

УДК 519.85; 519.17

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ МАГИСТРАЛЬНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ, ВСТРАИВАЕМЫХ В СЕТЬ ГОРОДСКОГО ВОДОСНАБЖЕНИЯ

В. Ч. Кудаев, А. К. Буздов

ФГБУН Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центр РАН, 360000,
Нальчик, ул. И. Арманд, 37-а
E-mail: iipru@rambler.ru

Представлены методы моделирования и оптимизации протяженных трубопроводов, встраиваемых в сеть городского водоснабжения, опирающиеся на инженерную практику.

Ключевые слова: опротяженный трубопровод, моделирование, основные параметры, рациональное проектирование, оптимизация.

© Кудаев В. Ч., Буздов А. К., 2018

MSC 65K05, 94C15

THE MAIN PIPELINES IN THE URBAN WATER SUPPLY NETWORK: MATHEMATICAL MODELING AND COMPUTER DESIGN

V. Ch. Kudaev, A. K. Buzdov

Institute for Computer Science and Problems of Regional Management – the filial branch of Federal State Budgetary Scientific Establishment “Federal Scientific Center “Kabardin-Balkar Scientific Center of Russian Academy of Sciences”

E-mail: iipru@rambler.ru

The methods of modeling and optimization of long pipelines built into the urban water supply network, based on engineering practice, are presented.

Key words: extended pipeline, modeling, basic parameters, rational design, optimization

© Kudaev V. Ch., Buzdov A. K., 2018

Введение

В настоящее время возникает необходимость встраивания в существующую сеть водоснабжения городов магистральных (протяженных) трубопроводов (МТ). Проектировщики и конструкторы при проектировании трубопроводов ориентируются на рациональное проектирование, которое учитывает многолетнюю инженерную практику строительства и эксплуатации трубопроводов. В данной статье представлены математические модели и методы оптимального решения задачи проектирования, основанные на таком подходе.

Постановка задачи

Затраты на строительство и эксплуатацию МТ не соответствуют, как правило, запланированным, на основе которых и выбираются параметры трубопровода. Вследствие этого следует исходить из многолетней практики строительства и эксплуатации трубопроводов [1, с.34-35, 47-48, 54-55]. Нашей целью является соединение этого подхода с оптимизацией при учете заданных объективных данных. Такими данными являются напор и высотная отметка начала и конца трубопровода, длины участков МТ, величины потоков по участкам МТ.

Удельная стоимость i -го участка МТ может быть выражена эмпирической формулой [1, 2]

$$c_i = a + bd_i^\alpha, \quad (1)$$

где a, b, α – числовые коэффициенты; $a > 0, b > 0, 1 < \alpha \leq 2$, d_i – диаметр труб на i -м участке трубопровода. Однако формула (1) неудобна для использования методов оптимизации, так как в постановках задач оптимального проектирования сетей ограничения представляют собой уравнения неразрывности и потенциальности потока (аналоги уравнений Кирхгофа для электрических сетей). Поэтому, пользуясь известными формулами гидравлики [1] типа Дарси-Вейсбаха для удельных потерь напора h_i при движении потока q_i по трубе диаметром d_i

$$h_i = \frac{kq_i^\beta}{d_i^\gamma}, \beta > 1, \gamma > 4, \quad (2)$$

получим:

$$c_i = a + b \left(\frac{q_i^\beta}{h_i} \right)^{\frac{\alpha}{\gamma}}$$

Тогда целевая функция задачи проектирования МТ примет вид:

$$Z = \sum_{i=1}^n \left[a + bk^{\frac{\alpha}{\gamma}} q_i^{\frac{\beta\alpha}{\gamma}} h_i^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \right] l_i \rightarrow \min, \quad (3)$$

где $l_i, q_i, h_i, i = \overline{1, n}$ – заданные длины участков МТ, заданные величины потоков по участкам МТ, искомые удельные потери напора по участкам МТ.

В постановку задачи включим замыкающее соотношение, связывающее важнейшие индивидуальные характеристики проектируемого МТ по которым определяются энергетические затраты на транспорт воды по МТ:

$$\sum_{i=1}^n h_i l_i = H_0 + z_0 - H_n - z_n, \quad (4)$$

где $H_0, z_0; H_n, z_n$ - соответственно заданные напор воды и высотная отметка в начале и в конце МТ.

