Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 4(24). С. 19-28. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-19-28

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА АЛЛЕРА – ЛЫКОВА

С. Х. Геккиева

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А
E-mail: gekkieva_s@mail.ru

При математическом моделировании процессов различной природы, например, изучении процессов диффузии частиц в турбулентной плазме, распространения тепла в тонком нагретом стержне, переноса влаги в почвогрунтах, а также задач математической биологии и задач управления, возникают краевые задачи с нелокальным условием. В работе исследована нелокальная краевая задача для уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова с дробной по времени производной Римана – Лиувилля. Рассматриваемое уравнение является обобщением уравнения Аллера – Лыкова, посредством введения понятия фрактальной скорости изменения влажности, которая объясняет наличие потоков против потенциала влажности. С помощью метода энергетических неравенств для решения задачи получена априорная оценка в терминах дробной производной Римана – Лиувилля, из которой следует единственность решения.

Ключевые слова: уравнение влагопереноса, дробная производная Римана – Лиувилля, обобщенное уравнение Аллера – Лыкова, априорная оценка.

Введение

Движение воды в капиллярно-пористых средах, к которым относятся почвы, может происходить под воздействием самых разнообразных движущих сил и может быть описана нелинейным уравнением [1, с. 136]

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

где $u(x,t)$ – влажность почвы в долях единицы на глубине x в момент времени t, $D(u)$ – коэффициент диффузивности. В диффузионной модели с неравномерным распределением влажности предполагается возникновение потока влаги от слоев с большим к слоям с малым влагосодержанием. Однако достаточно убедительные и многократные опыты демонстрируют обратное, что входит в противоречие с законом Дарси, лежащим в основе диффузионной теории. Движения влаги в прямом и обратном направлении возможно на основе модифицированного уравнения диффузии или уравнения Аллера [1, с. 158]

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D(u)\frac{\partial u}{\partial x}+A\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right), \tag{1}$$

где дополнительный член $A\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}$ призван объяснить факт движения влаги против градиента влажности, A – варьируемый коэффициент Аллера.

Если уравнение Аллера (1) предполагает бесконечную скорость распространения возмущения в почве, уравнение А. В. Лыкова

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{2}$$

учитывает конечную его скорость. В (2) вводится дополнительное слагаемое $A_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, роль которого становится заметной в процессах, полагающих быстрые колебания влажности на границах исследуемого образца почвы. А. В. Лыков полагает, что коэффициент A_1 принимает значение $A_1=Cx^2$, где $C=const$, зависящая от коэффициента диффузии, а также пористости тела, его капиллярных свойств и вязкости жидкости [2, с. 197].

Так как коллоидное капиллярно-пористое тело поликапиллярной структуры является примером фрактальной среды или допускает такую интерпретацию, Нахушевым А. М. на основе уравнения (2) в [2, с. 197], было представлено «качественно новое уравнение влагопереноса»

$$D_{0t}^{\alpha}u=\frac{\partial}{\partial x}\left(D(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-A_1D_{0t}^{\alpha+1}u, \tag{3}$$

где D_{0t}^{γ} – оператор дробного дифференцирования Римана – Лиувилля [2, с. 9] порядка $0<\alpha<1$. Уравнение (3) при $\alpha=1$ совпадает с уравнением влагопереноса Лыкова (2).

При таком подходе в случае уравнения Аллера (1) мы получаем так называемое, модифицированное уравнение влагопереноса с дробной производной, рассмотренное в работах [3]–[5].

Для описания процессов испарения и инфильтрации Кулик В. Я. [6] считает, что уместен компромиссный подход и предлагает привлекать гибридное уравнение, совмещая структуру уравнения Аллера (1) и уравнения Лыкова (2). Такого рода уравнения рассмотрены в работах [7, 8].

В данной работе исследовано уравнение вида:

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} u + D_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + A D_{0t}^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{4}$$

где $k(x,t) = D(u)$, A_1, $A = const > 0$, $0 < \alpha < 1$.

В работе [9] Чудновский А. Ф. впервые обратил внимание на несостоятельность задания классических граничных условий 1, 2, 3 родов на поверхности почвы; о влажности почвы можно говорить, только отнеся ее к определенному слою, который может быть тонким, но не бесконечно тонким.

