

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-66-89

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 629.782:537.226.8

МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ОБЪЕМНОЙ ЭЛЕКТРИЗАЦИИ ВЫСОКООМНЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ В УСЛОВИЯХ КОСМИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

В. В. Богданов

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
684034, с. Паратунка, ул. Мирная, 7

E-mail: vbogd@ikir.ru

Работа посвящена построению модели объемной электризации высокоомных диэлектриков, используемых в космической технике и взаимодействующих с агрессивными факторами космического пространства. Предположение о максвелловском распределении потока заряженных частиц по энергии позволяет получить простую модель, дающую возможность рассчитать распределение электрического поля и потенциала в объеме диэлектрика с учетом токов вторичной эмиссии и значения поверхностного потенциала при заданном внешнем потоке электронов. Сложность возникает из-за нелинейности: поверхностный потенциал зависит от внешнего тока, а ток – от этого потенциала. Эта нелинейность определяет возникновение трансцендентного уравнения относительно потенциала ϕ_0 , которое решается численно итеративным методом. Из физики взаимодействия потока заряженных частиц, описанной в работе, совершенно естественным путем получает свое объяснение формирование плоскости нулевого значения электрического поля с выводом выражения, определяющего численное значение глубины расположения этой плоскости x_0 .

Ключевые слова: факторы космического пространства, электризация, высокоомные диэлектрики, токи вторичной эмиссии и проводимости, длина пробега, темновая проводимость

© Богданов В. В., 2018

Введение

Запуски искусственных спутников в космическое и околоземное космическое пространство привели не только к фундаментальным открытиям, таким как солнечный ветер (СВ), магнитосферы Земли с ее сложной топологией, радиационных поясов и т.д. Одновременно с этим опыт эксплуатации космических аппаратов (КА) поставил перед конструкторами серьезную задачу, связанную с разработкой оптимальных мер, призванных защитить аппараты от действия агрессивных факторов космического пространства (ФКП), к которым в первую очередь необходимо отнести:

- галактическое излучение (жесткие рентгеновские кванты и галактические космические лучи);
- электромагнитное и корпускулярное излучение Солнца, в том числе и солнечные космические лучи;
- атомарный кислород (холодная плазма);
- ионизирующее излучение магнитосферы Земли;
- микрометеориты и космическая пыль;
- космический вакуум.

Одновременное действие такого большого числа различных физических, химических факторов приводит к сложной зависимости определяющих показателей материалов как от строения слагающих его органических веществ, так и от окружающей обстановки и условий эксплуатации, которые, естественно, зависят от орбиты. Поэтому успешное решение проблемы выбора материала для различных целей и определение его ресурса требует учета всего комплекса взаимовлияющих факторов. В настоящей работе нас будет интересовать влияние на защитные диэлектрические материалы, расположенные на внешней поверхности КА, со стороны магнитосферной плазмы. Именно она в основном ответственна за зарядку как самого КА, так и его диэлектрических покрытий статическим электричеством (эффект электризации). Как показал опыт эксплуатации аппаратов в натуральных условиях, это явление может явиться причиной тяжелых, порой неустранимых последствий в функционировании штатных приборов спутников, вплоть до катастрофических отказов. Это приводит, в лучшем случае, к сокращению в полном объеме программы полета или, в худшем, к невозможности дальнейшей эксплуатации КА. Космические лучи (КЛ), имея большую энергию, обладают большой проникающей способностью и ответственны за электризацию диэлектриков и повреждение электронных схем, расположенных внутри рабочего отсека КА. Действие КЛ в работе не рассматриваем.

Сам факт заряда диэлектриков до больших отрицательных потенциалов был известен еще до начала интенсивного освоения околоземного космического пространства. Так, оценки, выполненные во второй половине пятидесятых годов прошлого века советскими учеными, дали величину минус 20 кВ. Однако неожиданными оказались последствия, к которым приводит электризация. В 1972г. Де Форест объяснил причину возникновения, на первый взгляд, непонятного поведения различных систем КА при их эксплуатации в натуральных условиях, связанного с возникновением в их работе различных сбоев и отказов [12]. Наличие на поверхности КА всевозможных

защитных диэлектрических покрытий, которые обладают различными электрофизическими характеристиками (коэффициентами вторичной эмиссии, проводимостью, длинами пробега электронов в веществе и т.д.), приводит к их дифференциальному заряджению. Если разность потенциалов между какими-либо участками на поверхности КА или в объеме диэлектрика достигает пробойных значений, то возникает электрический разряд. При этом или сам разряд, или его электромагнитная энергия могут проникнуть в электронные схемы штатной аппаратуры. Это, в свою очередь, может привести или к выжиганию элементов схемы и полному выходу прибора из строя; или прохождению ложной команды, что влечет за собой внепрограммное срабатывание систем аппарата с тяжёлыми последствиями, с точки зрения дальнейшего функционирования КА; или сбоем и временному отказу в работе какого-либо прибора, работоспособность которого восстанавливается через некоторое время. Кроме того, разряды в объеме, например, защитных кварцевых стекол солнечных батарей приводят к их помутнению, что уменьшает эффективность этих батарей, а также – к уменьшению механической прочности материала. Поэтому перед конструкторами и разработчиками космической техники стоит задача уменьшить, если невозможно устранить совсем, последствия влияния ФКП на работу систем КА и, в конечном счете, увеличить ресурс и время существования КА в натуральных условиях. Актуальность этой проблемы не вызывает сомнений и к настоящему времени накоплен огромный экспериментальный и теоретический материал, посвященный проблемам электризации КА (см. [1] - [11], более полная информация об этой проблеме содержится в [15]). В данной работе предлагается достаточно простая модель расчета объемной электризации высокоомных диэлектриков, которая на стадии проектирования и выбора защитных диэлектрических материалов, позволяет оценить уровень электризации диэлектрических материалов и определить оптимальные. Эта модель позволяет рассчитывать распределение электрического потенциала и поля в объеме конкретного диэлектрика под воздействием заданного потока заряженных частиц. Для понимания физической стороны предлагаемой модели, в работе кратко рассматриваются токовые механизмы, обуславливающие электризацию, а также понятие "толстой" и "тонкой" оболочек, которые трактуют как толщину оболочек, в пределах которых КА вносит существенное возмущение в окружающее пространство. Эти понятия связаны с понятием "радиуса Дебая".

Токовые механизмы, обуславливающие электризацию КА

Поверхностное заряджение диэлектрика

Когда электроны внешнего потока взаимодействуют с поверхностью КА, возникает большая вероятность того, что часть их не будет поглощена материалом, а за счет взаимодействия с веществом будет рассеяна обратно, создавая тем самым ток обратно рассеянных электронов I_{se} . Этот ток можно представить $I_{se} = \eta I_e$, где I_e – ток первичного потока электронов, который взаимодействует с поверхностью КА, η – коэффициент обратного рассеяния. Одновременно с этим электроны, не отраженные назад, двигаясь в веществе, могут передавать часть своей энергии приповерхностным электронам. Последние, совершив работу выхода, покидают вещество, образуя ток вторичной эмиссии $I_{ee} = \delta I_{se}$, где δ – коэффициент вторичной электрон-электронной эмиссии (см. рис. 1).

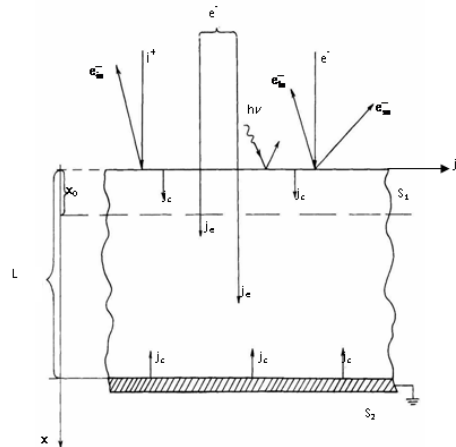


Рис. 1. Схема взаимодействия первичных потоков ионов i^+ и электронов e^- с плоским диэлектриком

Взаимодействие внешних потоков ионов с поверхностью приводит к формированию тока вторичной электрон-ионной эмиссии $I_{ie} = \gamma I_i$, где γ – коэффициент вторичной электрон-ионной эмиссии, I_i – первичный ток ионов на поверхность КА. При этом током обратнo рассеянных ионов I_{si} и током вторичной ионно-ионной эмиссии I_{ii} обычно пренебрегают.

Необходимо отметить, что коэффициенты η , δ и γ являются функциями не только энергии падающих электронов или ионов, но и зависят от потенциала и свойств поверхности, с которой взаимодействуют.

Взаимодействие ультрафиолетового и рентгеновского излучения Солнца с поверхностью КА приводит к тому, что часть приповерхностных электронов, поглотив фотон электромагнитного излучения и совершив работу выхода, создают ток фотоэлектронной эмиссии I_{ph} . В случае, если КА находится в тени, то фототок уменьшается на шесть порядков и обуславливается действием отраженного или от Солнца, или Луны света. В противном случае фототок, приводящий к обеднению поверхности электронами, по порядку величины равен или даже больше тока падающих электронов. Это приводит к тому, что потенциал освещенной поверхности стремится к нулю. Он может принимать и положительные значения, но не больше 10-15 В. Последнее обусловлено тем, что энергетический спектр фотоэлектронов не превышает 10-15 эВ и имеет максимум на 4-5 эВ. Поэтому покидающие поверхность фотоэлектроны за счет кулоновского взаимодействия притягиваются обратно, ограничивая тем самым положительный рост потенциала КА.

