

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-90-96

УДК 531.2

КРИТЕРИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ГЕОСРЕДЫ И СТЕПЕННОЙ ЗАКОН РЕЛАКСАЦИИ

Г. М. Водинчар, А. С. Пережогин

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7, Россия

E-mail: d72156@gmail.com

Представлена модель областей повышенных напряжений в геосреде с точечными источниками в виде двойных пар сил. По данным из сейсмического каталога Harvard CMT выполнены расчеты линейного и нелинейного критериев дилатансии. На примере вязко-упругой модели построены степенные законы релакции деформаций при постоянном напряжении в среде. Представлена вычислительная схема на основе нахождения дробной степени оператора системы алгебраических линейных уравнений.

Ключевые слова: упругое полупространство, степенной закон, моделирование

© Водинчар Г. М., Пережогин А. С., 2018

MSC 86-08

CRITERIA FOR THE STRESS-STRAIN STATE OF THE MEDIUM AND THE POWER LAW OF RELAXATION

G. M. Vodinchar, A. S. Perezhugin

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, 684034,
Kamchatskiy kray, Paratunka, Mirnaya str. 7, Russia

E-mail: d72156@gmail.com

A model of high stress zone in the medium with point sources in the form of double forces is presented. Linear and nonlinear dilatancy criteria is calculated on data from the seismic Harvard CMT catalog. Using the example of a visco-elastic model, power laws are constructed for the promotion of deformations under constant stress in a medium. A computational scheme is presented on the basis of finding the fractional degree of the operator of a system of algebraic linear equations.

Key words: stress-strain, power law, computations.

© Vodinchar G. M., Perezhugin A. S., 2018

Введение

В работах по моделированию зон геодеформационного влияния в геосреде [1, 2, 3, 4] рассматриваются модели формирования зон дилатансии (разуплотнения среды) и геоакустической эмиссии в результате нарастания величины полей напряжений и деформаций земной коры в соответствующих областях. Обычно используемая физико-математическая модель, которая описывает области повышенных напряжений и деформаций, известна как модель Миндлина [5]. В этой модели земная кора рассматривается в приближении упругого однородного изотропного полупространства, в которой существуют различные источники сосредоточенных сил.

Впервые критерии формирования зон дилатансии были предложены в работе [1]. В ней был выполнен анализ геометрических форм и размеров зон дилатансии для случая сосредоточенного источника «простой силы» (задаваемой вектором с фиксированной точкой приложения), рассчитываемых на основании двух различных механических критериев. В дальнейшем, на основе этих результатов, было проведено моделирование полей деформации и, с помощью критерия максимальных касательных напряжений, рассчитаны области геоакустической эмиссии, которые формируются на значительных расстояниях от сосредоточенных источников [2, 3].

В настоящей работе обсуждается вопрос о расчете зон дилатансии по двум критериям напряжений в случае источника сосредоточенных пар сил, а также случай вязко-упругой фрактальной среды. Величина пар сил выбрана на основании компонент тензора сейсмического момента для землетрясений по данным каталога СМТ (Centroid-Moment-Tensor <https://www.globalcmt.org/>) [6].

Модели областей повышенных напряжений в земной коре в случае сосредоточенных двойных сил

Будем использовать декартову систему координат, направив ось Oz вдоль радиуса к центру Земли. Для перехода к стандартным обозначениям, используем оси Ox и Oy вместо, соответственно, t -оси и p -оси используемых при составлении каталога СМТ. В качестве точки приложения пар сил выберем точку с координатами $(0, 0, c)$. Для проведения численных расчетов используем тензор сейсмического момента

$$M = \begin{bmatrix} M_{tt} & M_{tp} & M_{tr} \\ M_{tp} & M_{pp} & M_{pr} \\ M_{tr} & M_{pr} & M_{rr} \end{bmatrix} \cdot 10^{23} \text{ дин} \cdot \text{см} = \begin{bmatrix} -1.10 & -1.18 & 0.48 \\ -1.18 & -1.22 & 0.80 \\ 0.48 & 0.80 & 2.32 \end{bmatrix} \cdot 10^{16} \text{ Н} \cdot \text{м}. \quad (1)$$

Для сопоставления с величиной пар сил нормируем каждое значение тензора сейсмического момента на величину $\frac{1}{8\pi(1-\nu)}$, где ν – коэффициент Пуассона, типичное значение которого для региона составляет 0.25 [7]. Соответствие между моментами пар сил в используемой нами системе координат и системе координат в каталоге СМТ имеет следующий вид: $M_{zz} = M_{rr}$, $M_{xx} = M_{tt}$, $M_{yy} = M_{pp}$, $M_{zx} = M_{rt}$, $M_{xz} = M_{rt}$, $M_{zy} = -M_{rp}$, $M_{yz} = -M_{rp}$, $M_{xy} = -M_{tp}$, $M_{yx} = -M_{tp}$.