В этой работе предлагается в качестве граничного условия

$$q(0,t) = \int_0^l u dx,$$

где $q(0,t)$ – поток влаги, через поверхность, равный содержанию влаги в активном слое почвы от 0 до l. Отметим, что ранее краевые задачи для уравнений влагопереноса с такого рода граничным условием рассматривались в работах [10]–[12].

Постановка задачи

В области $\Omega_T = \{(x,t):\ 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение (4).

Определение. Регулярным решением уравнения (4) в области Ω назовем функцию $u = u(x,t)$ из класса $D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)$, $D_{0t}^{\alpha}u(x,t) \in C\left(\bar{\Omega}_T\right)$; $D_{0t}^{\alpha+1}u(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$, $D_{0t}^{\alpha}u_{xx}(x,t) \in C\left(\Omega_T\right)$, которая удовлетворяет уравнению (4) во всех точках $(x,t) \in \Omega_T$.

В случае, когда коэффициенты уравнения (4) постоянны, существование и единственность решения первой краевой задачи доказаны в [13]. В данной работе рассматривается краевая задача с нелокальным условием.

Задача 1. *В области Ω_T рассмотрим нелокальную краевую задачу для уравнения* (4)*, удовлетворяющее краевым условиям*

$$\begin{cases} k(0,t)\frac{\partial u}{\partial x} + A D_{0t}^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x} = \int\limits_0^l u(x,t)dx - \mu_1(t), & x = 0, \\ k(l,t)\frac{\partial u}{\partial x} + A D_{0t}^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x} = \mu_2(t), & x = l, \end{cases} \tag{5}$$

и начальным условиям

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t) = \tau(x), \quad \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha}u(x,t) = \nu(x), \tag{6}$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$ – заданные функции, $k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + A D_{0t}^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}$ – поток влаги через сечение x в единицу времени.

Пусть существует регулярное решение задачи (4)–(6), сформулируем следующую теорему.

Теорема. *Если* $k_x(x,t)$, $k_t(x,t)$, $f(x,t) \in \mathrm{C}\left(\bar{\Omega}_T\right)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t) \in C[0,T]$, $\nu(x) \in \mathrm{C}[0,l]$, $\tau(x) \in \mathrm{C}^2[0,l]$, $k \geq c_1 > 0$, $k_t \leq 0$ *всюду на* $\bar{\Omega}_T$ *и выполнено условие* $\tau(0) = \tau(l) = \tau'(0) = \tau'(l) = 0$, *тогда для решения задачи справедлива априорная оценка*

$$\|D_{0t}^{\alpha}u\|_0^2 + \|D_{0t}^{\alpha}u_x\|_{2,\Omega_t}^2 + \|D_{0t}^{\alpha}u\|_{2,\Omega_t}^2 + \|u\|_{2,\Omega_t}^2 \leq$$

$$\leq M_1(t)\left(\|f\|_{2,\Omega_t}^2 + \left\|\tau'(x)\right\|_0^2 + \left\|\tau''(x)\right\|_0^2 + \|\nu(x)\|_0^2 + \|\tau\|_{2,\Omega_t}^2 + \int_0^t \left(\mu_1{}^2 + \mu_2{}^2\right)d\tau\right), \quad (7)$$

где $M_1(t) > 0$.

Доказательство.

Аналогично [14], введем новую неизвестную функцию $g(x,t)$, полагая

$$u(x,t) = g(x,t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau(x)$$

так, что $g(x,t)$ представляет собой отклонение функции $u(x,t)$ от известной функции $\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau(x)$. С учетом $D_{0t}^{\alpha+1}t^{\alpha-1} = 0$, $D_{0t}^{\alpha}t^{\alpha-1} = 0$ [15, c. 15] эта функция $g(x,t)$ будет определяться, как решение уравнения

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1}g + D_{0t}^{\alpha}g - (kg_x)_x - AD_{0t}^{\alpha}g_{xx} = F(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (8)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}g(x,t) = \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}\left(u(x,t) - \tfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau(x)\right) = \tau(x) - \tfrac{\tau(x)}{\Gamma(\alpha)}\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}t^{\alpha-1} = 0, \\ &\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha}g(x,t) = \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha}\left(u(x,t) - \tfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\tau(x)\right) = \nu(x) - \tfrac{\tau(x)}{\Gamma(\alpha)}\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha}t^{\alpha-1} = \nu(x) \end{aligned} \quad (9)$$

