Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 4(24). C. 54-60. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-54-60

УДК 519.633

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Е. М. Шогенова

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000,
г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а

E-mail: shogenovae@inbox.ru

В данной работе методом энергетических неравенств получены априорные оценки первой и третьей краевых задач для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка, из которых следует единственность и непрерывная зависимость решения поставленных задач от входных данных.

Ключевые слова: дробная производная по Капуто, дробный интеграл Римана-Лиувилля, уравнение конвекции-диффузии, краевая задача, априорная оценка

© Шогенова Е. М., 2018

MSC 97M50

A PRIORI ESTIMATES OF THE SOLUTION BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE CONVECTION-DIFFUSION EQUATION OF FRACTIONAL ORDER

E. M. Shogenova

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, 360000,
Nalchik, Shortanova st., 89a, Russia

E-mail: shogenovae@inbox.ru

In this paper, the method of energy inequalities obtained a priori estimates of the first and third boundary value problems for the convection-diffusion equation of fractional order, from which follows the uniqueness and continuous dependence of the solution of the problems posed on the input data.

Key words: convection-diffusion equation, boundary-value problem, a priori estimate.

© Shogenova E. M., 2018

Введение

Дробное исчисление применяется при описании большого класса физических и химических процессов, протекающих в средах с фрактальной геометрией, а также при математическом моделировании экономических и социально-биологических процессов [1, с. 149]. В работе [2] дается физическая интерпретация дробной производной, на основе которой получены обобщенные уравнения переноса для медленных и быстрых стохастических процессов и решается первая начально - краевая задача. Важную роль во многих процессах тепломассообмена играет конвективно-диффузионный перенос. В качестве математической модели при его описании выступает уравнение диффузии с конвективным слагаемым. Введением в уравнение переноса оператора дробного интегро-дифференцирования, можно обобщить уравнение. Полученное уравнение дробного порядка будет более адекватно описывать физические процессы, протекающие в пористых средах

$$\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r(x)D_{ot}^{-\beta}\frac{\partial u}{\partial x}-q(x)u(x,t)+g(x,t),$$

где

$$\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t u_\tau(x,\tau)(t-\tau)^{-\alpha}d\tau$$

—дробная производная Капуто порядка α, $0<\alpha<1$,

$$D_{0t}^{-\beta}u=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^t u(x,\tau)(t-\tau)^{\beta-1}d\tau$$

— дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка β.

В работе, далее будем предполагать, что выполняется условие $0<\alpha+\beta\leq 1$.

Применяя к обеим частям данного уравнения оператор дробного дифференцирования ∂_{0t}^{β} получим

$$\partial_{0t}^{\alpha+\beta}u(x,t)=\partial_{0t}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r(x)\frac{\partial u}{\partial x}-q(x)\partial_{0t}^{\beta}u(x,t)+f(x,t). \tag{1}$$

В [3] получена априорная оценка для решения первой начально-краевой задачи уравнения диффузии дробного порядка и рассмотрены разностные методы решения поставленных задач. Априорная оценка решения первой краевой задачи для уравнения диффузии с операторами дробного интегро-дифференцирования получена в [4]. В работе [5] методом энергетических неравенств получены априорные оценки решения краевых задач первого и третьего рода для диффузионно-волнового уравнения. Априорные оценки решений краевых задач для уравнения диффузии дробного и распределенного порядков в дифференциальной и разностной трактовках получены в работах [6, 7].

В данной работе методом энергетических неравенств получены априорные оценки первой и третьей краевых задач для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка, из которых следует единственность и непрерывная зависимость решения поставленных задач от входных данных.

Априорная оценка решения первой краевой задачи

В прямоугольнике $\bar{Q}_T = \{(x,t) : 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$ рассмотрим первую краевую задачу:

$$\partial_{0t}^{\alpha+\beta} u = \partial_{0t}^{\beta} (k(x)u_x)_x + r(x)u_x - q(x)\partial_{0t}^{\beta} u + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad 0 \le x \le 1. \tag{4}$$

В дальнейшем будем предполагать существование решения $u(x,t) \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ задачи (2)–(4), где $C^{m,n}(\bar{Q}_T)$ – класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными порядка m по x и порядка n по t на $\bar{Q}_T$.