Существование дифференциального потенциала между соседними участками конструкции КА приводит к возникновению тока утечки I_L . Величина токов утечки зависит от многих параметров и рассчитать ее достаточно сложно. Однако оценить верхний предел этого тока можно. Известно, что если поток электронов меньше величины $I_0 = 10^6 - 10^7 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$, то естественная, хотя и малая, проводимость не дает возможности накапливаться зарядам в локальной области (скорость утечки зарядов больше скорости поступления). Отсюда, положив для тока утечки равенство току внешних электронов eI_0 , получим верхнюю границу для тока утечки $j_L = 1.6 \cdot (10^{-13} - 10^{-12}) \text{ А} \cdot \text{см}^{-2}$.

Если ток внешних электронов I_e приводит к созданию избытка отрицательных зарядов в веществе, то токи $I_{se}, I_{ee}, I_{ie}, I_i, I_{ph}, I_L$ приводят к его ограничению. Поэтому суммарный ток на поверхность КА можно представить в виде

$$I_{\Sigma} = I_e - (I_{ee} + I_{se} + I_{ie} + I_{ph} + I_i + I_L)$$

Обычно это соотношение записывают через плотности соответствующих токов, отнесенных к единице поверхности, т.е.

$$j_{\Sigma} = \frac{I_{\Sigma}}{S} = j_e - (j_{ee} + j_{se} + j_{ie} + j_{ph} + j_i + j_L) \quad (1)$$

(В дальнейшем под токами будем понимать величину плотности тока j). Действие токов, определяемых соотношением (1) (см. рис. 1), приводит к тому, что тело начинает заряжаться, причем изменение потенциала φ и заряда q связаны соотношением

$$C \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dq}{dt} = j_{\Sigma} = j_e - (j_{ee} + j_{se} + j_{ie} + j_{ph} + j_i + j_L) \quad (2)$$

где C – электроёмкость, отнесенная к единице рассматриваемой поверхности. Зарядение элемента поверхности будет происходить до тех пор, пока сумма токов через поверхность, определяемых правой частью (2), не обратится в нуль. Поэтому стационарный потенциал φ_o , до которого заряжается поверхность под действием заданных токов, определяется токовым балансом

$$j_{\Sigma}(\varphi_o) = j_e - (j_{ee} + j_{se} + j_{ie} + j_{ph} + j_i + j_L) = 0 \quad (3)$$

Изменение внешних условий приводит к изменению и самого стационарного потенциала φ_o .

Для определения динамики заряжения какой-либо поверхности или вычисления стационарного потенциала, кроме уравнений (2) и (3), в самом общем случае необходимо привлечь уравнение Пуассона и кинетическое уравнение Власова с постоянными коэффициентами, которое используется для описания бесстолкновительной плазмы

$$\Delta\varphi = 4\pi e(n_s + n_e - n_i), \quad (4)$$

$$(\vec{v}_{\alpha} \cdot \vec{\nabla})f - \frac{e}{m}(\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}_{\mathbf{v}})f = 0 \quad (5)$$

В (4) n_s – плотность электронов, эмитируемых с рассматриваемой поверхности. В уравнении Власова $a = (e, i)$, где e – электроны и i – ионы.

Для решения уравнений (2,3) совместно с (4, 5) были разработаны методы различной сложности. Однако наиболее простым, с точки зрения применения в инженерных расчетах, является метод аналитической аппроксимации токов, поступающих на диэлектрик (зонд), в основе которого лежит теория Ленгмюра для электрического зонда [14]. В этой теории важным понятием является понятие дебаевского радиуса.

Из простых физических соображений ясно, что заряженная частица определенного знака будет притягивать к себе частицы, обладающие противоположным знаком, и отталкивать – с одноименным. Частицы с противоположным зарядом, группируясь вокруг заданной, экранируют её поле. Физический смысл дебаевского радиуса или дебаевской длины заключается в том, что на расстоянии $r = \lambda_d$ поле частицы

в плазме практически экранируется частицами противоположного знака, создающими облако вокруг исходного заряда. Дебаевскую длину трактуют как толщину оболочки, в пределах которой КА вносит существенное возмущение в окружающее пространство.

В сравнении λ_d с характерными размерами КА вводят понятия «толстой» или «тонкой» оболочки. Понятие «толстой» плазменной оболочки соответствует случаю, когда радиус Дебая много больше характерных размеров КА, т.е. $\lambda_d \gg R_{КА}$. Для магнитосферы это реализуется в тех её областях, где плазма имеет низкую плотность и высокую энергию. В рамках этого приближения можно пренебречь пространственным зарядом, т.е. пренебречь влиянием оболочки. Именно этим приближением мы будем пользоваться в дальнейшем. Математически это соответствует тому, что уравнение Пуассона (4) сводится к уравнению Лапласа $\Delta = 0$.

Кроме того, если предположить, что потоки заряженных частиц имеют максвелловское распределение

$$f_{\alpha} = n_{ok} \left(\frac{m_{\alpha}}{2\pi k T_{\alpha}} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_{\alpha} v_{\alpha}^2}{2kT}\right), \quad (6)$$

то отпадает необходимость в решении уравнения Власова (5). В рамках этих предположений выражение для электронного тока, текущего через единичную поверхность тела с произвольной геометрией, имеет простой вид

$$j_{ee} = j_{eo} \exp(e\phi/kT_e), \quad (7)$$

где $j_{eo} = e \int \int \int v_e f_e d^3 v_e = en_{oe} (kT_e/2\pi m_e)^{1/2}$ – невозмущенный электронный ток при потенциале поверхности КА $\phi = 0$.

Если $\lambda_d \ll R_{КА}$, используется приближение «тонкой» оболочки. Это приближение справедливо в областях ионосферы на высотах от 250 до 1000 км, где концентрация велика ($\geq 10^3 \text{ см}^{-3}$), а энергия частиц мала ($\leq 10 \text{ eV}$). В этом случае λ_d изменяется от нескольких сантиметров до нескольких десятков сантиметров, что существенно меньше $R_{КА}$. Приближение «тонкой» оболочки в условиях ионосферы соответствует зарядению до небольших отрицательных потенциалов (менее 10В). Это относится ко всем КА в ионосфере за исключением полярных, попадающих в момент магнитосферного возмущения в области высыпания электронов и в полярные каспы. В этом случае необходимо перейти к приближению «толстой» оболочки. Поэтому учет электризации для $R_{КА}$ представляет интерес только при объяснении результатов научных измерений. Конструктору достаточно знать, что уровень зарядения в ионосфере не представляет собой опасности для КА, орбиты которых полностью лежат в области 250-1000км и не попадают в полярные области. Однако следует отметить, что в период развития магнитосферных возмущений на высотах полета пилотируемых КА (~ 400 км) формируется так называемый поляризационный джет, энергии частиц которого может оказаться достаточно не только с точки зрения опасного зарядения диэлектриков, но и с точки зрения безопасной жизнедеятельности экипажа.

Элементы физики объёмного заряжения диэлектрика

При вычислении поверхностного потенциала на основе выражений (3-5) теряется информация о внутреннем распределении потенциала и электрического поля, теперь учтем это.

Наличие высокоэнергичной электронной компоненты магнитосферной плазмы приводит к тому, что помимо вторичных поверхностных токов j_{ee}, j_{se} и j_{ie} , введенных в разделе 1, в объеме диэлектрика возникает ещё один ток. Действительно, если электроны обладают высокой энергией и если они не подверглись обратному рассеянию в приповерхностном слое диэлектрика, то они могут пройти в данной среде расстояние, равное длине пробега λ , являющейся функцией начальной энергии W . Именно эти высокоэнергичные электроны создают в объеме диэлектрика ток, который не учитывался при поверхностной электризации.

На рис. 1 представлен плоский диэлектрик бесконечной протяженностью и толщиной L . Одна сторона диэлектрика металлизирована (плоскость S_2) и имеет гальваническую связь с корпусом. Другая сторона (плоскость S_1) не имеет металлизации, и диэлектрик непосредственно взаимодействует с магнитосферной плазмой. Ось X направлена вниз по нормали к поверхности диэлектрика, на которой значение x принимается равным нулю. На рис.1 представлены токи вторичной эмиссии j_{ee}, j_{se}, j_{ie} фототок j_{ph} , а так же ток j_e , обусловленный высокоэнергичными электронами, проникшими в диэлектрик. Эти электроны за счет торможения на длине своего пробега теряют энергию и приводят к возникновению токов проводимости j_c .

Профиль электрического поля внутри диэлектрика можно вычислить из условия, что плотность тока падающих электронов должна быть равна сумме плотностей тока проводимости от проводника, находящегося в плоскости S_2 , тока, создаваемого падающими ионами, а также токов вторичной эмиссии и тока обратного рассеяния на поверхности S_1 .

Сделаем одно замечание, которое нам понадобится в дальнейшем. Реальные потоки ионов в магнитосферной плазме за счет их большой массы составляют только около одного процента от потока электронов с энергиями в несколько кэВ и выше. Кроме того, для ионов длина пробега в среде в сравнении с электронами на несколько порядков меньше, чем у электронов. Так, например, при энергии равной 1 МэВ, длина пробега электрона в кварцевом стекле 2 мм, при этом у иона (протона) только ~ 10 мкм (10^{-2} мм). Поэтому вкладом ионов в объемное заряджение диэлектриков в дальнейшем будем пренебрегать.

Электроны с высокими собственными энергиями, теряя энергию за счет торможения в объеме диэлектрика, создают пространственный заряд. Созданный этим зарядом электрические поля вызовут перетекание токов проводимости. Часть токов проводимости втекает в образец через поверхность S_2 , другая часть втекает в образец через поверхность S_1 . В последнем случае ток проводимости обуславливается токами вторичной эмиссии и обратно рассеянными электронами, уходящими в пространство через эту поверхность. Следовательно, для образца, представленного на рис. 3, токи проводимости направлены навстречу друг другу, и поэтому внутри диэлектрика на глубине x_0 существует плоскость, через которую ток не течет и в которой напряженность электрического поля обращается в нуль.

