Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 4(24). C. 40-49. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-40-49

УДК 517.956.6

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ПЯТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

С. М. Мамажонов

Кокандский государственный педагогический институт имени Мукими, г. Коканд, ул. Туран, 23, Узбекистан

E-mail: bek84-08@mail.ru

В настоящей работе ставится ряд краевых задач для уравнения четвертого порядка параболо-гиперболического типа вида $\left(a_1\frac{\partial}{\partial x}+b_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a_2\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0$ в пятиугольной области. Доказывается однозначная разрешимость одной из поставленных задач методами построения решения, интегральных и дифференциальных уравнений

Ключевые слова. Дифференциальные и интегральные уравнения, метод построения решения, краевая задача, однозначная разрешимость.

MSC 35M12

ABOUT ONE CLASS OF BOUNDARY TASKS FOR THE EQUATION OF THE FOURTH ORDER OF PARABOLO-HYPERBOLIC TYPE IN PENTAGONAL AREA

S. M. Mamajonov

Kokand State Pedagogical Institute named after Mukimi, Kokand city, Turan Street, 23, Uzbekistan

E-mail: bek84-08@mail.ru

In this paper, a number of boundary tasks for the equation of the fourth order of a parabolo-hyperbolic type look $\left(a_1\frac{\partial}{\partial x}+b_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a_2\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0$ is put in pentagonal area. Unequivocal resolvability of one of put tasks is proved by methods of creation of the decision, the integrated and differential equations.

Keywords. Differential and integrated equations, method of creation of the decision, boundary task, unequivocal resolvability.

Введение

В настоящей работе ставится ряд краевых задач для уравнения четвертого порядка параболо-гиперболического типа вида

$$\left(a_1\frac{\partial}{\partial x}+b_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a_2\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0 \tag{1}$$

в пятиугольной области G плоскости xOy, где $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup J_1\cup J_2$;

$$a_1,b_1,a_2,b_2\in R,\ a_i^2+b_i^2\neq 0,\ i=1,2; Lu=\begin{cases}u_{xx}-u_y,\ (x,y)\in G_1,\\ u_{xx}-u_{yy},\ (x,y)\in G_i,\ i=2,3;\end{cases}$$

а G_1- прямоугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2- треугольник с вершинами в точках B, $C(0,-1)$, $D(-1,0)$; G_3- прямоугольник с вершинами в точках A, D, $D_0(-1,1)$, A_0, J_1- открытый отрезок с вершинами в точках B, D; J_2- открытый отрезок с вершинами в точках A, A_0.

Перед тем, как приступить к постановке краевых задач, запишем все краевые условия и условия склеивания на линиях изменения типа, из которых будем пользоваться при постановке краевых задач: Краевые условия:

$$u(1,y)=\varphi_1(y),\ \ 0\le y\le 1, \tag{2}$$

$$u(-1,y)=\varphi_2(y),\ \ 0\le y\le 1, \tag{3}$$

$$u_x(1,y)=\varphi_3(y),\ \ 0\le y\le 1, \tag{4}$$

$$u_x(-1,y)=\varphi_4(y),\ 0\le y\le 1, \tag{5}$$

$$u_{xx}(1,y)=\varphi_5(y),\ \ 0\le y\le,1 \tag{6}$$

$$u_{xx}(-1,y)=\varphi_6(y),\ 0\le y\le 1, \tag{7}$$

$$u|_{BC}=\psi_1(x),\ 0\le x\le 1, \tag{8}$$

$$u|_{DF_2}=\psi_2(x),\ -1\le x\le -\frac{1}{2}, \tag{9}$$

$$u|_{CF_1}=\psi_1(x),\ 0\le x\le \frac{1}{2}, \tag{10}$$

$$u|_{DC}=\psi_2(x),\ -1\le x\le 0, \tag{11}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC}=\psi_3(x),\ 0\le x\le 1, \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{DC}=\psi_4(x),\ -1\le x\le 0, \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{BC}=\psi_5(x),\ 0\le x\le 1, \tag{14}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{DC}=\psi_6(x),\ -1\le x\le 0, \tag{15}$$