Лемма 1. *[5] Для любой абсолютно непрерывной на* $[0,T]$ *функции* $v(t)$ *справедливо неравенство*

$$v(t)\partial_{0t}^{\alpha} v(t) \ge \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha} v^2(t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Лемма 2. *[5] Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция* $y(t)$ *удовлетворяет для почти всех* t *из* $[0,T]$ *неравенству*

$$\partial_{0t}^{\alpha} y(t) \le c_1 y(t) + c_2(t), \quad 0 < \alpha < 1,$$

где $c_1 > 0$, $c_2(t)$ *– суммируемая на* $[0,T]$ *неотрицательная функция. Тогда*

$$y(t) \le y(0)E_{\alpha}(c_1 t^{\alpha}) + \Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}(c_1 t^{\alpha})D_{0t}^{-\alpha} c_2(t),$$

где

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \quad E_{\alpha,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \mu)}$$

— функции Миттаг-Леффлера.

Введем следующее обозначение

$$\|u\|_0^2 = \int_0^1 u^2(x,t)dx.$$

Теорема 1. *Если* $k(x), r(x) \in C^1(\bar{Q}_T)$, $q(x) \in C(\bar{Q}_T)$, $k(x) \ge c_1 > 0$, $r'(x) \ge 0$, $q(x) \ge 0$ *всюду на* $\bar{Q}_T$, *то для решения* $u(x,t)$ *задачи* (2)–(4) *справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2 \le M\left(D_{0t}^{-\alpha-\beta}\|f\|_0^2 + \|u_0\|_0^2 + \|u_x(x,0)\|_0^2\right), \tag{5}$$

где $M(T) > 0$*- известная постоянная.*

Доказательство. Умножим (2) на $u(x,t)$ и проинтегрируем по x от 0 до 1:

$$\int_0^1 u\partial_{0t}^{\alpha+\beta} u dx = \int_0^1 u\partial_{0t}^{\beta}(k(x)u_x)_x dx + \int_0^1 ur(x)u_x dx - \int_0^1 uq(x)\partial_{0t}^{\beta} u dx + \int_0^1 uf dx. \tag{6}$$

Преобразуем слагаемые, входящие в (6):

$$\int_0^1 ur(x)u_x dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 r'u^2 dx, \tag{7}$$

$$\int_0^1 uf dx \le \varepsilon \|u\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2, \qquad \varepsilon > 0, \tag{8}$$

в силу Леммы 1

$$\int_0^1 u\partial_{0t}^{\alpha+\beta} u dx \ge \int_0^1 \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha+\beta} u^2 dx = \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha+\beta}\|u\|_0^2, \tag{9}$$

$$-\int_0^1 u\partial_{0t}^{\beta}(k(x)u_x)_x dx = \int_0^1 u_x \partial_{0t}^{\beta}(k(x)u_x) dx \ge \frac{1}{2}\int_0^1 k(x)\partial_{0t}^{\beta} u_x^2 dx, \tag{10}$$

$$-\int_0^1 uq(x)\partial_{0t}^{\beta} u dx \ge \frac{1}{2}\int_0^1 q(x)\partial_{0t}^{\beta} u^2 dx. \tag{11}$$

Подставив полученные выражения в (6) и полагая $\varepsilon = 1/2$, получим

$$\partial_{0t}^{\alpha+\beta}\|u\|_0^2 + c_1\partial_{0t}^{\beta}\|u_x\|_0^2 \le \|u\|_0^2 + \|f\|_0^2. \tag{12}$$

Применив к обеим частям неравенства (12) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha-\beta}$ приходим к неравенству

$$\|u\|_0^2 + c_1 D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2 \le D_{0t}^{-\alpha-\beta}\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha-\beta}\|f\|_0^2 + \|u_0\|_0^2 + \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\|u_x(x,0)\|_0^2. \tag{13}$$