Отметим еще одну сторону физики объемного заряджения диэлектриков. Двигаясь в среде, электрон расходует свою энергию на ионизацию вещества с образованием электронов, которые могут перемещаться в объеме диэлектрика, и положительных «дыр», а также на тормозное излучение. Одновременно электрон при движении может быть захвачен в ловушку. Следовательно, точное, максимально приближенное к реальности, описание процесса взаимодействия энергичных электронов с веществом требует привлечения строгих теоретических методов и является сложной задачей.

Для построения строгой теории взаимодействия потока заряженных частиц с диэлектриком, более полно описывающей реальный процесс, применяется кинетическая теория накопления диэлектриком объёмного заряда Роуза-Фаулера-Вайсберга (РФВ). На основе модели РФВ строились различные физические теории, описывающие обратимые процессы, которые возникают при облучении диэлектриков потоком энергичных заряженных частиц: диэлектрические свойства, ползучесть, долговечность, электропроводность и т.д. [3],[5].

Эта модель используется для расчета заряжения диэлектрика в предположении о постоянстве мощности дозы облучения и скорости генерации электрон-дырочных пар во всем объеме диэлектрика, что не соответствует реальным условиям, с которыми сталкивается КА в магнитосфере. Это можно реализовать только для монохроматических высокотемпературных потоков плазмы, которые создаются в лабораторных условиях. Причём энергия частиц этих монохроматических потоков должна быть достаточно высока, а толщина материала – достаточно мала, чтобы длина пробега электронов λ была бы много больше толщины облучаемого материала L ($\lambda \gg L$). Однако реальная магнитосферная плазма достаточно хорошо описывается максвелловским распределением (более адекватное описание дается двухмаксвелловским с двумя разными температурами) распределением частиц по скоростям, и значительная часть заряженных частиц тормозится в объеме диэлектрика.

Система РФВ достаточно сложна и мало пригодна для проведения оценочных расчетов объёмной электризации диэлектрических материалов КА в натуральных условиях в рамках инженерных расчетов. В то же время, исходя из достаточно простых физически ясных представлений и с привлечением экспериментальных результатов (значения коэффициентов вторичной эмиссии и обратного рассеяния), можно построить замкнутую теорию, позволяющую в рамках инженерных методов рассчитывать объёмную электризацию диэлектриков.

Заряженные частицы плазмы, совершая тепловое движение, имеют не только различные координаты, но и различные по величине и направлению скорости. Наиболее подробное описание плазмы даётся набором изменяющихся во времени координат и скоростей всех частиц. Естественно, что для реальной плазмы, состоящей из огромного числа частиц, достичь такого уровня описания невозможно. Поэтому обычно для описания плазмы пользуются одночастичной функцией распределения частиц, представляющей число частиц в шестимерном фазовом пространстве: $f = f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)$. Однако функцию распределения можно значительно упростить, если описывать ее максвелловской функцией распределения (см.(6))

$$F_{\alpha} = n_{\alpha} f_{\alpha} = n_{\alpha} \left(\frac{m}{2\pi k T_{\alpha}} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right), \tag{8}$$

где $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, $n_{\alpha} = (N_{\alpha}/V)$ – концентрация частиц сорта α , N_{α} – их общее число в объёме V . Функция (8) показывает какое среднее по времени число частиц данного сорта, находящихся в данном элементе объёма, имеют скорости, лежащие в данном интервале. В самом общем случае движение частиц происходит в трехмерном пространстве и для его определения необходимо задать три составляющие скорости по каждой из координатных осей x , y , и z , причем скорости по каждой координате изменяются от $-\infty$ до $+\infty$. Переходя к нашей одномерной задаче (см. рис.1), мы должны, прежде всего, учесть, что скорость частиц плазмы, во-первых, имеет только одну составляющую скорости v_x . Во-вторых, скорость может изменяться от 0 до

$+\infty$. Постановка задачи в таком виде приводит к тому, что трёхмерная функция распределения Максвелла (8) переходит в одномерную

$$f_{\alpha} = \left(\frac{m}{2\pi kT_{\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT_{\alpha}}\right). \quad (9)$$

В дальнейшем индекс «х» при скорости «v» будем опускать.

Будем считать, что первичный поток плазмы, взаимодействующий с плоскопараллельным диэлектриком, состоит из электронов и ионов, имеющих соответственно концентрации n_{oe} и n_{oi} , а $n_o = n_{oe} + n_{oi}$ – полная концентрация. Далее полагаем, что плазма изотермична ($T_e = T_i = T$) и удовлетворяет условию квазинейтральности ($n_{oe} = n_{oi} = n_o/2$). В этом случае нормированные функции распределения для электронов (индекс «e») и ионов («i») имеют вид

$$f_{e,i} = \left(\frac{m_{e,i}}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{m_{e,i}v_{e,i}^2}{2kT}\right). \quad (10)$$

Построение модели электризации

Длина свободного пробега. Графическая аппроксимация. Энергичный электрон первичного потока плазмы, проходя через вещество, тормозится и теряет свою энергию. Если в газах ионизационные потери определяются столкновениями с отдельными атомами, то в конденсированных средах, в том числе и в диэлектриках, во взаимодействии с пролетающей частицей участвует одновременно много атомов. С макроскопической точки зрения влияние этого обстоятельства на потерю энергии частицей обуславливается диэлектрической поляризацией окружающей среды. (Потерями на образование электрон-дырочных пар и тормозное излучение пренебрегаем). Следовательно, длина пробега зависит как от энергии частицы, так и от поляризационных свойств среды, в которой она перемещается. Поэтому для различных диэлектриков, используемых для защитных покрытий КА, различны не только коэффициенты вторичной эмиссии γ, δ, η , но и длина пробега, и, следовательно, будет различен уровень объёмной электризации для заданных внешних условий. Длина пробега зависит от энергии частицы и её можно характеризовать массой вещества, пройденного этой частицей, отнесенной к единице поверхности: $l = \lambda \rho$, где ρ – плотность вещества (г/см^3), λ – длина пробега (см) и l – масса, пройденного вещества к единице поверхности (г/см^2).

На рис.2 представлена в логарифмическом масштабе экспериментальная зависимость l от энергии W первичного потока плазмы для полимерных материалов, широко используемых в космической технике. Эта зависимость материалов аппроксимируется двумя прямыми линиями, имеющими общую точку с координатами (x_2, y_2) .

Вывод уравнений, описывающих два участка зависимости $l(W)$, приводится в Приложении А. Согласно этому приложению зависимость величины l от энергии W можно представить в следующем виде:

$$l = \rho \cdot \lambda = \alpha \cdot W^{\beta} \begin{cases} \alpha_1 = 4,167 \cdot 10^{-6} \\ \beta_1 = 1.89 \end{cases} \text{ для } W \leq 275 \text{keV} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = 7.41 \cdot 10^{-4} \\ \beta_2 = 0.97 \end{cases} \text{ для } W \geq 275 \text{keV}$$

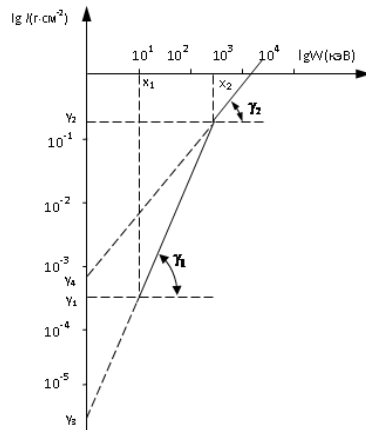


Рис. 2. Схема взаимодействия первичных потоков ионов i^+ и электронов e^- с плоским диэлектриком

где W измеряется в кэВ; l – в г/см²; ρ – в г/см³; λ – в см. Разрешив (11) относительно W , получим

$$W = \left(\frac{l}{\alpha}\right)^{1/\beta} = (\rho \cdot \lambda)^{1/\beta} \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/\beta} = \rho^p \cdot \xi \cdot \lambda^p \begin{cases} \xi_1 = 7.02 \cdot 10^2 \\ p_1 = 5.3 \cdot 10^{-1} \end{cases} \text{ для } \rho \cdot \lambda \leq 0.172 \quad (12)$$

$$\begin{cases} \xi_2 = 1.69 \cdot 10^3 \\ p_2 = 1.031 \end{cases} \text{ для } \rho \cdot \lambda \geq 0.172$$

где $\xi = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^p, p = \frac{1}{\beta}$.

Если формула (11) определяет длину пробега в веществе диэлектрика как функцию W и ρ , то (12) даёт значение энергии, которую необходимо иметь частице, чтобы в данной среде с плотностью пройти заданное расстояние λ . Заменяв λ на x , получим зависимость энергии от координаты

$$W = \xi \rho^p x^p, \quad (13)$$

где значения « ξ » и « p » определены в (12).

Выше отмечалось, что при равной энергии длина пробега ионов λ существенно меньше длины пробега электронов. Поэтому в дальнейшем, при построении модели объемной электризации, будем учитывать только действие электронов.