условия склеивания на линиях изменения типа:

$$u(x,+0)=u(x,-0)=T(x),\ 0\le x\le 1, \tag{16}$$

$$u_y(x,+0)=u_y(x,-0)=N(x),\ 0\le x\le 1, \tag{17}$$

$$u_{yy}(x,+0)=u_{yy}(x,-0)=M(x),\ 0\le x\le 1, \tag{18}$$

$$u_{yyy}(x,+0)=u_{yyy}(x,-0)=\Theta(x),\ 0\le x\le 1, \tag{19}$$

$$u(+0,y)=u(-0,y)=\tau_3(y),\ 0\le y\le 1, \tag{20}$$

$$u_x(+0,y)=u_x(-0,y)=\nu_3(y),\ 0\le y\le 1, \tag{21}$$

$$u_{xx}(+0,y)=u_{xx}(-0,y)=\mu_3(y),\ 0\le y\le 1, \tag{22}$$

$$u_{xxx}(+0,y)=u_{xxx}(-0,y)=\theta_3(y),\ 0\le y\le 1 \tag{23}$$

где

$$T(x)=\begin{cases}\tau_1(x), & 0\le x\le 1,\\ \tau_2(x), & -1\le x\le 0;\end{cases}$$

$$N(x)=\begin{cases}\nu_1(x), & 0\le x\le 1,\\ \nu_2(x), & -1\le x\le 0;\end{cases}$$

$$M(x)=\begin{cases}\mu_1(x), & 0\le x\le 1,\\ \mu_2(x), & -1\le x\le 0.\end{cases}$$

$$\Theta(x)=\begin{cases}\theta_1(x), & 0\le x\le 1,\\ \theta_2(x), & -1\le x\le 0,\end{cases}$$

а $\varphi_i,\psi_i\ \left(i=\overline{1,6}\right)$ - заданные достаточно гладкие функции, τ_i, ν_i, μ_i, $\theta_i\ (i=\overline{1,4})$ - неизвестные пока достаточно гладкие функции, $n-$ внутренняя нормаль к прямой $x+y=-1$ или $x-y=1$, а точки F_1 и F_2 имеют координаты $F_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $F_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

В зависимости от значений коэффициентов a_1, b_1, a_2 и b_2, то есть от значений угловых коэффициентов $\gamma_1=\frac{b_1}{a_1}$ и $\gamma_2=\frac{b_2}{2}$ характеристик операторов первого порядка уравнения (1), получаются различные случаи, основными являются 21 из них. Учитывая это для уравнения (1) ставится следующая задача:

Постановка задачи

Найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в $\overline{G}$; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области G при $x\neq 0$, $y\neq 0$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям и условиям склеивания на линиях изменения типа, которые указаны ниже:

1. Для значений $\gamma_1=0$, $\gamma_2=0$ – группы краевых условий (2), (3), (5), (7), (8), (9), (12), (13); Всего 72 таких групп краевых условий, а также – группу условий склеивания (16), (17), (20)-(23);

2. Для значений $\gamma_1=\infty$, $\gamma_2=\infty$ – группы краевых условий (2), (3), (5), (7), (8), (9), (12), (13) и (2), (3), (10), (11), (12), (13), (14), (15), а также – группу условий склеивания (16)-(21);

3. Для значений $\gamma_1=0$, $\gamma_2=\infty$ – группы краевых условий (2), (3), (5), (8), (9), (12), (13), (14); Всего 32 таких групп краевых условий, а также – группу условий склеивания (16)-(18), (20)-(22);

4. Для значений $\gamma_1=0$, $0<\gamma_2\le 1$ – группы краевых условий (2), (3), (5), (7), (8), (9), (14), (15); Всего 50 таких групп краевых условий, а также – группу условий склеивания (16)-(18), (20)-(23);

5. Для значений $\gamma_1 = 0$, $1 < \gamma_2 < \infty$ – группы краевых условий (2), (3), (5), (7), (8), (9), (12), (14), (15); Всего 32 таких групп краевых условий, а также – группу условий склеивания (16)-(18), (20)-(23);

6. Для значений $\gamma_1 = 0$, $-1 \leq \gamma_2 < 0$ – группы краевых условий (2), (3), (4), (6), (8), (9), (12), (13); Всего 32 таких групп краевых условий, а также – группу условий склеивания (16)-(18), (20)-(23);

7. Для значений $\gamma_1 = 0$, $-\infty < \gamma_2 < -1$ – группы краевых условий (2), (3), (4), (6), (8), (9), (12), (13), (14); Всего 32 таких групп краевых условий, а также – группу условий склеивания (16)-(18), (20)-(23);