и граничными условиями

$$\begin{cases} \Pi(0,t) = \int\limits_0^l g(x,t)dx + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^l \tau(x)dx - \mu_1(t), \quad x = 0, \\ \Pi(l,t) = \mu_2(t), \quad x = l, \end{cases} \quad (10)$$

где $\Pi(x,t) = k(x,t)\frac{\partial g}{\partial x} + AD_{0t}^{\alpha}\frac{\partial g}{\partial x}$, $F(x,t) = f(x,t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(k_x\tau'(x) + k\tau''(x)\right)$.

Получим априорную оценку в терминах дробной производной Римана – Лиувилля, для чего умножим уравнение (8) скалярно на $D_{0t}^{\alpha}g$:

$$A_1\left(D_{0t}^{\alpha+1}g, D_{0t}^{\alpha}g\right) + \left(D_{0t}^{\alpha}g, D_{0t}^{\alpha}g\right) - \left((kg_x)_x, D_{0t}^{\alpha}g\right) - A\left(D_{0t}^{\alpha}g_{xx}, D_{0t}^{\alpha}g\right) = \left(F, D_{0t}^{\alpha}g\right), \quad (11)$$

где $(u,v) = \int\limits_0^l uv dx$, $(u,u) = \|u\|_0^2$.

Преобразуем слагаемые тождества (11) с учетом (9), (10):

$$A_1\left(D_{0t}^{\alpha+1}g, D_{0t}^{\alpha}g\right) = \frac{A_1}{2}\int\limits_0^l \frac{\partial}{\partial t}\left(D_{0t}^{\alpha}g\right)^2 dx = \frac{A_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2,$$

$$(D_{0t}^{\alpha}g, D_{0t}^{\alpha}g) = \|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2,$$

$$((kg_x)_x, D_{0t}^{\alpha}g) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left\{ kg_x(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{g(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\Bigg|_0^l - \int_0^l kg_x(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{g_x(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}k(l,t)\,g_x(l,t)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{g(l,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}k(0,t)\,g_x(0,t)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{g(0,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} -$$

$$-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^l kg_x(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{g_x(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}dx,$$

$$A\,(D_{ot}^{\alpha}g_{xx}, D_{ot}^{\alpha}g) = \frac{A}{\Gamma^2(1-\alpha)}\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{g_{xx}(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{g(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}dx =$$

$$= \frac{A}{\Gamma^2(1-\alpha)}\left\{ \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{g_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{g(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\Bigg|_0^l - \right.$$

$$\left. - \int_0^l \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{g_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{g_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}dx \right\} =$$

$$= \frac{A}{\Gamma^2(1-\alpha)}\left\{ \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{g_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{g(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\Bigg|_0^l \right\} - A\,\|D_{0t}^{\alpha}g_x\|_0^2,$$

$$(F, D_{0t}^{\alpha}g) \le \frac{1}{2}\,\|F\|_0^2 + \frac{1}{2}\,\|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2.$$

С учетом полученных неравенств из (11) получим

$$\frac{A_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2 + \|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2 - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}k(l,t)g_x(l,t)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{g(l,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}k(0,t)g_x(0,t)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{g(0,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^l kg_x(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{g_x(x,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}dx -$$

$$-\frac{A}{\Gamma^2(1-\alpha)}\left\{ \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{g_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{g(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\Bigg|_0^l \right\} + A\,\|D_{0t}^{\alpha}g_x\|_0^2 \le \frac{1}{2}\,\|F\|_0^2 + \frac{1}{2}\,\|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2.$$

Последнее неравенство с учетом граничных условий (10) примет вид:

$$\frac{A_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2 + \|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2 - \Pi(l,t)\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{g(l,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} + \Pi(0,t)\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{g(0,\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^l kg_x(x,t)\int\limits_0^t \frac{g_x(x,t)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}dx+A\left\|D_{0t}^\alpha g_x\right\|_0^2\le\frac{1}{2}\left\|F\right\|_0^2+\frac{1}{2}\left\|D_{0t}^\alpha g\right\|_0^2.$$