Зависимость концентрации тока первичного потока электронов от длины свободного пробега. Интегрирование функций f_e (см. (10)) по скоростям от 0 до ∞ в области над диэлектриком ($x < 0$) даёт соответственно концентрацию электронов первичного потока плазмы n_{oe} . По мере продвижения в объёме диэлектрика поток электронов будет уменьшаться за счет торможения низкоэнергичной части распределения. Определим концентрацию $n_e(x)$ и ток электронов $j_e(x)$ как функции координаты x . Для определения $n_e(x)$ проинтегрируем функцию распределения для электронов (10) в пределах от 0 до произвольной скорости v

$$n_e(\leq v) = n_{oe} \int_0^v \left(\frac{m_e}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2\pi kT}\right) dv = n_{oe} \left[1 - \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2\pi kT}\right)\right] \quad (14)$$

Формула (14) показывает долю электронов, отнесенных к единице объёма, скорость которых лежит в интервале от 0 до v и которые затормозились на интервале от 0 до x . Оставшаяся часть электронов, скорость которых лежит от v до ∞ , определяется разностью между первоначальной концентрацией n_{oe} и n_e

$$n_e(\geq v) = n_{oe} - n_e(\leq v) = n_{oe} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2kT}\right). \quad (15)$$

Исходный ток электронов равен:

$$j_{oe} = en_{oe} \int_0^\infty v f_e dv = en_{oe} \cdot \sqrt{\frac{kT}{2\pi m_e}} = en_{oe} \bar{v}, \quad (16)$$

где $\bar{v} = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m_e}}$ – средняя тепловая скорость электронов. Т.к. по мере движения электронов по оси x низкоэнергичная часть их за счет торможения останавливается, то вместе с уменьшением начальной концентрации уменьшается и ток, протекающий в объёме диэлектрика. Это уменьшение тока определяется соотношением

$$j_e(\leq v) = en_{oe} \int_0^v v f_e dv = en_{oe} \cdot \sqrt{\frac{kT}{2\pi m_e}} \cdot [1 - \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2kT}\right)]. \quad (17)$$

Величина оставшегося тока

$$j_e(\geq v) = en_{oe} \int_0^\infty v f_e dv = en_{oe} \cdot \sqrt{\frac{kT}{2\pi m_e}} \cdot \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2kT}\right). \quad (18)$$

Выражения (14-15) и (17-18) показывают зависимости концентрации и тока электронов от их энергии $W = (m_e v^2/2)$. В свою очередь, формулы (11-12) дают зависимость энергии от координаты x (длина пробега). Выразим соотношения (14-15) и (17-18) через координату x

$$n_e(\leq v) = n_e^< = n_{oe} [1 - \exp\left(-\frac{\xi \cdot \rho^p \cdot x_p}{W_T}\right)], \quad (19)$$

$$n_e(\geq v) = n_e^> = n_{oe} \cdot \exp\left(-\frac{\xi \cdot \rho^p \cdot x_p}{W_T}\right), \quad (20)$$

$$j_e(\leq v) = j_e^< = j_{oe} [1 - \exp\left(-\frac{\xi \cdot \rho^p \cdot x_p}{W_T}\right)], \quad (21)$$

$$j_e(\geq v) = j_e^> = j_{oe} \cdot \exp\left(-\frac{\xi \cdot \rho^p \cdot x_p}{W_T}\right), \quad (22)$$

В выражениях (19-22) $W_T = kT$ – тепловая энергия электронов, выраженная в keV. Эти соотношения показывают как изменение концентрации и тока на отрезке $[0, x]$, так и их текущие значения в зависимости от координаты x , т.е. глубины проникновения в диэлектрик.

Уравнение электрического поля. Получим уравнение, описывающее изменение электрического поля в объёме диэлектрика, на основе уравнения Максвелла (система СИ)

$$\text{rot} \vec{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j},$$

где \vec{H}, \vec{E} – напряженность магнитного и электрического полей. При выбранной плоскопараллельной геометрии диэлектрика (рис.1), электрическое поле \vec{E} и ток \vec{j} зависят только от координаты x и времени t . Введем новую переменную j_{oe} , представляющую собой общий ток, и обозначим $rot\vec{H} = \vec{j}_{oe}$. Уравнение Максвелла будет иметь вид (модель полного тока)

$$\vec{j}_{oe} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}. \quad (23)$$

Ток j в (23) складывается из тока проводимости, для которого справедливо $\vec{j}_c = \sigma \cdot \vec{E}$, где σ – проводимость вещества, являющейся в общем случае функцией координаты и времени, и тока высокоэнергичных электронов $j_e(\geq v) = j_{e>}$, определяемого по формуле (22). Переходя к полной производной и учитывая, что для $j_e^<$ справедливо (21), получаем в скалярной форме

$$\epsilon\epsilon_0 \frac{dE}{dt} + \sigma \cdot E = j_e^<, \quad (24)$$

Полагая, что инжекция электронов в объём диэлектрика происходит мгновенно, разрешим это уравнение относительно $\vec{E}(x,t)$. Получим

$$E(x,t) = E_o(x) \cdot \exp\left[-\frac{\sigma(x)}{\epsilon\epsilon_0}t\right] + \frac{j_e^<(x)}{\sigma(x)} \{1 - \exp\left[-\frac{\sigma(x)}{\epsilon\epsilon_0}t\right]\}. \quad (25)$$

При $t \rightarrow \infty$ решение (25) стремится к стационарному режиму, определяемому только током и проводимостью в произвольной точке x

$$E(x) = \frac{j_e^<(x)}{\sigma(x)}. \quad (26)$$

Следовательно, независимо от начального распределения электрического поля в объёме диэлектрика $E_o(x)$, оно, в конечном счёте, будет определяться параметрами внешнего (первичного) тока электронов плазмы j_{oe} , зависимостью $W(x)$ и проводимостью вещества σ , являющейся также функцией координаты x . Для того чтобы определить профиль распределения электрического поля в объёме диэлектрика, необходимо найти в явном виде зависимость проводимости от координаты x .

Графическая аппроксимация проводимости диэлектрика. Необходимость учета зависимости проводимости от глубины связана с тем, что потерявшие энергию электроны становятся электронами проводимости и увеличивают собственную (темновую) проводимость среды. В связи с этим вводят понятие так называемой радиационной проводимости вещества, имеющей место при его облучении потоком заряженных частиц. Для нахождения аналитической зависимости между σ и глубиной проникновения электронов воспользуемся следующим.

1. Экспериментально установлено, что в приповерхностном слое ($x \sim 0$), где эффект от взаимодействия потока заряженных частиц с диэлектриком максимален, величина проводимости увеличивается по сравнению с темновой проводимостью на 1.5-2 порядка.

2. На основе сложных модельных построений, учитывающих молекулярную структуру вещества, решается стационарное уравнение диффузии Фоккера-Планка и определяется рассеяние и диффузия электронов. В конечном счете, рассчитывается профиль проводимости $\sigma(x)$. На рис.3 представлена рассчитанная зависимость для каптона ($C_{22}H_{10}N_2O_4$), диэлектрического материала широко применяемого в космической

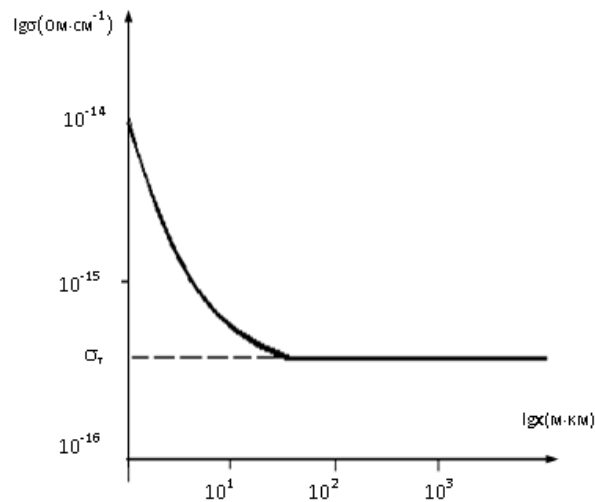


Рис. 3. Расчетная проводимость каптона

технике [IEEE Trans. on Elect. Insul, 1983]. Учитывая логарифмический масштаб, представим искомую зависимость $\sigma(x)$ в виде

$$\lg \sigma = \lg \sigma_T + \Delta \cdot \exp(-x/10x_o), \quad (27)$$

где $\Delta = \lg \sigma / \sigma_T$ при $x = 0$, σ_T – темновое значение проводимости. Величина Δ показывает, на сколько порядков радиационная проводимость отличается от темновой при $x = 0$ и подбирается в каждом конкретном случае до максимального совпадения опыта с расчетом ($1.5 \leq \sigma \leq 2$). Физический смысл x_o объяснен выше. Разрешив (27) относительно σ , получаем зависимость проводимости от глубины проникновения электронов

$$\sigma(x) = \sigma_T \cdot 10^{\Delta \exp(-x/10x_o)}. \quad (28)$$

Рассмотрим решение (25) для (x, t) . Из этого решения видно, что при изменении параметров внешнего потока плазмы в момент $t = 0$, перераспределение поля в объеме диэлектрика будет определяться постоянной времени $\tau(x) = (\sigma(x)/\epsilon\epsilon_o)^{-1}$. В поверхностных слоях ($x \sim 0$) проводимость будет значительно больше, чем при $x \sim L$ (L – толщина диэлектрика), т.к. уже при $x \sim 10x_o$ проводимость $\sigma(x) \sim \sigma_T$. Перераспределение поля при изменении внешних условий может привести к формированию электрического разряда в объеме диэлектрика, хотя внешние условия не соответствуют зарядению до больших отрицательных потенциалов.

Учет кулоновского взаимодействия первичного потока электронов с отрицательно заряженным диэлектриком. В полученных предыдущих соотношениях, в которых под воздействием заданного внешнего потока электронов электрическое поле описывается выражением (25) или (26), не учитывается кулоновское взаимодействие с заряженным диэлектриком. Однако заряженный диэлектрик за счет кулоновских сил, оказывает влияние на первичный (невозмущенный) ток электронов j_{eo} . Пусть потенциал поверхности диэлектрика ϕ_o . Тогда, чтобы достичь поверхности диэлектрика, электроны должны совершить работу $e\phi_o$. Так как полагаем, что электроны имеют максвелловское распределение, то в первичном потоке существуют

электроны, энергия которых меньше величины $e\varphi_0$. Поэтому они, совершая работу в электрическом поле заряженного диэлектрика, тормозятся и, не достигнув поверхности ($x = 0$), отталкиваются назад. Другая часть электронов, для которых начальная энергия $W > e\varphi_0$, достигает поверхности диэлектрика, имея энергию $\varphi^* = W - e\varphi_0$. Следовательно, учет кулоновского взаимодействия электронов первичного потока с отрицательно заряженным диэлектриком, с одной стороны, приводит к уменьшению начальной концентрации электронов за счет отталкивания низкоэнергичной части первичного потока; с другой – к торможению высокоэнергичной части и к уменьшению энергии W конкретного электрона. В результате уменьшается длина пробега электрона в диэлектрике. Получим выражения для концентрации и тока возмущенного потока, которые учитывали бы отмеченные обстоятельства.