Поскольку в (4) $\sum_{i=1}^n a l_i - \text{const}$, $b k^{\frac{\alpha}{\gamma}}$ - числовой коэффициент, то задача (3)-(4) эквивалентна задаче:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n q_i^{\frac{\beta\alpha}{\gamma}} h_i^{-\frac{\alpha}{\gamma}} l_i \rightarrow \min & (5) \\ \sum_{i=1}^n h_i l_i = P_{0n}, \quad \text{где } P_{0n} = H_0 + z_0 - H_n - z_n & (6) \end{cases}$$

В задаче (5), (6) следует определить h_i , $i = \overline{1, n}$.

Решение задачи

Поскольку $-\frac{\alpha}{\gamma} < 0$, то задача (5)-(6) есть задача минимизации строго выпуклой функции при линейном ограничении в форме равенства. Вследствие этого задача имеет единственное решение, которое определим методом Лагранжа. Функция Лагранжа задачи имеет вид:

$$L(h, \lambda) = \sum_{i=1}^n q_i^{\frac{\beta\alpha}{\gamma}} h_i^{-\frac{\alpha}{\gamma}} l_i + \lambda \left[P_{0n} - \sum_{i=1}^n h_i l_i \right]$$

Выпишем условия экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial h_i} = -\frac{\alpha}{\gamma} q_i^{\frac{\beta\alpha}{\gamma}} h_i^{-\frac{\alpha+\gamma}{\gamma}} l_i - \lambda l_i = 0, & i = \overline{1, n} & (7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = P_{0n} - \sum_{i=1}^n h_i l_i = 0 & (8) \end{cases}$$

Из (7), (8) получим:

$$h_r = \frac{P_{0n} q_r^{\frac{\beta\alpha}{\alpha+\gamma}}}{\sum_{i=1}^n q_i^{\frac{\beta\alpha}{\alpha+\gamma}} l_i}, \quad r = \overline{1, n} \quad (9)$$

Вернувшись к исходным переменным d_i , $i = \overline{1, n}$, в соответствии с формулой (2), получим:

$$d_r = \frac{k^{\frac{1}{\gamma}} q_r^{\frac{\beta}{\alpha+\gamma}}}{P_{0n}^{\frac{1}{\gamma}}} \left(\sum_{i=1}^n q_i^{\frac{\beta\alpha}{\alpha+\gamma}} l_i \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad r = \overline{1, n} \quad (10)$$

Коэффициенты α , β , γ , k в формулах (9-10) известны для каждого вида труб [1]. Ниже представлена соответствующая табл. 1.

Таблица 1.

Материал труб	Коэффициенты			
	α	β	γ	k
Сталь	1.4	2	5.3	0.001735
Чугун	1.6	2	5.3	0.001735
Асбестоцемент	1.95	1.85	4.89	0.001180
Пластмасса	1.95	1.774	4.774	0.001052

С учетом значений этих коэффициентов получим для трубопроводов из стальных, чугунных, асбестоцементных и пластмассовых труб:

$$\begin{aligned}
 h_{r \text{ сталь}} &= \frac{P_{0n} q_r^{0,418}}{\sum_{i=1}^n q_i^{0,418} l_i}; \quad h_{r \text{ чугун}} = \frac{P_{0n} q_r^{0,464}}{\sum_{i=1}^n q_i^{0,464} l_i}; \quad h_{r \text{ ац}} = \frac{P_{0n} q_r^{0,528}}{\sum_{i=1}^n q_i^{0,528} l_i}; \\
 h_{r \text{ пласт}} &= \frac{P_{0n} q_r^{0,515}}{\sum_{i=1}^n q_i^{0,515} l_i}. \\
 d_{r \text{ сталь}} &= \frac{0,001735^{0,189}}{P_{0n}^{0,189}} q_r^{0,299} \left(\sum_{i=1}^n q_i^{0,418} l_i \right)^{0,189}; \\
 d_{r \text{ чугун}} &= \frac{0,001735^{0,189}}{P_{0n}^{0,189}} q_r^{0,290} \left(\sum_{i=1}^n q_i^{0,464} l_i \right)^{0,189}; \\
 d_{r \text{ ац}} &= \frac{0,00118^{0,205}}{P_{0n}^{0,205}} q_r^{0,271} \left(\sum_{i=1}^n q_i^{0,528} l_i \right)^{0,205}; \\
 d_{r \text{ пласт}} &= \frac{0,001052^{0,210}}{P_{0n}^{0,210}} q_r^{0,261} \left(\sum_{i=1}^n q_i^{0,515} l_i \right)^{0,210}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Переход на реальный сортамент труб

Ниже представлена схема алгоритма.

