за рамки традиционных математических моделей, в основе которых лежат локальные дифференциальные уравнения в частных производных и соответствующие им локальные начально-краевые задачи. В качестве одного из возможных подходов решения данной проблемы, предлагается новый метод аппроксимации существенно нелинейного параболического уравнения, лежащего в основе многих весьма важных моделей практических задач режима грунтовых вод, уравнениями смешанного типа с соответствующими им нелокальными интегральными условиями.

Сущность метода аппроксимация нелинейного параболического уравнения

Рассмотрим неустановившееся одномерное движение грунтовых вод со слабо изменяющейся свободной поверхностью и водоупором $z = h_0(\xi)$, которое при некоторых допущениях, главным из которых является предположение о достаточной протяженности водоносных горизонтов и справедливости полуэмпирического закона Дарси [1], описывается следующим существенно нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка параболического типа

$$\frac{\partial \sigma h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[k(h-h_0)\frac{\partial h}{\partial \xi}\right] - \frac{k_0}{M_0}(h-H) + w, \tag{1}$$

где $h = h(\xi, t)$ – уровень грунтовых вод в точке $\xi \geq 0$ в момент времени t, σ – водоотдача, k – коэффициент фильтрации, H – напор в нижележащем водоносном пласте, k_0 – коэффициент фильтрации слабопроницаемого водоупора мощности M_0, $w = w(\xi,\ t)$ – разность между инфильтрацией и испарением.
Здесь предполагается, что скорость w_0 просачивания через водоупор задается формулой

$$w_0 = \left(\frac{k_0}{M_0}\right)(H - h). \tag{2}$$

Модельное уравнение (1) фильтрации, в случае горизонтального водоупора, когда можно считать $h_0 = 0$, $M_0 = const$, и в случае, когда коэффициенты σ и k постоянны, принимает вид:

$$\sigma\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{2}\frac{\partial^2 h^2}{\partial \xi^2} + w - w_0. \tag{3}$$

Известно, что непосредственное решение нелинейного уравнения (1) сопряжено с большими математическими трудностями. Одним из самых результативных и наиболее часто применяемых на практике методом является метод его аппроксимации линейными уравнениями. Существующие методы аппроксимации сводят исследование числовых характеристик и качественных свойств нелинейного уравнения (1) к изучению их более изученными линейными дифференциальными уравнениями. Главным недостатком линейных моделей является тот факт, что их можно использовать только в тех случаях, когда исследуемые величины изменяются не в очень широком диапазоне значений.

Рассмотрим, в рамках развития основных положений поиска приближенных аналитических решений нелинейных уравнений, следующий более эффективных способ аппроксимации уравнения (1), уравнениями смешанного типа с соответствующими интегральными условиями.

Решение $h = h(\xi, t)$, уравнения (3) назовем регулярным, если оно дважды непрерывно дифференцируемо t по и ξ , имеет непрерывную смешанную производную $\frac{\partial^3 \mathrm{p}}{\partial \xi^2 \partial t}$ в любой точке ξ и для любого времени t. Любое решение уравнения (3) будет решением следующего уравнения:

$$\sigma\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = k\frac{\partial^2 h h_t}{\partial \xi^2} + \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w_0}{\partial t}. \tag{4}$$

Предположим, что изменение уровня грунтовых вод $h_t = \frac{\partial h}{\partial t}$ в почвенном слое в среднем прямо пропорционально расходу

$$\sigma\frac{\partial h}{\partial t}\int_0^l h(\xi, t)\, d\xi$$

грунтовой воды на прогнозируемом участке $0 < \xi < 1$ с постоянным коэффициентом пропорциональности γ, т.е. что

$$\frac{\partial h}{\partial t} \approx \gamma\sigma\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l h(\xi, t)\, d\xi. \tag{5}$$

Гипотеза (5) позволяет нелинейное уравнение (4) приближенно аппроксимировать нагруженным уравнением

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = k\gamma\delta'(t)\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w_0}{\partial t}\right), \tag{6}$$

где

$$\delta(t) = \frac{1}{l}\int_0^l h(\xi,t)\,d\xi.,$$

среднее значение уровня грунтовой воды $h(\xi,t)$ в слое $0 < \xi < 1$ в момент времени t.

Во многих задачах, связанных с долгосрочным прогнозированием режима потока грунтовых вод, для которого характерно нерегулярное хаотическое (фрактальное) изменение динамических переменных в пространстве и во времени можно считать, что

$$k\gamma\delta'(t) \approx c|t_* - t|^m sign(t_* - t), \tag{7}$$

где $m = const \geq 0$, $c = const > 0$, t_* – экстремальное время, когда расход грунтовой воды в слое $0 < \xi < 1$ достигает максимального значения, а затем падает до некоторого среднего значения.