Окончательно, имеем

$$\frac{A_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|D_{0t}^\alpha g\right\|_0^2+\left\|D_{0t}^\alpha g\right\|_0^2-\mu_2(t)D_{ot}^\alpha g(l,t)+\left(\int\limits_0^l g(x,t)\,dx+\frac{t^{\alpha-1}}{(\Gamma(\alpha))}\int\limits_0^l \tau(x)\,dx-\mu_1(t)\right)D_{ot}^\alpha g(0,t)+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^l kg_x(x,t)\int\limits_0^t \frac{g_x(x,t)d\tau}{(t-\tau)^\alpha}dx+A\left\|D_{0t}^\alpha g_x\right\|_0^2\le\frac{1}{2}\left\|F\right\|_0^2+\frac{1}{2}\left\|D_{0t}^\alpha g\right\|_0^2. \qquad (12)$$

Слагаемые неравенства (12) оценим так:

$$\mu_2(t)D_{ot}^\alpha g(l,t)\le\frac{\mu_2^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\varepsilon\left\|D_{ot}^\alpha g_x\right\|_0^2+\left(\frac{2}{\varepsilon}+\frac{1}{\ell}\right)\left\|D_{ot}^\alpha g\right\|_0^2\right),$$

$$\mu_1(t)D_{ot}^\alpha g(0,t)\le\frac{\mu_1^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\varepsilon\left\|D_{ot}^\alpha g_x\right\|_0^2+\left(\frac{2}{\varepsilon}+\frac{1}{\ell}\right)\left\|D_{ot}^\alpha g\right\|_0^2\right);$$

$$\mu_1 D_{ot}^\alpha g(0,t)+\mu_2 D_{ot}^\alpha g(l,t)\le\frac{1}{2}\left(\mu_1^2+\mu_2^2\right)+\frac{1}{2}\left(\left(D_{ot}^\alpha g(0,t)\right)^2+\left(D_{ot}^\alpha g(l,t)\right)^2\right)\le$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\mu_1^2+\mu_2^2\right)+\left(\varepsilon\left\|\left(D_{ot}^\alpha g(x,t)\right)_x\right\|_0^2+\left(\frac{2}{\varepsilon}+\frac{1}{l}\right)\left\|D_{ot}^\alpha g(x,t)\right\|_0^2\right),$$

$$\left|D_{ot}^\alpha g(0,t)\int\limits_0^l g(x,t)\,dx\right|\le\frac{\left(D_{ot}^\alpha g(0,t)\right)^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^l g dx\right)^2\le$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\varepsilon\left\|\left(D_{ot}^\alpha g(x,t)\right)_x\right\|_0^2+\left(\frac{2}{\varepsilon}+\frac{1}{l}\right)\left\|D_{ot}^\alpha g(x,t)\right\|_0^2\right)+\frac{l}{2}\left\|g\right\|_0^2,$$

$$\left|D_{ot}^\alpha g(0,t)\frac{t^{\alpha-1}}{(\Gamma(\alpha))}\int\limits_0^l \tau(x)\,dx\right|\le\frac{\left(D_{ot}^\alpha g(0,t)\right)^2}{2}+\frac{t^{2\alpha-2}}{\Gamma^2(\alpha)}\left(\int\limits_0^l \tau(x)\,dx\right)^2\le$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\varepsilon\left\|\left(D_{ot}^\alpha g(x,t)\right)_x\right\|_0^2+\left(\frac{2}{\varepsilon}+\frac{1}{l}\right)\left\|D_{ot}^\alpha g(x,t)\right\|_0^2\right)+\frac{t^{2\alpha-2}l}{\Gamma^2(\alpha)}\left\|\tau\right\|_0^2,$$

$$\left|D_{ot}^\alpha g(0,t)\int\limits_0^l g(x,t)\,dx\right|+\left|D_{ot}^\alpha g(0,t)\frac{t^{\alpha-1}}{(\Gamma(\alpha))}\int\limits_0^l \tau(x)\,dx\right|\le$$

$$\le\left(\varepsilon\left\|\left(D_{ot}^\alpha g(x,t)\right)_x\right\|_0^2+\left(\frac{2}{\varepsilon}+\frac{1}{l}\right)\left\|D_{ot}^\alpha g(x,t)\right\|_0^2\right)+\frac{l}{2}\left\|g\right\|_0^2+\frac{t^{2\alpha-2}l}{\Gamma^2(\alpha)}\left\|\tau\right\|_0^2,$$