Учет кулоновского взаимодействия приводит к некоторому «усечению» максвелловской функции распределения для частиц с энергией $W \leq e\varphi_0$. Чтобы это учесть, необходимо моменты функции распределения вычислить интегрированием по скорости не от 0 до ∞ , а от $v = \sqrt{2e\varphi_0/m_e}$ до ∞ . В этом случае для концентрации частиц, скорости которых лежат в интервале от v_0 до $v(v_0 \leq v)$, получаем для плоскопараллельной геометрии диэлектрика

$$n_e^<(v_0 \leq v) = n_{eo} \int_{v_0}^v f_e dv = n_{eo} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \left\{1 - \exp\left[-\frac{m}{2kT}(v^2 - v_0^2)\right]\right\},$$

где индекс «<» при концентрации n_e означает долю электронов, имеющих энергию меньшую или равную текущему значению $(mv^2/2)$, но большую $e\varphi_0$. Так как $(mv^2/2e) = \varphi_0$, а $kT/e = \varphi_T$ и $(mv^2/2e) = \varphi^*$ – тепловая и текущая энергии электронов, то последнее выражение можно переписать

$$n_e^< = n_{eo} \exp(-\varphi_0/\varphi_T) \left\{1 - \exp[-(\varphi^* - \varphi_0)/\varphi_T]\right\}. \tag{29}$$

Формула (29) показывает, что учет кулоновского взаимодействия приводит к уменьшению концентрации электронов, которые непосредственно взаимодействуют с диэлектриком, и определяется выражением

$$n'_{eo} = n_{eo} \exp(-\varphi_0/\varphi_T).$$

Из (29) следует, что если энергия частиц равняется $e\varphi_0$, то число частиц, участвующих во взаимодействии с диэлектриком, равняется нулю. Кроме того, формула (29) показывает, что энергия, которую имеют электроны до взаимодействия с полем заряженного диэлектрика, уменьшается и становится равной $\Phi = \varphi^* - \varphi_0$. Следовательно, длина пробега электронов в объеме заряженного диэлектрика с заданной энергией тоже уменьшится. Получим выражение для возмущенного тока, вычислив соответствующий момент в пределах от φ_0 до φ^*

$$j_e^< = n_{eo} \int_{v_0}^v v f_e dv = j'_e \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{\Phi}{\varphi_T}\right)\right]\right\}, \tag{30}$$

где $j'_{eo} = j_{eo} \exp(-\varphi_0/\varphi_T)$, $\Phi = \varphi^* - \varphi_0$.

В свою очередь, $j'_{eo} = j_e^< + j_e^>$, где $j_e^<$ – ток электронов, имеющих энергию ниже или равную φ^* , но большую φ_0 и затормозившихся на интервале $[0, x^*]$; $j_e^>$ – ток электронов, имеющих энергию выше φ^* и стремящуюся к ∞ . Эти электроны тормозятся на расстояниях $x > x^*$. Аналогично записывается и возмущенная концентрация:

$n'_{eo} = n_e^< + n_e^>$, где смысл $n_e^>$ очевиден. Выпишем значения концентрации $n_e^<$ и $n_e^>$, тока $j_e^<$ и $j_e^>$

$$\begin{aligned} n_e^< &= n'_{eo}[1 - \exp(-\frac{\Phi}{\varphi_T})] = n'_{eo}[1 - \exp(-\frac{\xi\rho^p x^p}{\varphi_T})], \\ n_e^> &= n'_{eo}\exp(-\frac{\Phi}{\varphi_T}) = n'_{eo}\exp(-\frac{\xi\rho^p x^p}{\varphi_T}), \\ j_e^< &= j'_{eo}[1 - \exp(-\frac{\Phi}{\varphi_T})] = j'_{eo}[1 - \exp(-\frac{\xi\rho^p x^p}{\varphi_T})], \\ j_e^> &= j'_{eo}\exp(-\frac{\Phi}{\varphi_T}) = j'_{eo}\exp(-\frac{\xi\rho^p x^p}{\varphi_T}), \end{aligned} \quad (31)$$

где $n'_e = n_e \exp(-\varphi_o/\varphi_T)$, $j'_e = j_e \exp(-\varphi_o/\varphi_T)$. В системе (31) учтена зависимость между энергией и длиной пробега в диэлектрике, аппроксимированная выражением $W = \xi\rho^p x^p$ (см. (13)). Сохранение старой зависимости между энергией и длиной пробега электрона в диэлектрике определяется тем, что энергия частиц возмущенного тока лежит в интервале $[e\varphi_o, \infty]$. Поэтому найдутся частицы, для которых $\Phi = W$, несмотря на то, что невозмущенная энергия $(mv^2/2)$ больше W на величину $e\varphi_o$. Однако число таких частиц уменьшится и это учитывается возмущенными значениями $j'_{eo} < j_{eo}$ и $n'_{eo} < n_{eo}$.

Определение токов проводимости j_c в объёме диэлектрика. Расчет глубины x_o . Поступающий в диэлектрик ток первичных электронов $j_e^>$ создаёт в единице объёма и в единицу времени объёмный заряд $Q(x)$, для которого справедливо выражение $Q(x) = \text{div}_x j_e^>$ или с учётом значения тока $j_e^>$ (см. (31))

$$Q(x) = \frac{\partial j_e^>}{\partial x} = -j_e^> \cdot \frac{\xi\rho^p x^{p-1}}{\varphi_T}. \quad (32)$$

С учётом сказанного для плотности объёмного заряда q , образующегося в единице объёма, уравнение неразрывности в общем виде может быть записано

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\text{div} j_\Sigma,$$

где $j_\Sigma = j_e^> + j_c$. С учётом (32) это выражение можно переписать

$$\frac{\partial q}{\partial t} + Q(x) = -\text{div}_x j_c = -\frac{dj_c}{dx}. \quad (33)$$

Рассматриваем стационарный (установившийся) процесс электризации, поэтому

$$Q(x) = -\frac{dj_c}{dx}. \quad (34)$$

Проинтегрируем (34) в пределах от 0 до x_o

$$\int_0^{x_o} Q(x) dx = -j_c(0) + j_c(x_o)$$

или с учётом (32)

$$j_e^>(x_o) - j_e(0) = j_c(0) \quad (35)$$

при $x = x_o$ электрическое поле $E(x_o) = 0$ и ток проводимости $j_c(x_o) = 0$. Подставив значение тока $j_e^>$ (см. (35)) в соответствующих пределах, получим значение тока проводимости на поверхности диэлектрика

$$j_c = j_{eo}[1 - \exp(-\frac{\xi\rho^p x_o^p}{\varphi_T})] = -j_e^<(x_o) \quad (36)$$

Следовательно, ток проводимости на поверхности диэлектрика S_1 определяется током затормозившихся на отрезке $[0, x_o]$ электронов. В свою очередь, ток проводимости $j_c(0)$ определяется токами вторичной эмиссии, поэтому можем записать

$$j_c(0) = j_{se} + j_{ee} = j'_{eo}(\eta + \delta), \quad (37)$$

где $j'_{eo} = j_{eo} \exp(-\varphi_o/\varphi_T)$ Скомбинировав выражение (36) и (37), запишем

$$1 - \exp(-\frac{\xi \rho^p x_o^p}{\varphi_T}) = \eta + \delta = \eta_\Sigma$$

где η_Σ – суммарный коэффициент вторичной эмиссии. Разрешив это выражение относительно x_o , получим

$$x_o = \frac{1}{\rho} \left[-\frac{\varphi_T}{\xi} \ln(1 - \eta_\Sigma) \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (38)$$

Так как $\eta_\Sigma < 1$ и $\ln(1 - \eta_\Sigma) < 0$, то выражение в квадратных скобках положительно.

Из (38) следует, что глубина, на которой ток проводимости и электрическое поле обращаются в нуль, является функцией температуры потока, а так же материала диэлектрика, что учитывается параметрами ρ, ξ, η_Σ .

Выражение для x_o было получено на основе интегрирования (34) в пределах от 0 до x_o . При этом терялась информация относительно явной зависимости j_c от координаты x . Для определения этой зависимости необходимо взять неопределенный интеграл от выражения (34) с учётом явного вида тока j'_e . В результате получим

$$-j_c(x) = j'_{eo} \cdot \exp(-\frac{\xi \rho^p x^p}{\varphi_T}) + const.$$

Постоянная интегрирования определяется из условия $j_c(x_o) = 0$. В результате получаем

$$j_c(x) = j'_{eo} \cdot \exp(-\frac{\xi \rho^p x_o^p}{\varphi_T}) \cdot \left\{ 1 - \exp[-\frac{\xi \rho^p (x^p - x_o^p)}{\varphi_T}] \right\}. \quad (39)$$

Выражение (39) даёт значение тока проводимости в объёме диэлектрика и в приповерхностной области ($0 \leq x \leq x_o$), и для области с $x > x_o$. При $x = 0$ из (39) следует выражение (36); при $x = x_o$ получаем значение тока $j_c(x_o) = 0$; при $x \rightarrow \infty$ выражение (39) сводится к

$$j_c(\infty) = j_{eo} \cdot \exp(-\frac{\varphi_o}{\varphi_T}) \cdot \exp(-\frac{\xi \rho^p x_o^p}{\varphi_T}). \quad (40)$$

Эта формула показывает, что при $x = \infty$ ток проводимости равняется значению тока внешних электронов, которые участвуют во взаимодействии с поверхностью диэлектрика ($x = 0$). Этот ток меньше тока первичного (невозмущенного) потока электронов, во-первых, за счет кулоновского отталкивания части электронов с энергией меньшей $e\varphi_o$. Во-вторых, другая часть электронов, энергия которых больше $e\varphi_o$, участвует в образовании токов вторичных электронов и приводит к дальнейшему уменьшению тока первичных электронов, взаимодействующих с диэлектриком. Действие кулоновского отталкивания описывается (40) множителем $j_{eo} \cdot \exp(-\varphi_o/\varphi_T)$, а действие токов вторичной эмиссии $\exp(-\xi \rho^p x_o^p/\varphi_T)$.