В случает, когда напор H в нижележащем водоносном пласте не зависит от времени, то

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \text{ и } \frac{\partial w}{\partial t} = -\left(\frac{k_0}{M_0}\right)\frac{\partial h}{\partial t}.$$

Тогда, этому варианту, в силу (6) и (7), соответствует уравнение вида

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c|t_* - t|^m sign(t_* - t)\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} - \frac{k_0}{M_0}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}. \tag{8}$$

Уравнение (8) на евклидовой плоскости точек $(\xi,\ t)$ относится к классу уравнений смешанного типа: оно эллиптично при $t > t_*$, гиперболично при $t < t_*$ и параболическое на критической линии $t = t_*$.

В уравнении (8) перейдем к новым зависимым и независимым переменным по формулам:

$$y = t - t_*, \quad x = \frac{\xi}{\sqrt{c}}, \quad u(x,y) = h\left(x\sqrt{c},\ y + t_*\right) \tag{9}$$

В результате получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + signy * |y|^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y), \tag{10}$$

где $b = \frac{k_0}{M_0}$, $f(x,y) = w_y(x\sqrt{c},\ y + t_*)$.

На основании (5), (7) имеем

$$k\gamma\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l h(\xi,t)\,d\xi = c|t_* - t|^m sign(t_* - t),$$

из которого, с учетом (9), получаем интегральное условие

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_0^a u(x,y)\,dx = A\ |y|^m signy. \tag{11}$$

Здесь $a = \frac{\sqrt{l}}{c}$, $A = -\frac{\sqrt{c}}{k\gamma}$.

Для линеаризованного уравнения (10), интегральное условие (11) является условием типа условия Самарского [3]. которая подлежит индентификации. Отличительной характеристикой нелокального интегрального условия (11), является то, что связывая значения искомого решения с его значениями на границе в начальный момент времени, позволяет охарактеризовать процесс динамики грунтовых вод, зная его некоторые осредненные характеристики в слое почвы в начальный момент времен, учитывая влияние нелинейных механизмов.

Модельное уравнение (10) и нелокальное условие (11), при помощи введения новой независимой переменной

$$v = uexp\left(\frac{by}{2}\right) \tag{12}$$

приведем к виду

$$signy * |y|^m v_{xx} + v_{yy} - \left(\frac{b^2}{4}\right) v = f(x,y) \exp\left(\frac{by}{2}\right), \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} e^{\frac{-by}{2}} \int_0^a v(x,y)\, dx = A\ |y|^m signy. \tag{14}$$

Если горизонтальный водоупор$h_0 = 0$ непроницаем $k_0 = 0$ или имеет большую мощность $\frac{k_0}{M_0} \ll 1$, то в (12) – (14) можно положить b=0. Тогда уравнение (14), при отсутствии внешнего воздействия на поток т.е. при $f(x,y) = 0$, принимает вид

$$signy * |y|^m v_{xx} + v_{yy} = 0, \quad 0 < x < a. \tag{15}$$

Следует отметить, что модельное уравнение (15) при $m = 0$ совпадает уравнением Лавретьева –Бицадзе

$$signy * v_{xx} + v_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \tag{16}$$

а при $m = 1$ с уравнением Трикоми

$$y * v_{xx} + v_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \tag{17}$$

которые являются уравнениями хорошо известными в теории уравнений смешанного типа.

Заключение

Итак, гипотеза (5) позволяет нелинейное уравнение (1) аппроксимировать одним из уравнений смешанного типа (13). (15), (16), Очевидно, что такая замена, будет весьма эффективной , когда априори будет известно, что искомое решение с допустимой погрешностью удовлетворяет нелокальному условию (14).

Уравнения смешанного типа (13), (15), (16), нагруженные нелокальным интегральным условием (14), существенно расширяя возможности качественного понимании и методов количественной характеристики нелинейных особенностей их протекания в сложных природных средах, вполне могут стать основой решения для большинства задач оптимального управления и долгосрочного прогнозирования режимом грунтовых вод в сложных природных средах.

Список литературы

[1] Полубаринова-Кочина П.Я., Пряжинская В.Г., Эмих В.Н., *Математические методы в вопросах орошения*, М, 1969. [Polubarinova-Kochina P.YA., Pryazhinskaya V.G., EHmih V.N., *Matematicheskie metody v voprosah orosheniya*, M, 1969].

[2] Нахушев А. М., *Нагруженные уравнения и их применение*, Наука, М., 2012, 231 с. [Nahushev A. M., *Nagruzhennye uravneniya i ih primenenie*, Nauka, M., 2012, 231 pp.]

[3] Сербина Л. И., *Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах*, Наука, М., 2007, 167 с. [Serbina L. I., *Nelokal'nye matematicheskie modeli perenosa v vodonosnyh sistemah*, Nauka, M., 2007, 167 pp.]

Для цитирования: Сербина Л. И. Аппроксимация нелинейного параболического уравнения фильтрации нагруженным уравнением смешанного типа // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 4(24). C. 127-132. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-127-132

For citation: Serbina L. I. Approximation of a nonlinear parabolic filtering equation with a loaded mixed-type equation, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018, **24**: 4, 127-132. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-127-132

Поступила в редакцию / Original article submitted: 18.09.2018