8. Для значений $\gamma_1 = \infty$, $0 < \gamma_2 \leq 1$ – группы краевых условий (2), (3), (5), (8), (9), (12), (14), (15); Всего 8 таких групп краевых условий, а также – группу условий склеивания (16)-(22);

9. Для значений $\gamma_1 = \infty$, $1 < \gamma_2 < \infty$ – группы краевых условий (2), (3), (5), (8), (9), (12), (13), (14), (15); Всего 4 таких групп краевых условий, а также – группу условий склеивания (16)-(22);

10. Для значений $\gamma_1 = \infty$, $-1 \leq \gamma_2 < 0$ – группы краевых условий (2), (3), (4), (8), (9), (12), (13), (14); Всего 8 таких групп краевых условий, а также – группу условий склеивания (16)-(22);

11. Для значений $\gamma_1 = \infty$, $-\infty < \gamma_2 < -1$ – группы краевых условий (2), (3), (4), (8), (9), (12), (13), (14), (15); Всего 4 таких групп краевых условий, а также – группу условий склеивания (16)-(22);

12. Для значений $0 < \gamma_1 \leq 1$, $0 < \gamma_2 \leq 1$ – группы краевых условий (2), (3), (5), (7), (8), (9), (14), (15) и (2), (3), (5), (7), (10), (11), (14), (15), а также – группу условий склеивания (16)-(23);

13. Для значений $0 < \gamma_1 \leq 1$, $1 < \gamma_2 < +\infty$ – группы краевых условий (2), (3), (5), (7), (8), (9), (12), (14), (15) или (2), (3), (5), (7), (8), (9), (13), (14), (15) или (2), (3), (5), (7), (10), (11), (12), (14), (15) или (2), (3), (5), (7), (10), (11), (13), (14), (15), а также – группу условий склеивания (16)-(23);

14. Для значений $0 < \gamma_1 \leq 1$, $-1 \leq \gamma_2 < 0$ – группы краевых условий (2), (3), (4), (5), (8), (9), (12), (14); Всего 32 таких групп краевых условий, а также – группу условий склеивания (16)-(23);

15. Для значений $0 < \gamma_1 \leq 1$, $-\infty < \gamma_2 < -1$ – группы краевых условий (2), (3), (4), (6), (8), (9), (12), (13), (14); Всего 32 таких групп краевых условий, а также – группу условий склеивания (16)-(23);

16. Для значений $1 < \gamma_1 < +\infty$, $1 < \gamma_2 < +\infty$ – группы краевых условий (2), (3), (5), (7)-(9), (12)-(15) или (2), (3), (5), (7), (10)-(15), а также – группу условий склеивания (16)-(23);

17. Для значений $1 < \gamma_1 < +\infty$, $-1 \leq \gamma_2 < 0$ – группы краевых условий (2), (3), (4), (5), (8), (9), (12), (13), (14); Всего 32 таких групп краевых условий, а также – группу условий склеивания (16)-(23);

18. Для значений $1 < \gamma_1 < +\infty$, $-\infty < \gamma_2 < -1$ – группы краевых условий (2), (3), (4), (5), (8), (9), (12)-(15); Всего 8 таких групп краевых условий, а также – группу условий склеивания (16)-(23);

19. Для значений $-1 \leq \gamma_1 < 0$, $-1 \leq \gamma_2 < 0$ – группы краевых условий (2), (3), (4), (5), (8), (9), (12), (13), (14); Всего 32 таких групп краевых условий, а также – группу условий склеивания (16)-(23);

20. Для значений $-1 \leq \gamma_1 < 0$, $-\infty < \gamma_2 < -1$ – группы краевых условий (2), (3), (5), (6), (8), (9), (12), (13), (14); Всего 4 таких групп краевых условий, а также – группу условий склеивания (16)-(23);

21. Для значений $-\infty < \gamma_1 < -1$, $-\infty < \gamma_2 < -1$ – группы краевых условий (2), (3), (5), (6), (8), (9), (12)-(15) или (2),(3),(5),(6),(10)-(15); а также – группу условий склеивания (16)-(23);

Здесь в настоящей статье мы будем исследовать лищь 1-случай с группой условий (2), (3), (5), (7), (8), (9), (13), (15).