Получим в явном виде соотношения, позволяющие рассчитать распределение электрического поля и потенциала в объёме диэлектрика. Выше было получено

общее выражение (26), определяющее зависимость $E(x)$ в стационарном режиме ($t \rightarrow \infty$), как функцию тока проводимости $j_c(x)$, для которого справедливо (39), и радиационной проводимости $\sigma(x)$, которую, в свою очередь, можно аппроксимировать выражением (28). В результате получаем

$$E(x) = \frac{j_{eo}}{\sigma_T} \exp\left(-\frac{\varphi_o}{\varphi_T}\right) \exp\left(-\frac{\xi \rho^p x_o^p}{\varphi_T}\right) \left\{1 - \exp\left[-\frac{\xi \rho^p (x^p - x_o^p)}{\varphi_T}\right]\right\} \times 10^{\Delta \exp(-x/10x_o)}. \quad (41)$$

Связь между электрическим полем и потенциалом даётся соотношением $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$, поэтому в нашем случае для разности потенциалов между плоскостями S_1 и S_2 имеем

$$\Delta\varphi = \varphi_{S_2} - \varphi_{S_1} = A \int_L^0 \left\{1 - \exp\left[-\frac{\xi \rho^p (x^p - x_o^p)}{\varphi_T}\right]\right\} \cdot 10^{\Delta \exp(-x/10x_o)} dx, \quad (42)$$

где $A = \exp\left(-\frac{\varphi_o}{\varphi_T}\right) \cdot \left[\frac{j_{eo}}{\sigma_T} \cdot \exp\left(-\frac{\xi \rho^p x_o^p}{\varphi_T}\right)\right] = \exp\left(-\frac{\varphi_o}{\varphi_T}\right) \cdot A'$.

Интеграл в (42) вычисляется численно. Значения потенциалов на поверхностях S_2 и S_1 можно определить, если задаться одним из них. Из рис.1. видно, что поверхность S_2 имеет гальваническую связь с корпусом и, следовательно, потенциал φ_{S_2} равен потенциалу корпуса φ_k . Положив $\varphi_k = 0$, получаем для $\varphi_{S_2} = 0$. Определив граничное условие, по формуле (41) вычисляем потенциал на поверхности S_1 , т.е. φ_o . Следовательно,

$$\varphi_o = \exp\left(-\frac{\varphi_o}{\varphi_T}\right) \int_L^0 E' dx = \exp\left(-\frac{\varphi_o}{\varphi_T}\right) \mathfrak{R}, \quad (43)$$

где E' , согласно (41,42), определяется выражением

$$E' = A' \cdot \left\{1 - \exp\left[-\frac{\xi \rho^p (x^p - x_o^p)}{\varphi_T}\right]\right\} 10^{\Delta \exp(-x/10x_o)}. \quad (44)$$

Из самых общих физических представлений, а так же из анализа выражения (42), следует, что значение потенциала зависит от значения тока возмущенных электронов. В свою очередь, этот ток зависит от величины потенциала φ_o . Следовательно, возникает нелинейность: потенциал зависит от тока, ток – от потенциала. Именно эта нелинейность определяет возникновение трансцендентного уравнения относительно потенциала φ_o , которое можно решать итеративным методом. Условием сходимости уравнения при итерации является отрицательное значение производной по φ_o от правой части. После дифференцирования получаем

$$-\frac{1}{\varphi_T} \exp\left(-\frac{\varphi_o}{\varphi_T}\right) \cdot \mathfrak{R} < 0.$$

Следовательно, уравнение (44) решается итеративным методом. В заключение отметим, что сложная система дифференциальных уравнений РФВ в данной модели свелась, в конечном счёте, к двум алгебраическим уравнениям относительно электрического поля (25) и тока проводимости (39), в которых значения x_o и $\sigma(x)$, входящие в эти формулы, определяются по формулам (38) и (28).

Алгоритм вычислений распределения электрического поля и потенциала. Примеры расчета их распределений в объеме диэлектриков

Качественный анализ выражения (44) показывает, что характер распределения напряженности электрического поля $E'(x)$, как функции x , можно представить кривой, изображенной на рис.4. Действительно, при $x = 0$ для $E'(0)$ получаем

$$E'(0) = A' \cdot [1 - \exp(-\frac{\xi \rho^p x_0^p}{\varphi_T})] \cdot 10^{-\Delta} < 0.$$

Отрицательное значение $E'(0)$ обусловлено тем, что экспонента в квадратных скобках больше единицы. При $x = x_0$ напряженность электрического поля равна нулю. При $x \rightarrow \infty$ значение поля стремится к выражению $E'(\infty) \rightarrow A'$. Собственное значение напряженности $E(x)$ находится умножением $E'(x)$ на $\exp(-\varphi_0/\varphi_T)$.

Для упрощения построения алгоритма расчета $E(x)$ и $\varphi(x)$ воспользуемся качественной зависимостью распределения напряженности электрического поля, представленной на рис.4. Несмотря на то, что напряжённость поля рассчитать, на первый взгляд, проще, так как не требуется численного интегрирования, однако значения $E(x)$ зависят от потенциала φ_0 . Поэтому, в первую очередь, необходимо определить поверхностный потенциал φ_0 , как функцию параметров невозмущенного потока электронов.

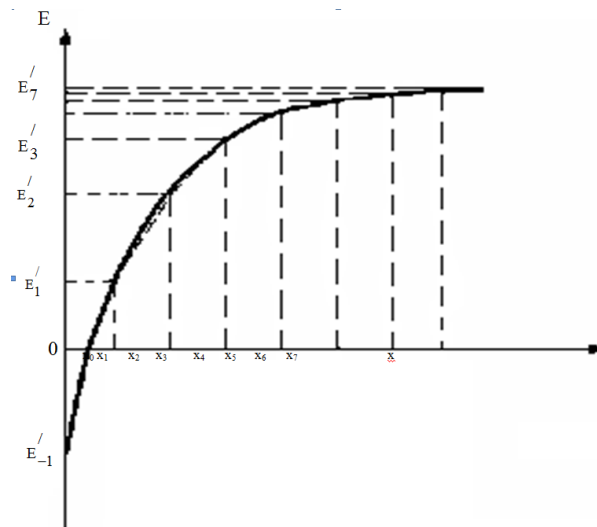


Рис. 4. Качественный характер распределения $E(x)$ в диэлектрике

Из рис.4 видно, каким способом вычисляется интеграл \mathfrak{R} (см. (43)). Весь интервал значений от 0 до L разбивается на N интервалов. Число интервалов определяется точностью вычислений. Интеграл \mathfrak{R} вычисляется методом трапеций. Следовательно, потенциал φ_i будет равен сумме площадей трапеций, для которых основаниями являются значения E_i и E_{i+1} , а высотой – длина соответствующего интервала, т.е. $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. На основе сказанного можно записать в общем виде

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2} \sum_{i=n}^m (E_i + E_{i+1}) \cdot \Delta x_i \tag{45}$$

Уравнение для вычисления φ_i получается домножением \mathfrak{X} на $\exp(-\varphi_o/\varphi_T)$

$$\varphi_o = \exp(-\varphi_o/\varphi_T) \cdot \sum_{i=n}^m (E_i + E_{i+1}) \cdot x_i. \quad (46)$$

Смысл итеративного решения уравнения (46) заключается в том, что задается какое-то разумное начальное значение φ_{oo} и подставляется в правую часть. Вычисляется первое значение потенциала φ_o , т.е. φ_{o1} . Затем подставляется в правую часть (46) и вычисляется значение φ_{o2} . Следовательно, общий вид итеративного решения уравнения для потенциала можно представить

$$\varphi_{oj} = \frac{1}{2} \exp(-\varphi_{o(j-1)}/\varphi_T) \cdot \sum_{i=n}^m (E_i + E_{i+1}) \cdot \Delta x_i. \quad (47)$$

Итерация останавливается, когда $\Delta\varphi_j = \varphi_{oj} - \varphi_{o(j-1)}$ удовлетворяет заданной точности. Определив с заданной точностью, можно вычислить значения электрического поля как функцию x_i

$$E(x_i) = \exp(-\varphi_o/\varphi_T) \cdot E'(x_i). \quad (48)$$

Формулы (38), (42), (43), (46) и (48) позволяют рассчитать при заданных параметрах магнитосферной плазмы профили распределения напряженности электрического поля и потенциала в объеме конкретного диэлектрика [16].

Приведем в качестве примера расчет профилей распределений $E(x)$ и $\varphi(x)$ в кварцевом стекле и пленке ПЭТФ (лавсан). Кварцевые стёкла используются в качестве защитных покрытий на солнечных батареях, а материал ПЭТФ – при изготовлении ЭВТИ (экрановакуумная теплоизоляция).