Оценив первое слагаемое в правой части

$$D_{0t}^{-\alpha-\beta}\|u\|_0^2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t \frac{\|u\|_0^2}{(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}} d\xi \le \frac{\Gamma(\alpha)T^{\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2, \tag{14}$$

приходим к неравенству

$$\|u\|_0^2 + c_1 D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2 \le \frac{T^{\beta}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)} D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha-\beta}\|f\|_0^2 + \|u_0\|_0^2 + \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\|u_x(x,0)\|_0^2. \tag{15}$$

Отбросив второе слагаемое в левой части неравенства (15) и воспользовавшись Леммой 2, где $y(t) = D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2$, $\partial_{0t}^{\alpha} y(t) = \|u\|_0^2$, $y(0) = 0$, получаем неравенство

$$D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2 \le M_1\left(D_{0t}^{-2\alpha-\beta}\|f\|_0^2 + \|u_0\|_0^2 + \|u_x(x,0)\|_0^2\right) \tag{16}$$

где $M_1(T) > 0$ - известная постоянная.

Так как для любой неотрицательной интегрируемой на $[0,T]$ функции $h(t)$ справедливо неравенство $D_{0t}^{-2\alpha}h(t) \le (t^{\alpha}\Gamma(\alpha)/\Gamma(2\alpha))D_{0t}^{-\alpha}h(t)$, то из неравенств (15) и (16) следует априорная оценка (5), из которой следует единственность и непрерывная зависимость решения задачи (2)-(4) от входных данных. □

Априорная оценка решения третьей краевой задачи

В задаче (2)-(4) заменим граничные условия (3) условиями

$$\begin{cases} k(0)\partial_{0t}^{\beta}u_x(0,t)=\beta_1\partial_{0t}^{\beta}u(0,t)-\mu_1(t), \\ -k(1)\partial_{0t}^{\beta}u_x(1,t)=\beta_2\partial_{0t}^{\beta}u(1,t)-\mu_2(t). \end{cases} \tag{17}$$

В прямоугольнике $\bar{Q}_T$ рассмотрим третью краевую задачу (2), (4), (17), где $k(x)\geq c_1>0$, $r'(x)\geq 0$, $q(x)\geq 0$, $|r(x)|\leq c_2$ всюду на $[0,1]$, $\mu_i(t)\in C[0,t]$, для всех $t\in[0,T], i=1,2$, $\beta_i\geq\beta_0>0$, $k(x),r(x)\in C^1[0,1]$, $q(x)\in C[0,1]$.

Теорема 2. *Если $k(x)\geq c_1>0$, $r'(x)\geq 0$, $q(x)\geq 0$, $|r(x)|\leq c_2$ всюду на $[0,1]$, $\mu_i(t)\in C[0,t]$, для всех $t\in[0,T], i=1,2$, $\beta_i\geq\beta_0>0$, $k(x),r(x)\in C^1[0,1]$, $q(x)\in C[0,1]$, то для решения $u(x,t)$ задачи (2), (4), (17) справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_0^2+D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2+D_{0t}^{-\alpha}(u^2(1,t)+u^2(0,t))\leq$$

$$\leq M\left[D_{0t}^{-\alpha-\beta}\mu_1^2(t)+D_{0t}^{-\alpha-\beta}\mu_2^2(t)+D_{0t}^{-\alpha-\beta}\|f\|_0^2+\|u_0\|_0^2+\|u_x(x,0)\|_0^2\right], \tag{18}$$

где $M(T)>0-$известная постоянная.