Теорема. *Если* $\varphi_1, \varphi_2 \in C^4[0,1]$, $\varphi_4 \in C^3[0,1]$, $\varphi_6 \in C^2[0,1]$, $\psi_1 \in C^4[0,1]$, $\psi_2 \in {}^4\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$, $\psi_4 \in {}^3[0,1]$, $\psi_6 \in {}^2[-1,0]$, *причем выполняется условие согласования* $\varphi_1(0) = \psi_1(1)$, $\varphi_2(0) = \psi_2(-1)$, $\psi'_3(0) = -\psi'_4(0)$, *то задача-1 в 1-случае с группой условий (2), (3), (5), (7), (8), (9), (13), (15) допускает единственное решение.*

Доказательство. Теорему докажем методом построения решения. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_{11}(y)x + \omega_{12}(y), \ (x,y) \in G_1, \tag{24}$$

$$u_{ixx} - u_{iyy} = \omega_{i1}(y)x + \omega_{i2}(y), \ (x,y) \in G_i, \ i = 2, 3, \tag{25}$$

где введено обозначение $u(x,y) = u_i(x,y)$, $(x,y) \in G_i$, $i = \overline{1,3}$, причем $\omega_{i1}(y)$, $\omega_{i2}(y)$, $i = \overline{1,3}$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Исследование будем провести сначала в области G_2. Решение уравнения (25), $i = 2$, удовлетворяющее условиям (16), (17), представляется в виде

$$u_2(x,y) = \frac{1}{2}\left[T(x+y) + T(x-y)\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} N(t)\,dt -$$

$$-x\int\limits_0^y (y-\eta)\,\omega_{21}(\eta)\,d\eta - \int\limits_0^y (y-\eta)\,\omega_{22}(\eta)\,d\eta. \tag{26}$$

Подставляя (26) в условие (13), затем дифференцируя полученное уравнение, после некоторых выкладок, получим

$$-\omega_{21}(y)(1+y) + \omega_{22}(y) = \sqrt{2}\psi'_4(-1-y), -1 \leq y \leq 0. \tag{27}$$

А подставляя (26) в (15) и дифференцируя полученное уравнение, имеем

$$-\omega'_{21}(y)(1+y) + \omega'_{22}(y) = 2\psi'_6(-1-y), \ -1 \leq y \leq 0. \tag{28}$$

Дифференцируя уравнения (27), приходим к уравнению

$$-\omega_{21}(y) - \omega'_{21}(y)(1+y) + \omega'_{22}(y) = -\sqrt{2}\psi''_4(-1-y), -1 \leq y \leq 0.$$

Из последнего уравнения и (28) находим

$$\omega_{21}(y) = \sqrt{2}\psi''_4(-1-y) + 2\psi'_6(-1-y).$$

Подставляя это в (27), получим

$$\omega_{22}(y) = \sqrt{2}\psi'_4(-1-y) + (1+y)\left[\sqrt{2}\psi''_4(-1-y) + 2\psi'_6(-1-y)\right].$$

Таким образом, мы нашли

$$x\omega_{21}(y)+\omega_{22}(y)=\sqrt{2}\psi'_4(-1-y)+(1+x+y)\left[\sqrt{2}\psi''_4(-1-y)+2\psi'_6(-1-y)\right].$$

Подставляя (26) в условие (8) и дифференцируя полученное уравнение после некоторых выкладок, имеем первое соотношение между неизвестными функциями $T(x)$ и $N(x)$

$$T'(x)+N(x)=\alpha_1(x),\ -1\le x\le 1, \tag{29}$$

где $\alpha_1(x)=\psi'_1\left(\frac{x+1}{2}\right)+\int\limits_0^{\frac{x-1}{2}}[\omega_{21}(\eta)(x-\eta)+\omega_{22}(\eta)]\,d\eta$.

а) при $0\le x\le 1$ из (29) имеем

$$\tau'_1(x)+\nu_1(x)=\alpha_1(x),\ 0\le x\le 1; \tag{30}$$

б) а при $-1\le x\le 0$ –

$$\tau'_2(x)+\nu_2(x)=\alpha_1(x),\ -1\le x\le 0. \tag{31}$$

Теперь подставляя (26) в условие (9), после некоторых преобразований, получим

$$\tau'_2(x)-\nu_2(x)=\delta_1(x),\ -1\le x\le 0, \tag{32}$$

где $\delta_1(x)=\psi'_2\left(\frac{x-1}{2}\right)-\int\limits_0^{-\frac{x+1}{2}}[\omega_{21}(\eta)(x+\eta)+\omega_{22}(\eta)]\,d\eta$.

