Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 4(24). C. 61-65. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-61-65

УДК 517.927

О ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ С РАЗЛИЧНЫМИ НАЧАЛАМИ

Л. М. Энеева

Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, 360000, Кабардино-Балкарская республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

E-mail: eneeva72@list.ru

В работе исследован вопрос разрешимости задачи Неймана для уравнения дробного порядка с различными началами. Найдена оценка для первого ненулевого собственного значения.

Ключевые слова: дробная производная, задача Неймана, собственное значение

MSC 18A32

ON NEUMANN PROBLEM FOR EQUATION WITH FRACTIONAL DERIVATIVES WITH DIFFERENT STARTING POINTS

L. M. Eneeva

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89 A, Russia

E-mail: eneeva72@list.ru

In the paper, we investigate solvability of the Neumann problem for an equation with fractional derivatives with different starting points. An estimate for the first nonzero eigenvalue is found.

Key words: fractional derivative, Neumann problem, eigenvalue

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\alpha}\partial_{1x}^{\alpha}u(x)-\lambda u(x)=0, \tag{1}$$

в интервале $]0,1[$. Здесь λ — спектральный параметр; D_{0x}^{α} и ∂_{1x}^{α} — дробные производные порядка α в смысле Римана-Лиувилля с началом в точке $x=0$, и в смысле Капуто с началом в точке $x=1$, соответственно, [1]:

$$D_{0x}^{\alpha}u(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x u(t)(x-t)^{-\alpha}dt,$$

и

$$\partial_{1x}^{\alpha}u(x)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_x^1 (t-x)^{-\alpha}\frac{d}{dt}u'(t)dt.$$

Дифференциальные уравнения с операторами дробного интегрирования и дифференцирования, как правило, лежат в основе математических моделей физических и геофизических процессов в неоднородных средах [1]. Уравнение (1) представляет собой модельное уравнение движения во фрактальной среде, возникающее при использовании понятия эффективной скорости [2], [3].

Ранее, в работах [4], [5] показано, что задача Дирихле для уравнения (1) имеет бесконечное число собственных значений (вещественных и положительных) и собственных функций, образующих полную ортогональную систему в $L_2(0,1)$, и найдена оценка первого собственного значения.

Укажем также работы [6] – [9], в которых рассматривались различные вопросы теории дифференциальных уравнений, содержащих композицию операторов дробного дифференцирования с различными началами.

В данной работе мы исследуем следующую задачу на собственные значения: *найти решение уравнения* (1)*, удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{x\to 0}D_{0x}^{\alpha-1}\partial_{1x}^{\alpha}u(x)=0, \qquad \lim_{x\to 1}D_{0x}^{\alpha-1}\partial_{1x}^{\alpha}u(x)=0. \tag{2}$$

Рассматриваемая задача представляет собой аналог задачи Неймана (и переходит в нее при $\alpha=1$). Здесь мы находим оценку для первого, неравного нулю, собственного значения задачи (1), (2).

Далее будем считать, что $\alpha\in\left]\frac{1}{2},1\right]$.

1. Пусть $u(x)$ — решение задачи (1), (2). Из (1), учитывая первое из условий (2), получаем, что

$$D_{0x}^{\alpha-1}\partial_{1x}^{\alpha}u(x)-\lambda\int_0^x u(t)\,dt=0.$$

Устремляя x к единице, принимая во внимание второе из условий (2), приходим к равенству

$$\lambda\int_0^1 u(t)\,dt=0.$$

Отсюда следует, что если $\lambda\neq 0$, то любое решение задачи (1), (2) необходимо удовлетворяет условию

$$\int_0^1 u(t)\,dt=0. \tag{3}$$

Далее рассмотрим отдельно случай $\lambda=0$ и случай $\lambda\neq 0$.

2. Если $\lambda = 0$, то с учетом (2), получаем

$$D_{0x}^{\alpha}\partial_{1x}^{\alpha}u(x) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$D_{0x}^{\alpha-1}\partial_{1x}^{\alpha}u(x) = -D_{0x}^{\alpha-1}D_{1x}^{\alpha-1}u'(x) = 0.$$

Последнее означает, что

$$u'(x) = 0.$$

Следовательно, задача (1), (2) при $\lambda = 0$ всегда имеет нетривиальное решение

$$u(x) \equiv const.$$

Других решений, как легко заметить, в этом случае нет.

3. Далее рассмотрим случай $\lambda \neq 0$. Так же, как и в работе [4], применяя к обеим частям уравнения (1) последовательно операторы $D_{0x}^{-\alpha}$ и $D_{1x}^{-\alpha}$ [1],

$$D_{0x}^{-\alpha}g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x g(t)(x-t)^{\alpha-1}dt,$$

$$D_{1x}^{-\alpha}g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^1 g(t)(t-x)^{\alpha-1}dt,$$

получим, что всякое решение уравнения (1), удовлетворяющее первому из условий (2), является решением интегрального уравнения

$$u(x) - \lambda\int_0^1 K(x,t)u(t)dt = u(1), \tag{4}$$

где

$$K(x,t) = \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_0^1 (s-t)_+^{\alpha-1}(s-x)_+^{\alpha-1}ds, \tag{5}$$

$$(z)_+^{\mu} = \begin{cases} z^{\mu}, & \text{если} \quad z > 0, \\ 0, & \text{если} \quad z \leq 0. \end{cases}$$