Доказательство. Как и в случае доказательства теоремы 1, умножая на $u(x,t)$ уравнение (2) и интегрируя по x от 0 до 1, получим уравнение (6). Преобразовывая слагаемые, входящие в (6) приходим к неравенствам (8), (9), (11) и

$$-\int_0^1 u\partial_{0t}^{\beta}(k(x)u_x)_x dx=-k(1)u(1,t)\partial_{0t}^{\beta}u_x(1,t)+k(0)u(0,t)\partial_{0t}^{\beta}u_x(0,t)+\int_0^1 u_x\partial_{0t}^{\beta}(k(x)u_x)dx, \tag{19}$$

$$\int_0^1 ur(x)u_x dx=\frac{1}{2}(r(1)u^2(1,t)-r(0)u^2(0,t))-\frac{1}{2}\int_0^1 r'u^2dx\geq -c_2\|u\|_{C[0,1]}^2. \tag{20}$$

Подставив полученные выражения в тождество (6) и с учетом условий (17), получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha+\beta}\|u\|_0^2+\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\beta}\|\sqrt{k}u_x\|_0^2\leq$$

$$\leq -\beta_2u(1,t)\partial_{0t}^{\beta}u(1,t)+\mu_2(t)u(1,t)-\beta_1u(0,t)\partial_{0t}^{\beta}u(0,t)+\mu_1(t)u(0,t)+ \tag{21}$$

$$+\varepsilon\|u\|_0^2+\frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2+c_2\|u\|_{C[0,1]}^2.$$

Используя неравенства

$$u(1,t)\partial_{0t}^{\beta}u(1,t)\geq\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\beta}u^2(1,t),$$

$$u(0,t)\partial_{0t}^{\beta}u(0,t)\geq\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\beta}u^2(0,t),$$

$$u(1,t)\mu_2(t)\leq\frac{1}{2}\left(u^2(1,t)+\mu_2^2(t)\right),$$

$$u(0,t)\mu_1(t)\leq\frac{1}{2}\left(u^2(0,t)+\mu_1^2(t)\right),$$

из (21) при $\varepsilon = 1/2$, имеем

$$\partial_{0t}^{\alpha+\beta}\|u\|_0^2 + \partial_{0t}^{\beta}\|\sqrt{k}u_x\|_0^2 + \beta_0\partial_{0t}^{\beta}(u^2(1,t)+u^2(0,t)) \leq$$

$$\leq \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t) + u^2(0,t) + u^2(1,t) + \|u\|_0^2 + \|f\|_0^2 + c_2\|u\|_{C[0,1]}^2.$$

Применив к обеим частям полученного неравенства оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha-\beta}$, с учетом соотношения

$$\|u\|_{C[0,1]}^2 \leq \varepsilon\|u_x\|_0^2 + (\frac{1}{\varepsilon}+1)\|u\|_0^2,$$

при $\varepsilon = 1/2$, получим

$$\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}(u^2(1,t)+u^2(0,t)) \leq$$

$$\leq M_1\left(D_{0t}^{-\alpha-\beta}\|u_x\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha-\beta}\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha-\beta}\mu_1^2(t) + D_{0t}^{-\alpha-\beta}\mu_2^2(t) + D_{0t}^{-\alpha-\beta}\|f\|_0^2\right) + \tag{22}$$

$$+\|u_0\|_0^2 + \frac{T^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\|u_x(x,0)\|_0^2,$$

где $M_1 > 0$—известная постоянная.

Воспользовавшись Леммой 2 при следующих обозначениях $D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2 = \partial_{0t}^{\beta}y(t)$, $D_{0t}^{-\alpha-\beta}\|u_x\|_0^2 = y(t)$, $y(0) = 0$

$$D_{0t}^{-\alpha-\beta}\|u_x\|_0^2 \leq \Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}(Mt^\alpha)D_{0t}^{-\alpha}[MD_{0t}^{-\alpha-\beta}\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha-\beta}\mu_1^2(t) + D_{0t}^{-\alpha-\beta}\mu_2^2(t) + D_{0t}^{-\alpha-\beta}\|f\|_0^2 +$$

$$+\|u_0\|_0^2 + \frac{T^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\|u_x(x,0)\|_0^2],$$