Используем нелинейный критерий образования зоны дилатансии D_τ :

$$D_\tau = \tau - \alpha(P + \rho g z)_Y \geq 0, \quad (2)$$

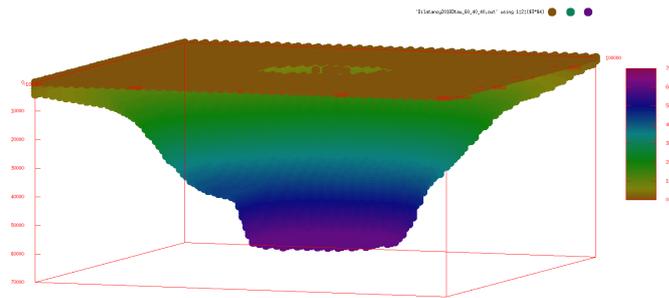


Рис. 1. Область дилатансии D_τ для выбранного тензора сейсмического момента.

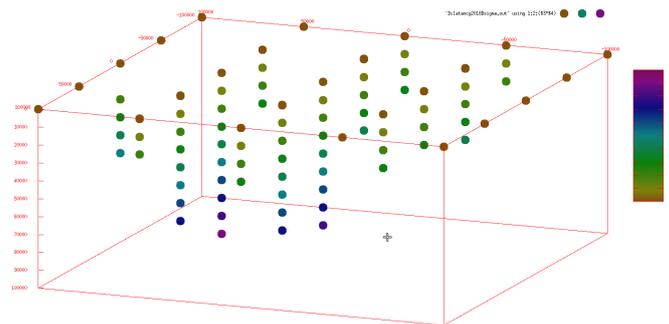


Рис. 2. Область дилатансии D_σ для выбранного тензора сейсмического момента.

где τ и P вычисляются по компонентам тензора напряжений:

$$\tau = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)},$$

$$P = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}),$$

α – коэффициент внутреннего трения, ρ – плотность горной породы, z – глубина расчетной точки.

Для численного моделирования были выбраны следующие параметры модели упругой среды: $Y = 3 \cdot 10^6$ Па, $\rho = 2900$ кг/м³, $\alpha = 0.5$. Данные параметры являются усредненными характеристиками горных пород, слагающих земную кору.

Линейный критерий дилатансии, предложенный в [1], имеет вид

$$D_\sigma = \begin{cases} \sigma_1(1 - \sin(\phi))/2 - \sigma_3(1 + \sin(\phi))/2 - Y \cos(\phi), & -\sigma_3 > \sigma_r \\ -\sigma_3 - \sigma_r, & -\sigma_3 < \sigma_r \end{cases} \quad (3)$$

где $\phi = 30^\circ$ – угол внутреннего трения, $\sigma_r = 8 \cdot 10^6$ Па – прочность среды на растяжение.

Для проведения вычислительных экспериментов была разработана программа, реализующая расчеты напряжений для сосредоточенных пар сил по модели Миндлина [5] и зон дилатансий по критериям D_τ и D_σ . Примеры численных расчетов критериев приведены на рисунках 1 и 2. Величина тензора сейсмического момента выбрана таким образом, чтобы критериальные величины формировали область, имеющую связь с приповерхностным слоем. Принципиальное отличие рассматриваемых критериев заключается в том, что D_σ пропорционален величине максимального напряжения, поэтому форма области повышенных напряжений будет пропорциональна величине

сосредоточенного источника. Поэтому для анализа поля напряжений достаточно построить линии уровней напряжений в упругом полупространстве относительно конфигурации модельного источника. В случае же с критерием D_τ будет иметь место совпадение в окрестности точки приложения сосредоточенных источников. Однако, за счет слагаемого ρgz будет происходить изменение формы области дилатансии. При этом близко свободной поверхности будет появляться область, удовлетворяющая данному критерию.

Моделирование областей повышенных напряжений с учетом реальных порядков величин сейсмического момента указывает на отсутствие приповерхностных областей. Область повышенных напряжений формируется непосредственно в окрестности приложения сосредоточенных источников. В связи с этим ответ на вопрос о формировании областей существенно зависит от глубины приложения сосредоточенного источника и величины тензора сейсмического момента. Если принять во внимание, что в пределах Камчатки имеется субдукционный разлом, можно сделать предположение, что области повышенных напряжений определяются не столько подготовкой отдельных событий, сколько возникающим напряжением между океанической и материковой плитами. Тогда в рассматриваемых моделях можно добавить некоторое пороговое значение постоянного поля напряжения, которое формируется за счет взаимодействия плит. Для критериев D_σ и D_τ этот параметр можно учесть добавлением порогового слагаемого. Нужно отметить, что подобные расчеты были применены для критерия D_τ в работе [4].