Интегрируя в пределах от нуля до единицы обе части уравнения (4), принимая во внимание (3), получим равенство

$$u(1) = -\lambda\int_0^1 h(t)u(t)dt, \tag{6}$$

где

$$h(t) = \int_0^1 K(x,t)\,dx. \tag{7}$$

Подставляя (6) в (4), получаем, что всякое решение задачи (1), (2) (при $\lambda = 0$) является решением интегрального уравнения

$$u(x) - \lambda\int_0^1 [K(x,t) - h(t)]\,u(t)\,dt = 0. \tag{8}$$

Далее функцию $u(x)$ будем искать в виде

$$u(x) = v(x) + \mu \int_0^1 h(t)v(t)\,dt, \tag{9}$$

где константа μ будет определена ниже. Подставляя (9) в (8) получаем

$$v(x) + \mu \int_0^1 h(t)v(t)\,dt - \lambda \int_0^1 [K(x,t) - h(t)] \left[v(t) + \mu \int_0^1 h(s)v(s)\,ds \right] dt = 0$$

или

$$v(x) + (\mu + \lambda - \lambda\mu\,[h(x) - h_0]) \int_0^1 h(t)v(t)\,dt - \lambda \int_0^1 K(x,t)v(t)\,dt = 0, \tag{10}$$

где

$$h_0 = \int_0^1 h(t)\,dt = \frac{1}{(2\alpha+1)\Gamma^2(\alpha+1)}. \tag{11}$$

При выводе (10) мы воспользовались тем, что $K(x,t) = K(t,x)$, и поэтому, в силу (7),

$$\int_0^1 K(x,t)\,dt = h(x).$$

Теперь, будем считать, что $\lambda \neq -1/h_0$ и выберем μ из условия

$$\lambda + \mu + \lambda\mu h_0 = 0,$$

то есть

$$\mu = -\frac{\lambda}{1+\lambda h_0}.$$

Уравнение (10) запишется в виде

$$v(x) + \frac{\lambda^2}{1+\lambda h_0} h(x) \int_0^1 h(t)v(t)\,dt - \lambda \int_0^1 K(x,t)v(t)\,dt = 0,$$

или

$$v(x) - \lambda \int_0^1 \left[K(x,t) - \frac{\lambda}{1+\lambda h_0} h(x)h(t) \right] v(t)\,dt = 0. \tag{12}$$

Проинтегрируем уравнение (12) в пределах от нуля до единицы:

$$\int_0^1 v(x)dx - \frac{\lambda}{1+\lambda h_0} \int_0^1 h(t)v(t)\,dt = 0.$$

Домножая последнее уравнение на λ и складывая с (12), получим

$$v(x) - \lambda \int_0^1 [K(x,t) - h(x)]\,v(t)\,dt = 0. \tag{13}$$

Пусть теперь $v(x)$ отличное от тождественного нуля решение уравнения (14). Обозначим через

$$M = \sup_{0<x<1} |v(x)|.$$

Очевидно, $M > 0$. Из (14), принимая во внимание (7), следует, что

$$M \leq 2|\lambda| M \sup_{0<x<1} h(x). \tag{14}$$

4. Таким образом, из вышеизложенного следует следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$. *Задача* (1), (2) *не имеет собственных значений на множестве*

$$0 < |\lambda| < \frac{\alpha\Gamma^2(\alpha)}{2h_1},$$

где

$$h_1 = \sup_{0<x<1} \int_x^1 (s-x)^{\alpha-1} s^{\alpha} ds.$$

Список литературы

[1] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, Москва, 2003, 272 с. [Nahushev A. M., *Drobnoe ischislenie i ego primenenie*, Fizmatlit, Moskva, 2003, 272 pp.]

[2] Rekhviashvili S.SH., "Formalizm Lagranzha s drobnoj proizvodnoj v zadachah mekhaniki", *Pis'ma v ZHTF*, **30**:2 (2004), 33–37.

[3] Рехвиашвили С.Ш., "К определению физического смысла дробного интегро-дифференцирования", *Нелинейный мир*, **5**:4 (2007), 194–197.].

[4] Энеева Л.М., "Краевая задача для дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными началами", *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, **3**:2(11) (2015), 39–44. [Eneeva L.M., "Kraevaya zadacha dlya differencial'nogo uravneniya s proizvodnymi drobnogo poryadka s razlichnymi nachalami", *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*, **3**:2(11) (2015), 39–44].

[5] Энеева Л.М., "Оценка первого собственного значения задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными началами", *Известия КБНЦ РАН*, 2017, № 1(75). [Eneeva L.M., "Ocenka pervogo sobstvennogo znacheniya zadachi Dirihle dlya obyknovennogo differencial'nogo uravneniya s proizvodnymi drobnogo poryadka s razlichnymi nachalami", *Izvestiya KBNC RAN*, 2017, № 1(75)].

[6] Stanković B., "An equation with left and right fractional derivatives", *Publications de l'institut mathématique. Nouvelle série,*, **80(94)** (2006), 259–272.

[7] Atanackovic T. M., Stankovic B., "On a differential equation with left and right fractional derivatives", *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **10**:2 (2007), 139–150.

[8] Torres C., "Existence of a solution for the fractional forced pendulum", *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, **13**:1 (2014), 125–142.

[9] Tokmagambetov N., Torebek B.T., "Fractional Analogue of Sturm-Liouville Operator", *Documenta Mathematica*, **21** (2016), 1503–1514.

Для цитирования: Энеева Л. М. О задаче Неймана для уравнения дробного порядка с различными началами // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 4(24). C. 61-65. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-61-65

For citation: Eneeva L. M. On Neumann problem for equation with fractional derivatives with different starting points, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018, **24**: 4, 61-65. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-61-65

Поступила в редакцию / Original article submitted: 17.07.2018