Пусть электроны магнитосферной плазмы имеют температуру в $\varphi_T = 50(\text{кэВ})$, а ток $j_{oe} = 10^{-9}(\text{А} \cdot \text{см}^{-2})$. Причем эта величина тока, поступающего на диэлектрик, лежит в области максимальных значений, которые соответствуют сильным магнитосферным возмущениям. Параметры диэлектриков:

- кварцевое стекло – плотность $\rho = 2.7(\text{г} \cdot \text{см}^{-3})$, теневая проводимость $\sigma_T = 4 \cdot 10^{-16}(\text{Ом} \cdot \text{см}^{-1})$;
- лавсан – плотность $\rho = 1,4(\text{г} \cdot \text{см}^{-3})$, теневая проводимость $\sigma_T = 4 \cdot 10^{-16}(\text{Ом} \cdot \text{см}^{-1})$.

Показатель степени поправочного коэффициента для радиационной проводимости $\sigma_T(28) \Delta = 2$, суммарный коэффициент вторичной эмиссии $\eta_\Sigma = 0.3$. Толщина кварцевого стекла и материала из лавсана $L = 120\mu\text{м} = 1.2 \cdot 10^{-2}$ см.

В Приложении Б представлены длины пробега $l = \rho\lambda\text{г} \cdot \text{см}^{-2}$ для кварца и лавсана в зависимости от их первичной энергии.

Согласно (45) распишем в явном виде значение \mathfrak{X} (см. рис. 4)

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} = & \frac{1}{2} [E'_{-1} \cdot x_o + E'_1 \cdot (x_1 - x_2) + (E'_1 + E'_2) \cdot (x_2 - x_1) + (E'_2 + E'_3) \cdot (x_3 - x_2) + \\ & + (E'_3 + E'_4) \cdot (x_4 - x_3) + (E'_4 + E'_5) \cdot (x_5 - x_4) + \\ & + (E'_5 + E'_6) \cdot (x_6 - x_5) + (E'_6 + E'_7) \cdot (x_7 - x_6)]. \end{aligned} \quad (49)$$

В (49) учтено, что $E_o = 0$ ($x = x_o$) и $x_{-1} = 0$. Вычисление значений x_o и $E'(x_i)$ выполнялись по формулам (38) и (44), соответственно. Для нахождения φ_o по формуле (43) производилась итерация. Начальное значение потенциала φ_o принималось

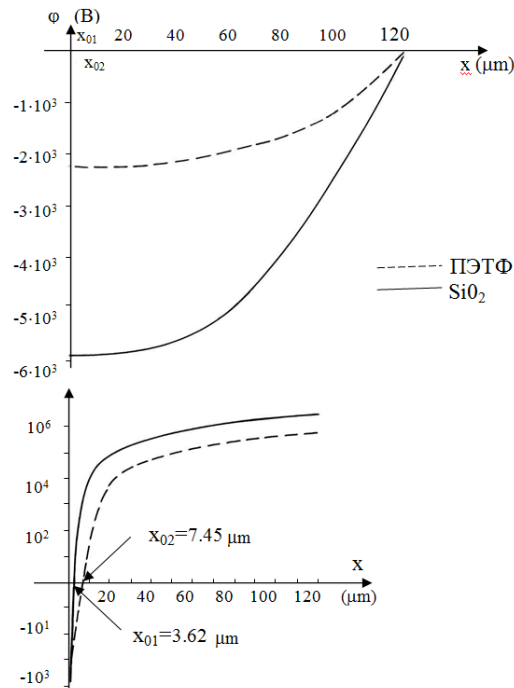


Рис. 5. Профили распределения $\varphi(x)$ и $E(x)$ в объеме

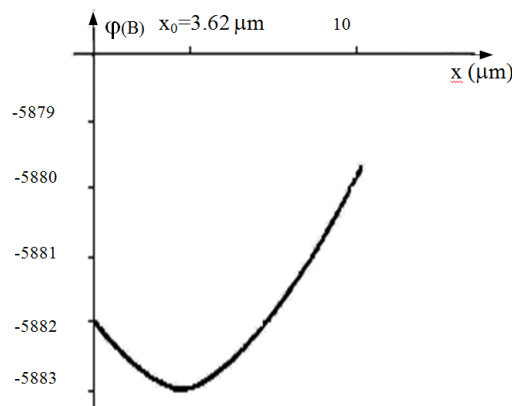


Рис. 6. Увеличенная область профиля распределения для $0 \leq x \leq 10 \mu\text{м}$

равным температуре потока магнитосферных электронов. Графики рассчитанных распределений $\varphi(x)$ и $E(x)$ представлены на рис. 5 и рис. 6.

Численные расчеты распределений показали, что при заданных параметрах потока электронов падение потенциала между поверхностями S_1 и S_2 для кварца достигает значений $\varphi = 5880\text{В}$, а для лавсана - $\varphi = 2120\text{В}$. При этом для SiO_2 максимальная рассчитанная напряженность поля $E = 1.123 \cdot 10^6 \text{ В/см}$, а для ПТЭФ - $E = 5.234 \cdot 10^5 \text{ В/см}$. Экспериментально установлено, что пробойные значения напряженности электрического поля для кварца лежат в пределах от $2 \cdot 10^5$ до $5 \cdot 10^2 \text{ В/см}$, поэтому в нем при заданных внешних параметрах должны возникнуть электрические разряды. У

лавсана рассчитанное максимальное значение E ниже критического. На рис. 6 представлена в крупном масштабе область $0 \leq x \leq 10_{\text{мк}}$ в объеме диэлектрика вблизи x_0 .

Необходимо отметить, что с ростом толщины диэлектрика значение разности потенциалов между наружной и внутренней сторонами диэлектрика будет возрастать и, например, при толщине кварцевых пластин ~ 10 мм, может достигать значений в десятки кВ.

Выводы

1. Предположение о максвелловском распределении потока заряженных частиц (9) позволяет получить аналитические выражения для концентрации (14), (15) и токов (17), (18). В свою очередь, знание зависимости длины пробега электронов от их скорости (энергии) (12) дает значение концентрации и тока как функции x (длины пробега) (19) - (22).

2. Сложная система дифференциальных уравнений РФВ в данной модели свелась, в конечном счёте, к двум алгебраическим уравнениям относительно электрического поля (25) и тока проводимости (39), в которых значения x_0 и $\sigma(x)$, входящие в эти формулы, определяются по формулам (38) и (28). Единственная сложность возникает из-за трансцендентного уравнения относительно потенциала φ_0 . Действительно, из анализа выражения (42), следует, что значение потенциала зависит от значения тока возмущенных электронов. В свою очередь, этот ток зависит от величины потенциала φ_0 . Следовательно, возникает нелинейность: потенциал зависит от тока, ток – от потенциала. Эта нелинейность определяет возникновение трансцендентного уравнения относительно потенциала φ_0 , которое легко решается численно итеративным методом. Кроме того, из физики взаимодействия потока заряженных частиц, описанной в работе, совершенно естественным путем получает свое объяснение формирование плоскости нулевого значения электрического поля с выводом выражения, определяющего численное значения глубины расположения этой плоскости x_0 .

ПРИЛОЖЕНИЕ А

На рис. 2 представлена полученная на основе экспериментальных данных зависимость между $l = \rho\lambda l$ и W , аппроксимированная ломаной линией. Получим аналитическое соотношение для двух участков этой линии.

Уравнение прямой можно представить в виде $y = \beta x + b$, где b – значение y при $x = 0$, $\beta = tg\gamma$, γ – угол наклона прямой к оси. Для получения зависимости y от необходимо знание и параметра b . Из рис. 2 видно, что для I участка ломаной линии $\beta_1 = tg\gamma_1 = (|y_3| - |y_2|)/x_2$ и $b_1 = -|y_3|$ (т.к. значения отрицательны, то они берутся по модулю). Для II участка ломаной линии: $\beta_2 = tg\gamma_2 = (|y_4| - |y_2|)/x_2$ и $b_2 = -|y_4|$. Значения фиксированных координат (см. рис. 2): $x_1 = 1; x_2 = 2.44; y_1 = 3.5; y_2 = -0.76; y_3 = -5.38; y_4 = -3.13$. Вычисления дают следующие значения: $\beta_1 = tg\gamma_1 = 1.89$ и $\beta_2 = tg\gamma_2 = 0.97$. Значения b_1 и b_2 – очевидны. Так как по осям координат значения l и W отложены в логарифмическом масштабе, т.е. $lgW = x$ и $lgl = y$, то полагая $b_{1,2} = lg\alpha_{1,2}$, представим уравнение прямой $y = \beta_{1,2} + b_{1,2}$ в виде $lgl = \beta_{1,2}lgW + lg\alpha_{1,2}$. Разрешая относительно l , получим искомую зависимость

$$l = \rho\lambda = \alpha_{1,2} \cdot W^{\beta_{1,2}}.$$

Эти две прямые линии имеют общую точку с координатами $x_2 = 2.44$ и $y_2 = -0.76$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Таблица