Решая систему (31), (32), находим

$$\tau'_2(x)=\frac{1}{2}[\alpha_1(x)+\delta_1(x)],$$

$$\nu_2(x)=\frac{1}{2}[\alpha_1(x)-\delta_1(x)]. \tag{33}$$

Интегрируя первое из равенств (33) от -1 до x, имеем

$$\tau_2(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{x}[\alpha_1(t)+\delta_1(t)]\,dt+\psi_2(-1).$$

Теперь переходя в уравнении (24) к пределу при $y\to 0$, в силу (16) и (17) получим второе соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$:

$$\tau''_1(x)-\nu_1(x)=\omega_{11}(0)x+\omega_{12}(0), \tag{34}$$

Исключая из (30) и (34) функцию $\nu_1(x)$ и интегрируя полученное уравнение от 0 до x, приходим к уравнению

$$\tau'_1(x)+\tau_1(x)=\alpha_2(x)+\frac{\omega_{11}(0)}{2}x^2+\omega_{12}(0)x+k_1, \tag{35}$$

где $\alpha_2(x)=\int\limits_0^x\alpha_1(t)\,dt$, а $\omega_{11}(0)$, $\omega_{12}(0)$ и k_1- неизвестные пока постоянные, подлежащие определению.

Решая уравнение (35) при условиях $\tau_1(0)=\psi_2(-1)+\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0}[\alpha_1(t)+\delta_1(t)]\,dt$, $\tau'_1(0)=\frac{1}{2}[\alpha_1(0)+\delta_1(0)]$, $\tau_1(1)=\varphi_1(0)$, $\tau'_1(1)=\psi'_1(1)-\varphi'_1(0)$, находим функцию $\tau_1(x)$:

$$\tau_1(x)=\int\limits_0^x \exp(t-x)\,\alpha_2(t)\,dt+\omega_{11}(0)\left[\frac{x^2}{2}-x+1-\exp(-x)\right]+\omega_{12}(0)[x-1+\exp(-x)]+$$

$$+k_1(1-\exp(-x))+k_2\exp(-x), \tag{36}$$

где

$$k_2=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0}[\alpha_1(t)+\delta_1(t)]\,dt+\psi_2(-1),$$

$$k_1=\frac{1}{2}[\alpha_1(0)+\delta_1(0)]+k_2,$$

$$\omega_{11}(0)=\frac{2}{3-e}\left[\int\limits_0^1\exp(t)\,\alpha_2(t)\,dt-\varphi_1(0)(e-1)-\varphi'_1(0)+\psi'_1(1)-\alpha_2(1)+k_1e-k_2\right],$$

$$\omega_{12}(0)=\varphi_1(0)-\varphi'_1(0)+\psi'_1(1)-\alpha_2(1)-k_1-\frac{1}{2}\omega_{11}(0).$$

Таким образом, мы определили и функции $\nu_1(x)$, $u_2(x,y)$.

Теперь переходим в область G_3. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} u_{3xx}-u_{3yy}=\omega_{31}(y)x+\omega_{32}(y), \\ u_3(x,0)=\tau_2(x),\ u_{3y}(x,0)=\nu_2(x),\ -2\le x\le 1, \\ u_3(-1,y)=\varphi_2(y),\ u_{3x}(-1,y)=\varphi_4(y),\ u_{3xx}(-1,y)=\varphi_6(y),\ u_3(0,y)=\tau_3(y),\ 0\le y\le 1. \end{cases}$$

Решение этой задачи будем искать в виде

$$u_3(x,y)=u_{31}(x,y)+u_{32}(x,y), \tag{37}$$

где $u_{31}(x,y)-$ решение задачи

$$\begin{cases} u_{31xx}-u_{31yy}=0, \\ u_{31}(x,0)=\tau_2(x),\ u_{31y}(x,0)=0,\ -1\le x\le 0, \\ u_{31}(-1,y)=\varphi_2(y),\ u_{31}(0,y)=\tau_3(y), \end{cases} \tag{38}$$

$u_{32}(x,y)-$ решение задачи

$$\begin{cases} u_{32xx}-u_{32yy}=\omega_{31}(y)x+\omega_{32}(y), \\ u_{32}(x,0)=0,\ u_{32y}(x,0)=\nu_2(x),\ -1\le x\le 0, \\ u_{32}(-1,y)=0,\ u_{32}(0,y)=0. \end{cases} \tag{39}$$