1) Ставим в соответствие каждому d_i , $i = \overline{1, n}$ ближайший меньший и ближайший больший из заданного сортамента труб $\{D_j\}$, $j = \overline{1, m}$, т.е. такие D_p , D_{p+1} , что

$$D_p \leq d_i \leq D_{p+1}.$$

Обозначим эти диаметры D_i^- , D_i^+ .

2) Формируем участок i из этих труб так, чтобы потеря напора по участку i осталась прежней, т. е.

$$\frac{k q_i^\beta}{D_i^{+\gamma}} x_i + \frac{k q_i^\beta}{D_i^{-\gamma}} (l_i - x_i) = h_i l_i,$$

где h_i - удельная потеря на «идеальном» сортаменте труб (см. (11)).

3) Рассчитываем стоимость труб на участках

$$C_i = C_i^+ x_i + C_i^- (l_i - x_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

$C = \sum_{i=1}^n C_i$ - общая стоимость МТ.

Обеспечение телескопичности МТ

Следует учесть требование обеспечения телескопичности МТ: диаметры труб по трубопроводу от его начала к концу не должны ни на одном последующем участке быть большими чем наименьший диаметр труб на предыдущем участке.

В настоящее время условия телескопичности в постановках оптимизационных задач по проектированию сетей водоснабжения не учитывают т.к. оно является нелинейным и осложняет задачу. Поэтому телескопичность учитывают «вручную» - после получения решения задачи, полученное решение корректируют. В представленной ниже части алгоритма проектирования МТ дано решение проблемы телескопичности.

Поскольку каждый участок формируется из двух смежных диаметров труб из заданного сортамента, проблема телескопичности решается следующим образом.

УТВЕРЖДЕНИЕ. На двух любых смежных участках МТ либо выполнено условие телескопичности, т.е. $D_i^- \geq D_{i+1}^+$, либо $D_i^+ = D_{i+1}^+$, $D_i^- = D_{i+1}^-$.

Действительно, двойное неравенство $\frac{kq_i^\beta}{d_j^\gamma} \geq \bar{h} \geq \frac{kq_i^\beta}{d_{j+1}^\gamma}$, $i = \overline{1, n}$, выделяет для каждого i -го участка МТ единственную пару смежных диаметров из сортамента труб. Пусть это диаметры d_j и d_{j+1} . Тогда поскольку $q_i > q_{i+1}$, для $(i+1)$ -ого участка будет выделена либо та же пара диаметров d_j, d_{j+1} , либо пара меньших диаметров d_k, d_{k+1} , $k < j$ и тогда условие телескопичности будет выполнено.

СЛЕДСТВИЕ. Из условия телескопичности следует: если на участках r, \dots, s нарушено условие телескопичности на любой паре смежных участков, то на всех этих участках будет выделена одна и та же пара смежных диаметров из сортамента труб, т.е.

$$D_k^+ = D_r^+, D_k^- = D_r^-, k = \overline{r+1, s}.$$

Ниже представлен алгоритм решения задачи обеспечения телескопичности МТ.

1) Выделяются участки r, \dots, s с начала МТ для которых выделена одна и та же пара диаметров из сортамента труб, т.е.

$$D_i^+ = D_r^+, D_i^- = D_r^-, i = \overline{r, s}.$$

2) Рассчитывается общая длина $l_{r,s}^+$ трубопровода по выделенным участкам, на которых укладываются трубы диаметром D_r^+ :

$$l_{r,s}^+ = \sum_{i=r}^s l_i^+,$$

где l_i^+ – длина той части i -го участка МТ, на которой был зафиксирован диаметр $D_i^+ = D_r^+$.