О степенных законах в вязко-упругих моделях

В описанных выше моделях земная кора рассматривалась как упругое изотропное полупространство, что является очень грубым приближением. В реальности геосреда обладает неоднородностью, имеет ярко выраженный иерархический характер системы вложенных блоков, разломы и трещины существуют в земной коре на различных масштабах. При математическом описании среды с подобной структурой описываются как фракталы. Горные породы при кратковременном воздействии проявляют упругие свойства, однако при длительной нагрузке они могут вести себя как вязкая жидкость. Такие вязко-упругие свойства определяются, в конечном счете, внутренней структурой пород. Подходящим феноменологическим подходом к описанию напряженно-деформированного состояния со среды сложными механическими свойствами являются реологические модели [?, 8].

Приложенные к телу внешние силы вызывают его деформацию. В упругом случае, когда силу мгновенно выключают, деформации тоже исчезают мгновенно, что выражается алгебраическим законом Гука:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t),$$

где $\sigma(t)$ – напряжение, $\varepsilon(t)$ – деформация, E – модуль упругости. Другой крайний случай – это вязкая ньютоновская жидкость, когда напряжение пропорционально скорости деформации:

$$\sigma(t) = \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt},$$

где η – модуль упругости. Эти два предельных случая обобщаются в реологических моделях в динамическую связь в виде равенства линейных дифференциальных вы-

ражений относительно напряжений и деформаций с постоянными коэффициентами, выражающими вязко-упругие свойства среды.

Реологическая модель Кельвина-Фойгта описывает медленное возвращение к начальному состоянию с постоянной скоростью после снятия нагрузки. Соответствующее модельное уравнение имеет вид Уравнения Кельвина-Фойгта имеет вид

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (4)$$

Предположим, что в среде сформировалось некоторое поле напряжений. Будем считать, что временной масштаб изменения напряжений много больше, чем деформационные изменения. Тогда на временном масштабе деформационных изменений можно считать напряжения $\sigma(t)$ постоянными и решение уравнения (4) относительно деформаций примет вид

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{Et}{\eta}\right) \right], \quad (5)$$

описывающий классическую экспоненциальную релаксацию.

Одни из подходов, используемых в математическом моделировании для описания фрактальных структур является дробное интегро-дифференцирование [9]. Чаще всего выполняется формальная замена целой степени дифференциальных операторов на дробную.

Выполним такую формальную замену в уравнении (4) и получим обобщение модели Кельвина-Фойгта на фрактальный случай

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta \frac{d^\gamma \varepsilon}{dt^\gamma}. \quad (6)$$

Простейший подход к численному решению этого уравнения в следующем [10]. Рассмотрим явную схему Эйлера для уравнения (4) с шагом h для узлов. При заданном начальном условии $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$, получим линейную систему

$$\frac{1}{h} \mathbf{A} \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\eta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{E}{\eta} \mathbf{B} \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad (7)$$

с матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \eta/(Eh) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если теперь заменить матрицу $\frac{1}{h} \mathbf{A}$ в левой части системы (7) на дробную степень $\frac{1}{h^\gamma} \mathbf{A}^\gamma$ получим простейшую разностную схему для уравнения (6).

Численное моделирование при различных показателях дробной степени линейного оператора приводит к следующей зависимости решения от степени дробности разностного оператора γ . В этом случае закон релаксации будет иметь степенной вид. Особенностью данного решения разностного уравнения с дробной степенью является более медленный вход деформаций на стационарный уровень в отличие от экспоненциальной зависимости.

Заключение

Разработан программный комплекс для математического моделирования областей повышенных напряжений с возможностью использования экспериментальных данных тензора сейсмического момента. Результаты моделирования полей напряжений позволяют оценить напряженно-деформированное состояние (НДС) земной коры в районах подготовки землетрясений. В свою очередь изменение НДС дает возможность выполнить сопоставление данных наблюдений за параметрами других геофизических полей при исследовании физики процессов, протекающих в земной коре в сейсмоактивном регионе. Используя численный алгоритм для решения задачи дробного исчисления, представлены результаты моделирования относительных деформаций с учетом степенных законов.