Методом продолжения находим решения задач (38) и (39). Они имеют вид

$$u_{31}(x,y)=\frac{1}{2}[T_2(x+y)+T_2(x-y)], \tag{40}$$

где $T_2(x)=\begin{cases}2\varphi_2(-1-x)-\tau_2(-2-x),\ -2\le x\le -1,\\ \tau_2(x),\ -1\le x\le 0,\\ 2\tau_3(x)-\tau_2(-x),\ 0\le x\le 1.\end{cases}$

$$u_{32}(x,y)=\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}N_2(t)\,dt-x\int\limits_0^y(y-\eta)\,\omega_{31}(\eta)\,d\eta-\int\limits_0^y(y-\eta)\,\omega_{32}(\eta)\,d\eta,\qquad(41)$$

где $N_2(x)=\begin{cases}-\nu_2(-2-x)-2\int\limits_0^{-1-x}[\omega_{31}(\eta)-\omega_{32}(\eta)]\,d\eta,\ -2\le x\le -1,\\ \nu_2(x),\ -1\le x\le 0,\\ -\nu_2(-x)+2\int\limits_0^x\omega_{32}(\eta)\,d\eta,\ 0\le x\le 1.\end{cases}$

Подставляя (40) и (41) в (37), имеем

$$u_3(x,y)=\frac{1}{2}[T_2(x+y)+T_2(x-y)]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}N_2(t)\,dt-x\int\limits_0^y(y-\eta)\,\omega_{31}(\eta)\,d\eta-\int\limits_0^y(y-\eta)\,\omega_{32}(\eta)\,d\eta.$$

Дифференцируя это решение по x дважды, получим

$$u_{3x}(x,y)=\frac{1}{2}\left[T'_2(x+y)+T'_2(x-y)\right]+\frac{1}{2}[N_2(x+y)-N_2(x-y)]-\int\limits_0^y(y-\eta)\,\omega_{31}(\eta)\,d\eta,\qquad(42)$$

$$u_{3xx}(x,y)=\frac{1}{2}\left[T''_2(x+y)+T''_2(x-y)\right]+\frac{1}{2}\left[N'_2(x+y)-N'_2(x-y)\right].\qquad(43)$$

Полагая в (42) и (43) $x\to -1$, имеем

$$\omega_{31}(y)-\int\limits_0^y\omega_{31}(\eta)\,d\eta-\omega_{32}(y)=\varphi''_2(y)+\varphi'_4(y)-\tau''_2(y-1)-\nu'_2(y-1),\qquad(44)$$

$$\omega_{31}(y)-\omega_{32}(y)=\varphi''_2(y)-\varphi_6(y).\qquad(45)$$

Из (44) и (45) находим

$$\omega_{31}(y)=\tau'''_2(y-1)+\nu''_2(y-1)-\varphi''_4(y)-\varphi'_6(y)$$

,

$$\omega_{32}(y)=\tau'''_2(y-1)+\nu''_2(y-1)-\varphi''_4(y)-\varphi'_6(y)-\varphi''_2(y)+\varphi_6(y).$$

А полагая в (42) $x\to 0$, имеем соотношение

$$\nu_3(y)=\tau'_3(y)+\beta_1(y),\qquad(46)$$

где $\beta_1(y)=\tau'_2(-y)-\nu_2(-y)+\int\limits_0^y\omega_{32}(\eta)\,d\eta-\int\limits_0^y(y-\eta)\,\omega_{31}(\eta)\,d\eta.$

Теперь переходим в область G_1. Переходя в уравнениях (24) и (25), $i=2$ и в уравнениях $u_{1xxx}-u_{1xy}(y)=\omega_{11}(y)$ и $u_{3xxx}-u_{3xyy}(y)=\omega_{31}(y)$ к пределу при $x\to 0$ в силу (20), (21), (22) и (23) имеем

$$\omega_{12}(y)=\mu_3(y)-\tau'_3(y), \tag{47}$$

$$\omega_{32}(y)=\mu_3(y)-\tau''_3(y). \tag{48}$$

$$\omega_{11}(y)=\theta_3(y)-\nu'_3(y), \tag{49}$$

$$\omega_{31}(y)=\theta_3(y)-\nu''_3(y). \tag{50}$$

Исключая из уравнений (47), (48) функцию $\mu_3(y)$, а из уравнений (49), (50) функцию $\theta_3(y)$, получим

$$\omega_{12}(y)=\left[\tau''_3(y)-\tau'_3(y)\right]+\omega_{32}(y)$$

,

$$\omega_{11}(y)=\left[\nu''_3(y)-\nu'_3(y)\right]+\omega_{31}(y). \tag{51}$$

Подставляя (46) в последнее из равенств (51), имеем

$$\omega_{11}(y)=\left[\tau'''_3(y)-\tau''_3(y)\right]+\left[\beta''_1(y)-\beta'_1(y)\right]+\omega_{31}(y). \tag{52}$$