3) Определяем номер p участка, границы которого включают величину $l_{r,s}^+$, т.е. такое $r \leq p \leq s$, что $\sum_{i=r}^{p-1} l_i \leq l_{r,s}^+ \leq \sum_{i=r}^p l_i$.

4) Делается попытка соблюсти телескопичность за счет перехода с большего диаметра D_r^+ на меньший диаметр D_r^- на p -м участке. Для этого решаем линейное уравнение

$$\sum_{i=r}^{p-1} l_i h_i^+ + x_p h_p^+ + (l_p - x_p) h_p^- + \sum_{i=p+1}^s l_i h_i^- = \sum_{i=p}^s h_i l_i$$

где x_p – искомая часть p -го участка, укладываемая трубами диаметра D_r^+ ; h_i^+, h_i^- – удельные потери напора на D_i^+, D_i^- ; h_i – удельная потеря напора на «идеальном»

наборе труб. Получим:

$$x_p = \frac{\sum_{i=p}^s h_i l_i - \sum_{i=1}^{p-1} l_i h_i^+ - l_p h_p^- - \sum_{i=p+1}^s l_i h_i^-}{h_p^+ - h_p^-}.$$

5) В том случае когда

$$0 \leq x_p \leq l_p,$$

выбранное значение x_p верно. В противном случае следует перенести точку перехода с труб большего диаметра на трубы меньшего диаметра на $(p-1)$ -й участок.

Вычислительный эксперимент

На основе алгоритма разработана программа проектирования МТ (выбора диаметров труб, расчета гидравлических параметров и стоимости МТ).

Ниже для сравнения представлены укрупненная проектно-сметная документация по МТ Северного жилого района г. Армавир (Табл. 3) и результаты проектирования этого же МТ программой (Табл. 4).

В проектном решении (Табл. 3, рис. 1) использовались пластиковые водопроводные трубы (Табл. 2). Кроме того, в соответствии со СНИП, удельные потери напора завышались в 1.15 раз. Естественно, при компьютерном решении, проектирование осуществлялось при этих же условиях.

Таблица 2.

Пластиковые водопроводные трубы										
Диаметры (мм)	400	450	500	560	630	710	800	900	1000	1200
Цена за п/м с НДС (руб.)	2790.00	3525.00	4350.00	5445.00	6900.00	8775.00	11115.00	14070.00	17400.00	25050.00

Таблица 3. (начало)

Исходные данные	Участок	Высотная отметка начала (м)	Высотная отметка конца (м)	Длина участка (м)	Расход воды по участку (м ³)	Напор воды в начале и в конце МТ (м)	Результаты расчета МТ			
							Напор воды в начале участка (м)	Напор воды в конце участка (м)	Диаметры труб на подучастках (м)	
									Диам.1	Диам.2
	0-1	207.22	207.22	15.5	0.3575	25.00	25.00	24.92	0.80	
	1-2	207.22	205.20	354.0	0.3539		24.92	25.20	0.80	
	2-3	205.20	201.34	514.9	0.3504		25.20	26.52	0.80	
	3-4	201.34	202.18	420.5	0.3433		26.52	23.61	0.80	0.50
	4-5	202.18	160.70	5090.5	0.2648	40.07	23.61	40.07	0.50	0.40

Таблица 3. (продолжение)

Участок	Длины подучастков (м)		Скорость воды на подучастках (м/с)		Потеря напора на подучастках (м)		Стоимости труб подучастков (руб.)		
	первого	второго	на первом	на втором	на первом	на втором	первого	второго	Общая
0-1	15.5	-	0.711	-	0.0101	-	172282.5		172282.5
1-2	354.0	-	0.704	-	0.2276	-	3934710.0		3934710.0
2-3	514.9	-	0.697	-	0.3254	-	5722891.2		5722891.2
3-4	348.7	71.8	0.682	1.748	0.2125	0.4511	3875800.5	312330.0	4188130.5
4-5	3873.9	1216.6	1.348	2.107	15.3538	14.8639	16851682.5	3394230.0	20245912.8
Сумма потерь напора по МТ: 31.4							Итого общая стоимость труб МТ: 34263927.0		

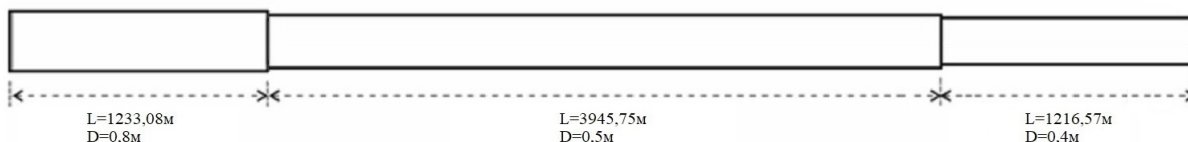


Рис. 1.