принимая во внимание оценку (14) и справедливость неравенства

$$D_{0t}^{-2\alpha}h(t) \leq (t^\alpha\Gamma(\alpha)/\Gamma(2\alpha))D_{0t}^{-\alpha}h(t)$$

из (22), получим

$$\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}(u^2(1,t)+u^2(0,t)) \leq$$

$$\leq M_2\left[D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha-\beta}\mu_1^2(t) + D_{0t}^{-\alpha-\beta}\mu_2^2(t) + D_{0t}^{-\alpha-\beta}\|f\|_0^2 + \|u_0\|_0^2 + \|u_x(x,0)\|_0^2\right] \tag{23}$$

где $M_2(T) > 0$—известная постоянная.

Еще раз воспользовавшись Леммой 2 при обозначениях $D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2 = y(t)$, $\|u\|_0^2 = \partial_{0t}^{\alpha}y(t)$, $y(0) = 0$ и с учетом неравенства $D_{0t}^{-2\alpha}h(t) \leq (t^\alpha\Gamma(\alpha)/\Gamma(2\alpha))D_{0t}^{-\alpha}h(t)$ из (23) получаем оценку априорную оценку (18). Из полученной оценки следует единственность и непрерывная зависимость решения задачи (2), (4), (17) от входных данных. □

Список литературы

[1] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с. [Nakhushev A. M., *Drobnoe ischislenie i ego primenenie*, Fizmatlit, M., 2003 (in Russian), 272 pp.]

[2] Шогенов В. Х., Шхануков-Лафишев М. Х., Бештоев Х. М., "Дробные производные: интерпретация и некоторые применения в физике", Сообщения объединенного института ядерных исследований, 1997. [Shogenov V. H., Shkhanukov-Lafishev M. Kh., Beshtoev H. M., "Drobnye proizvodnye: interpretaciya i nekotorye primeneniya v fizike", Soobshcheniya obedinennogo instituta yadernyh issledovanij, 1997 (in Russian)].

[3] Шхануков-Лафишев М. Х., Таукенова Ф. И., "Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **46**:10 (2006), 1871–1881. [Shkhanukov-Lafishev M. Kh., Taukenova F. I., "Raznostnye metody resheniya kraevykh zadach dlya differencialnykh uravneniy drobnogo poryadka", *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki*, **46**:10 (2006), 1871–1881 (in Russian)].

[4] Хагажеева А. А., Алиханов А. А., "Априорная оценка решения первой краевой задачи для уравнения диффузии с операторами дробного интегро-дифференцирования", *Алгебра, анализ и смежные вопросы математического моделирования*, ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А (Владикавказ, 26-27 июня 2015), Тезисы докладов, 106–107. [Khagazheeva A. A., Alikhanov A. A., "Apriornaya ocenka resheniya pervoj kraevoj zadachi dlya uravneniya diffuzii s operatorami drobnogo integro-differencirovaniya", *Algebra, analiz i smezhnye voprosy matematicheskogo modelirovaniya*, YUMI VNC RAN i RSO-A (Vladikavkaz, 26-27 iyunya 2015), Tezisy dokladov, 106–107 (in Russian)].

[5] Алиханов А. А., "Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка", *Дифференциальные уравнения*, **46**:5 (2010), 658–664. [Alikhanov A. A., "A Priori Estimates for Solutions of Boundary Value Problems for Fractional-Order Equations", *Differential Equations*, **46**:5 (2010), 658–664].

[6] Alikhanov A. A., "Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings", *Applied Mathematics and Computation*, 2012, № 219, 3938–3946.

[7] Alikhanov A. A., "Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation", *Applied Mathematics and Computation*, 2015, № 268, 12–22.

Для цитирования: Шогенова Е. М. Априорные оценки решения краевых задач для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 4(24). C. 54-60. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-54-60

For citation: Shogenova E. M. A priori estimates of the solution of boundary value problems for the convection-diffusion equation of fractional order, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018, **24**: 4, 54-60. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-54-60

Поступила в редакцию / Original article submitted: 08.02.2016