Работа выполнена в рамках проекта 18-5-002 «Информационно-вычислительная система моделирования распространения геоакустических и нелинейных деформационных возмущений в земной коре (раздел 1)» Комплексной программы фундаментальных научных исследований Дальневосточного отделения РАН «Дальний Восток» на 2018-2020 гг.

Список литературы

- [1] Алексеев А. С., Белоносов А. С., Петренко В. Е., “О концепции многодисциплинарного прогноза землетрясений с использованием интегрального предвестника. Проблемы динамики литосферы и сейсмичности”, *Вычислительная сейсмология*, 2001, № 32(1), 81–97. [Alekseev A. S., Belonosov A. S., Petrenko V. E., “O koncepcii mnogodisciplinarnogo prognoza zemletryasenij s ispol'zovaniem integral'nogo predvestnika. Problemy dinamiki litosfery i sejsmichnosti”, *Vychislitel'naya sejsmologiya*, 2001, № 32(1), 81–97].
- [2] Пережогин А. С., Шевцов Б. М., Сагитова Р. Н., Водинчар Г. М., “Моделирование зон геоакустической эмиссии”, *Математическое моделирование*, 2007, № 19(11), 59–64. [Perezhogin A. S., Shevcov B. M., Sagitova R. N., Vodinchar G. M., “Modelirovanie zon geoakusticheskoj ehmissii”, *Matematicheskoe modelirovanie*, 2007, № 19(11), 59–64].
- [3] Пережогин А. С., Шевцов Б. М., “Модели напряженно-деформированного состояния горных пород при подготовке землетрясений и их связь с геоакустическими наблюдениями”, *Вычислительные технологии*, 2009, № 14(3), 48–57. [Perezhogin A. S., Shevcov B. M., “Modeli napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya gornyh porod pri podgotovke zemletryasenij i ih svyaz' s geoakusticheskimi nablyudenyami”, *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2009, № 14(3), 48–57].
- [4] Салтыков В. А., Кугаенко Ю. А. “Развитие приповерхностных зон дилатансии как возможная причина аномалий в параметрах сейсмической эмиссии перед сильными землетрясениями”, *Тихоокеанская геология*, 2012, № 31(1), 96–106. [“Razvitie pripoverhnostnyh zon dilatansii kak vozmozhnaya prichina anomalij v parametrah sejsmicheskoy ehmissii pered sil'nymi zemletryaseniyami”, *Tihookeanskaya geologiya*, 2012, № 31(1), 96–106].
- [5] Mindlin R. D., “Force at a point in the interior of a semi-infinite solid”, *Physics*, 1936, № 7(5), 195–202.

- [6] Ekström G., Nettles M., Dziewoński A. M., “The global CMT project 2004–2010: Centroid-moment tensors for 13017 earthquakes”, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **200** (2012), 1–9.
- [7] Кузин И. П., *Фокальная зона и строение верхней мантии в районе Восточной Камчатки*, Наука, М., 1974, 132 с. [Kuzin I. P., *Fokal'naya zona i stroenie verhnjej mantii v rajone Vostochnoj Kamchatki*, Nauka, M., 1974, 132 pp.]
Рейнер М., *Реология*, Наука, М., 1965, 224 с. [Rejner M., *Reologiya*, Nauka, M., 1965, 224 pp.]
- [8] Ревуженко А. Ф., *Механика сыпучей среды*, Офсет, Новосибирск, 2003, 373 с. [Revuzhenko A. F., *Mekhanika syrucheej sredy*, Ofset, Novosibirsk, 2003, 373 pp.]
- [9] Учайкин В. В., *Метод дробных производных*, Артишок, Ульяновск, 2008, 512 с. [Uchajkin V. V., *Metod drobnuh proizvodnyh*, Artishok, Ul'yanovsk, 2008, 512 pp.]
- [10] Ильин И. А., Нощенко Д. С., Пережогин А. С., “Численные решения системы линейных уравнений с дробной степенью матрицы дифференциального оператора”, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2013, № 7(2), 7–11. [Il'in I. A., Noshchenko D. S., Perezhogin A. S., “СHislennye resheniya sistemy linejnyh uravnenij s drobnou stepen'yu matricy differencial'nogo operatora”, *Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskie nauki*, 2013, № 7(2), 7–11].

Для цитирования: Водинчар Г. М., Пережогин А. С. Критерии напряженно-деформированного состояния геосреды // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 4(24). С. 90-96. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-90-96

For citation: Vodinchar G. M., Perezhogin A. S. Criteria of the stress-strain state of the geophysical medium, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018, **24**: 4, 90-96. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-90-96

Поступила в редакцию / Original article submitted: 16.07.2018