Энергия, МэВ	Длина пробега в SiO_2 (г·см ⁻²)	Длина пробега в ПЭТФ (г·см ⁻²)
$1 \cdot 10^{-2}$	$2.9555 \cdot 10^{-4}$	$2.3491 \cdot 10^{-4}$
$1.5 \cdot 10^{-2}$	$6.4287 \cdot 10^{-4}$	$5.1335 \cdot 10^{-4}$
$2 \cdot 10^{-2}$	$1.0896 \cdot 10^{-3}$	$8.7561 \cdot 10^{-4}$
$2.5 \cdot 10^{-2}$	$1.6284 \cdot 10^{-3}$	$1.3159 \cdot 10^{-3}$
$3 \cdot 10^{-2}$	$2.2537 \cdot 10^{-3}$	$1.8297 \cdot 10^{-3}$
$3.5 \cdot 10^{-2}$	$2.9607 \cdot 10^{-3}$	$2.4132 \cdot 10^{-3}$
$4 \cdot 10^{-2}$	$3.7453 \cdot 10^{-3}$	$3.0630 \cdot 10^{-3}$
$4 \cdot 10^{-2}$	$4.6038 \cdot 10^{-3}$	$3.7762 \cdot 10^{-3}$
$5 \cdot 10^{-2}$	$5.5331 \cdot 10^{-3}$	$4.5500 \cdot 10^{-3}$
$5.5 \cdot 10^{-2}$	$6.5301 \cdot 10^{-3}$	$5.3819 \cdot 10^{-3}$
$6 \cdot 10^{-2}$	$7.5921 \cdot 10^{-3}$	$6.2698 \cdot 10^{-3}$
$6.5 \cdot 10^{-2}$	$8.7164 \cdot 10^{-3}$	$7.2115 \cdot 10^{-3}$
$7 \cdot 10^{-2}$	$9.009 \cdot 10^{-3}$	$8.2050 \cdot 10^{-3}$
$7.5 \cdot 10^{-2}$	$1.1143 \cdot 10^{-2}$	$9.2484 \cdot 10^{-3}$
$8 \cdot 10^{-2}$	$1.2441 \cdot 10^{-2}$	$1.0340 \cdot 10^{-2}$
$8.5 \cdot 10^{-2}$	$1.3793 \cdot 10^{-2}$	$1.1478 \cdot 10^{-2}$
$9 \cdot 10^{-2}$	$1.5196 \cdot 10^{-2}$	$1.2661 \cdot 10^{-2}$
$9.5 \cdot 10^{-2}$	$1.6650 \cdot 10^{-2}$	$1.3888 \cdot 10^{-2}$
$1 \cdot 10^{-1}$	$1.8152 \cdot 10^{-2}$	$1.5156 \cdot 10^{-2}$
$1.5 \cdot 10^{-1}$	$3.5415 \cdot 10^{-2}$	$2.9793 \cdot 10^{-2}$
$2 \cdot 10^{-1}$	$5.6168 \cdot 10^{-2}$	$4.7476 \cdot 10^{-2}$

Список литературы

- [1] Акишин А.И., Новиков Л.С., *Физические процессы на поверхности искусственных спутников Земли*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1987. [Akishin A.I., Novikov L.S., *Fizicheskie processy na poverhnosti iskusstvoennyh sputnikov Zemli*, Izd-vo Mosk. un-ta, M., 1987].
- [2] Милеев В.Н., Новиков Л.С., “Физико-математическая модель электризации ИСЗ на геостационарной и высокоэллиптических орбитах”, *Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца*, **86** (1989), 64–98. [Mileev V.N., Novikov L.S., “Fiziko-matematicheskaya model’ elektrizacii ISZ na geostacionarnoj i vysokoellipticheskikh orbitah”, *Issledovaniya po geomagnetizmu, aeronomii i fizike Solnca*, **86** (1989), 64–98].
- [3] Боев С.Г., Ушаков В.Я., *Радиационное накопление заряда в твердых диэлектриках и методы его диагностики*, Энергоатомиздат, М., 1991, 240 с. [Boev S.G., Ushakov V.Ya., *Radiacionnoe nakoplenie zaryada v tverdyh dielektrikah i metody ego diagnostiki*, Energoatomizdat, M., 1991, 240 pp.]
- [4] Крупников К.К., Маклецов А.А., Милеев В.Н., Новиков Л.С., Синолиц В.В., “Современное состояние физико-математической модели электризации КА на высоких орбитах”, *Космонавтика и ракетостроение*, **1(30)** (2003), 116–122. [Krupnikov K.K., Maklecev A.A., Mileev V.N., Novikov L.S., Sinolic V.V., “Sovremennoe sostoyanie fiziko-matematicheskoy modeli elektrizacii KA na vysokikh orbitah”, *Kosmonavtika i raketostroenie.*, **1(30)** (2003), 116–122].

- [5] Тютнев А. П., Ванников А. В., Мингалеев Г. С., Саенко В. С., *Электрические явления при облучении полимеров*, Энергоиздат, М., 1985, 176 с. [Tyutnev A. P., Vannikov A. V., Mingaleev G. S., Saenko V. S., *Elektricheskie yavleniya pri obluchenii polimerov*, Energoizdat, M., 1985, 176 pp.]
- [6] Милеев В. Н., Новиков Л. С., *Физико-математическая модель электризации ИСЗ на геостационарной и высокоэллиптических орбитах*, **86**, Наука, М., 1989. [Mileev V. N., Novikov L. S., *SFiziko-matematicheskaya model' elektrizacii ISZ na geostacionarnoj i vysokoellipticheskikh orbitah*, **86**, Nauka, Moskva, 1989].
- [7] Тютнев А. П., Линецкий Б. Л., Никеров А. В., Саенко В. С., “Радиационно-импульсная электропроводность полимеров в сильных электрических полях”, *Химическая физика*, **34**:7 (2015), 58–61. [Tyutnev A. P., Lineckij B. L., Nikerov A. V., Saenko V. S., “Radiacionno-impul'snaya elektroprovodnost' polimerov v sil'nyh elektricheskikh polyah”, *Himicheskaya fizika*, **34**:7 (2015), 58–61].
- [8] Садовничий Д. Н. и др., “Накопление объемных зарядов при облучении эпоксидного компаунда электронами в вакууме”, *Высокомолекулярные соединения. Серия А*, **45**:2 (2003), 230–236. [Sadovnichij D. N. i dr., “Nakoplenie ob'emnyh zaryadov pri obluchenii epoksidnogo kompaunda elektronami v vakuume”, *Vysokomolekulyarnye soedineniya. Seriya A*, **45**:2 (2003), 230–236].
- [9] Соколов А. Б., Саенко В. С., “Моделирование изменений радиационной электропроводности полимеров внешней поверхности космических аппаратов при воздействии факторов космического пространства”, *Технологии электромагнитной совместимости*, 2008, № 2, 25. [Sokolov A. B., Saenko V. S., “Modelirovanie izmenenij radiacionnoj elektroprovodnosti polimerov vneshnej poverhnosti kosmicheskikh apparatov pri vozdeystvii faktorov kosmicheskogo prostranstva”, *Tekhnologii elektromagnitnoj sovmestimosti*, 2008, № 2, 25].
- [10] Тютнев А. П. и др., *Диэлектрические свойства полимеров в полях ионизирующих излучений*, Наука, М., 2005, 100 с. [Tyutnev A. P. i dr., *Dielektricheskie svojstva polimerov v polyah ioniziruyushchih izlucheniij*, Nauka, M., 2005, 100 pp.]
- [11] Ягушкин Н. И., Сергеев А. И., Гостищев Э. А., “Исследование радиационно-электрических процессов в диэлектриках при облучении электронами с энергией до 100 кэВ”, *Модель космоса*, КДУ, М., 2007, 343–360. [Yagushkin N. I., Sergeev A. I., Gostishchev E. A., “Issledovanie radiacionno-elektricheskikh processov v dielektrikah pri obluchenii elektronami s energiej do 100 keV Model' kosmosa”, KDU, M., 2007, 343–360 (in Russian)].
- [12] DeForest S. E., “Spacecraft charging at synchronous orbit”, *J. Geophys. Res.*, **77**:4 (1972), 651–659.
- [13] Langmuir I. B., *Gen. Elec. Rev.*, **27** (1924), 449.
- [14] “IEEE Trans. on Elect. Insul.”, *EI-18*, 19832, № 3, 354–365.
- [15] “Model' kosmosa.”, *Vozdeystvie kosmicheskoy sredy na materialy i oborudovanie kosmicheskikh apparatov*, 2007, 1144 pp.
- [16] Богданов В. В., Павлов А. В., *Программа для расчета электризации высокоомных диэлектриков*, Зарегистрировано в Отраслевом фонде алгоритмов и программ 25.08.08, № гос. регистрации 50200801812. Свидетельство об отраслевой регистрации разработки (программный продукт) №11328. [Bogdanov V. V., Pavlov A. V., *Programma dlya rascheta ehlektrizacii vysokoornnyh diehlektrikov*, Zaregistrirvano v Otrasleyom fonde algoritmov i programov 25.08.08, № gos. registracii 50200801812. Svidetel'stvo ob otraslevoj registracii razrabotki (programmnyj produkt) №11328].

Для цитирования: Богданов В. В. Модель расчета объемной электризации высокоомных диэлектриков в условиях космического пространства // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 4(24). С. 66-89. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-66-89

For citation: Bogdanov V. V Model of calculation of volume electrization of high-resistance dielectrics in space, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018, **24**: 4, 66-89. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-66-89

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-66-89

MATHEMATICAL MODELLING

MSC 86A10, 86A15

MODEL OF CALCULATION OF VOLUME ELECTRIZATION OF HIGH-RESISTANCE DIELECTRICS IN SPACE

V. V. Bogdanov

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, 684034,
Paratunka, Mirnaya str., 7, Russia

E-mail: vbogd@ikir.ru

The paper is devoted to the construction of a model of volumetric electrization of high-resistance dielectrics used in space technology and interacting with aggressive factors of space. The assumption of the Maxwell distribution of the charged particles flux by energy makes it possible to obtain a simple model that makes it possible to calculate the distribution of the electric field and the potential in the dielectric volume taking into account the secondary emission currents and the surface potential value for a given external electron flow. The complexity arises because of the nonlinearity: the surface potential depends on the external current, and the current – on this potential. This nonlinearity determines the emergence of the transcendent equation with respect to the potential φ_0 , which is solved numerically by iterative method. From the physics of the interaction of a stream of charged particles, described in the paper, its explanation of the formation of the plane of the zero values of the electric field with the withdrawal of the expressions defining the numerical values of the depth location of this plane x_0 receives quite naturally

Key words: factors of space, electrization, high-resistance dielectrics, secondary emission currents and conductivity, the dark conductivity, the path length

© Bogdanov V. V, 2018