Ниже в табл. 4 и на рис. 2 представлены результаты компьютерного проектирования МТ.

Таблица 4. (начало)

Исходные данные	Участок	Высотная отметка начала (м)	Высотная отметка конца (м)	Длина участка (м)	Расход воды по участку (м ³)	Напор воды в начале и в конце МТ (м)	Результаты расчета МТ	Напор воды в начале участка (м)	Напор воды в конце участка (м)	Распределение труб по участку	
										Диам.1 (м)	Диам.2 (м)
	0-1	207.22	207.22	15.50	0.3575	25.00		25		560	-
	1-2	207.22	205.20	354.00	0.3539					560	500
	2-3	205.20	201.34	514.88	0.3504					500	-
	3-4	201.34	202.18	420.50	0.3433					500	-
	4-5	202.18	160.70	5090.52	0.2648	40.07			40.07	500	450

Таблица 4. (продолжение)

Результаты расчета МТ	Участок	Длины подучастков		Потеря напора на участках	Стоимости труб участка (руб.)		
		Длина тр.1	Длина тр.2		Тр.1	Тр.2	Общая
	0-1	15.5	-	0.08626	84397.5		84397.5
	1-2	321.49	32.51	1.95985	11750511.6	141419.66	1891931.26
	2-3	514.9	-	2.83610	2239815		2239815
	3-4	420.5	-	2.29187	1829175.0		1829175.0
	4-5	3039.03	2051.47	24.27592	13219784.99	7231428.11	20451213.1
				Сумма потерь напора по МТ:31.4	Итого общая стоимость труб МТ: 26496531.86		

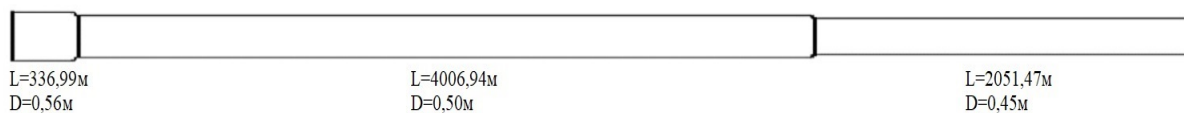


Рис. 2.

Выигрыш в затратах на создание МТ по сравнению с проектным решением составляет $34.264-26.497 = 7.767$ (млн. руб.), то есть 22.669%.

Заключение

Получены явные формулы для расчета оптимальных диаметров труб по участкам МТ. В рамках представленного метода решается задача перехода с «идеальных» диаметров труб по участкам МТ на реальный (дискретный) сортамент. Решена проблема обеспечения телескопичности МТ.

Список литературы

- [1] Абрамов Н. Н. и др., *Расчет водопроводных сетей*, Стройиздат, М., 1983, 278 с. [Abramov N. N. i dr., *Raschet vodoprovodnyh setej*, Strojizdat, М., 1983, 278 pp.]
- [2] Меренков А. П. и др., *Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефти- и газоснабжения*, ВО «Наука», Новосибирск, 1992, 406 с. [Merenkov A. P. i dr., *Matematicheskoe modelirovanie i optimizaciya sistem teplo-, vodo-, nefti- i gazosnabzheniya*, VO «Nauka», Novosibirsk, 1992, 406 pp.]

Для цитирования: Кудаев В. Ч., Буздов А. К. Математическое моделирование и компьютерное проектирование магистральных трубопроводов // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 4(24). С. 109-116. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-109-116

For citation: Kudaev V. Ch., Buzdov A. K. The main pipelines in the urban water supply network: mathematical modeling and computer design, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018, **24**: 4, 109-116. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-109-116

Поступила в редакцию / Original article submitted: 08.08.2018