Далее, записываем решение уравнения (24), удовлетворяющего условиям (2), (16) при $0\le x\le 1$ и (20):

$$u_1(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\int\limits_0^y \tau_3(\eta)G_\xi(x,y;0,\eta)d\eta-\int\limits_0^y \varphi_1(\eta)G_\xi(x,y;1,\eta)d\eta+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^1 \tau_1(\xi)G(x,y;\xi,0)d\xi-\int\limits_0^y d\eta\int\limits_0^1\left[\omega_{11}(\eta)\xi+\omega_{12}(\eta)\right]G(x,y;\xi,\eta)d\xi\right]. \tag{53}$$

Дифференцируя (53) по x и полагая $x\to 0$, получим

$$\nu_3(y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[-\int\limits_0^y \tau'_3(\eta)N(0,y;0,\eta)d\eta+\int\limits_0^y \varphi'_1(\eta)N(0y;1,\eta)d\eta+\right.$$

$$+\int\limits_0^1 \tau'_1(\xi)N(0,y;\xi,0)d\xi+\int\limits_0^y \omega_{11}(\eta)N(0,y;1,\eta)d\eta+\int\limits_0^y \omega_{12}(\eta)N(0,y;1,\eta)d\eta-$$

$$\left.-\int\limits_0^y \omega_{12}(\eta)N(0,y;0,\eta)d\eta-\int\limits_0^y \omega_{11}(\eta)d\eta\int\limits_0^1 N(0,y;\xi,\eta)d\xi\right], \tag{54}$$

где $\left.\begin{matrix}G(x,y;\xi,\eta)\\ N(x,y;\xi,\eta)\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\sqrt{y-\eta}}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\mp\exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}$ – функции Грина первой и второй краевых задач для уравнения Фурье.

Таким образом, мы получили систему уравнений (46), (51), (52), (54) относительно неизвестных функций $\nu_3(y)$, $\tau_3(y)$, $\omega_{11}(y)$, $\omega_{12}(y)$. Исключая из этой системы функции $\omega_{11}(y)$, $\omega_{12}(y)$ и $\nu_3(y)$ после длинных вычислений, мы приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $\tau''_3(y)$. Решая это уравнение, находим функцию $\tau''_3(y)$, тем самым и функции $\tau_3(y)$, $\nu_3(y)$, $\omega_{11}(y)$, $\omega_{12}(y)$. Тогда будут известными и функции $u_3(x,y)$ и $u_1(x,y)$. Итак, мы нашли решение поставленной задачи 1 в случае 1 с группой условий (2), (3), (5), (7), (8), (9), (13), (15) единственным образом.

Замечание. В работах [1] – [2] был рассмотрен ряд краевых задач для уравнений четвертого порядка параболо-гиперболического типа в области с одной линией изменения типа.

Список литературы

[1] Джураев Т. Д., Мамажанов М., "Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа", *Дифференциальные уравнения*, **200**:1 (1986), 25–31. [Dzhuraev T. D., Mamazhanov M., "Kraevye zadachi dlya odnogo klassa uravnenij chetvertogo poryadka smeshannogo tipa", *Differencial'nye uravneniya*, **200**:1 (1986), 25–31].

[2] Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М., "Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа", *Фан*, 1986, 220 с. [Dzhuraev T. D., Sopuev A., Mamazhanov M., "Kraevye zadachi dlya uravnenij parabolo-giperbolicheskogo tipa", *Fan*, 1986, 220 pp.]

Для цитирования: Мамажонов С. М. Об одном классе краевых задач для уравнения четвертого порядка параболо-гиперболического типа в пятиугольной области // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 4(24). C. 40-49. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-40-49

For citation: Mamajonov S. M. About one class of boundary tasks for the equation of the fourth order of parabolo-hyperbolic type in pentagonal area, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018, **24**: 4, 40-49. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-40-49

Поступила в редакцию / Original article submitted: 14.10.2018