где $\varepsilon>0$ – произвольная постоянная, $c_\varepsilon=\frac{2}{\varepsilon}+\frac{1}{l}$. Здесь мы воспользовались известной оценкой

$$\left\|u\right\|_c^2\le\varepsilon\left\|u_x\right\|_0^2+\left(\frac{2}{\varepsilon}+\frac{1}{l}\right)\left\|u\right\|_0^2$$

и ε-неравенством $ab\le\frac{1}{4\varepsilon}a^2+\varepsilon b^2$, a, $b>0$.

Подставляя полученные выше оценки в неравенство (12), находим

$$\frac{A_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2+\nu\|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^l kg_x(x,t)\int\limits_0^t\frac{g_x(x,t)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}dx+$$

$$+\nu_1\|D_{0t}^{\alpha}g_x\|_0^2+\frac{l}{2}\|g\|_0^2\leq\frac{1}{2}\|F\|_0^2+\frac{1}{2}\mu_1^2+\frac{1}{2}\mu_2^2, \tag{13}$$

где $\nu=\frac{1}{2}-2c_{\varepsilon}>0,\ \nu_1=A-2\varepsilon>0$.

Проинтегрируем (13) по τ от 0 до t:

$$\frac{A_1}{2}\|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2+\nu\int\limits_0^t\|D_{0t}^{\alpha}g(x,\tau)\|_0^2d\tau+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l kg_x(x,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^{\tau}\frac{g_x(x,\tau_1)\,d\tau_1}{(\tau-\tau_1)^{\alpha}}dx+$$

$$+\nu_1\int\limits_0^t\left\|D_{0t}^{\alpha}g_x(x,\tau)\right\|_0^2d\tau+\tfrac{l}{2}\int\limits_0^t\|g(x,\tau)\|_0^2d\tau\leq$$

$$\leq\tfrac{1}{2}\|F\|_{2,Q_t}^2+\tfrac{A_1}{2}\left\|D_{0t}^{\alpha}g(x,0)\right\|_0^2+\tfrac{1}{2}\int\limits_0^t\left(\mu_1^2+\mu_2^2\right)d\tau.$$

где $\|F\|_{2,\Omega_t}^2=\int\limits_0^t\|F\|_0^2d\tau$.

Предположим, что $k_t\leq 0$, тогда неотрицательность тройного интеграла в левой части последнего неравенства доказывается так же, как в [2, с. 43]. Усиливая это неравенство, получим

$$A_1\|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2+2\nu\int\limits_0^t\|D_{0t}^{\alpha}g(x,\tau)\|_0^2d\tau+2\nu_1\int\limits_0^t\|D_{0t}^{\alpha}g_x(x,\tau)\|_0^2d\tau+l\int\limits_0^t\|g(x,\tau)\|_0^2d\tau\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\|F\|_{2,Q_t}^2+A_1\|\nu(x)\|_0^2+\int\limits_0^t\left(\mu_1^2+\mu_2^2\right)d\tau.$$

Откуда следует оценка

$$\|D_{0t}^{\alpha}g\|_0^2+\|D_{0t}^{\alpha}g_x\|_{2,\Omega_t}^2+\|D_{0t}^{\alpha}g\|_{2,\Omega_t}^2+\|g\|_{2,\Omega_t}^2\leq M(t)\left(\|F\|_{2,\Omega_t}^2+\|\nu(x)\|_0^2+\int\limits_0^t\left(\mu_1^2+\mu_2^2\right)d\tau\right)$$

, где $M(t)>0$, или, возвращаясь к $u(x,t)$, получим (7), откуда следует единственность решения задачи. □

Заключение

Полученные результаты могут стать основой для постановки и исследования новых краевых задач для обобщенного уравнения влагопереноса, а также послужат основой для развития теории краевых задач для дифференциальных уравнений, лежащих в основе математического моделирования физических и природных систем с фрактальной структурой. В работе рассмотрен вопрос единственности решения нелокальной краевой задачи для уравнения Аллера – Лыкова с дробной производной Римана – Лиувилля. В развитие рассматриваемой тематики актуальными остаются вопросы построения разностных схем для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова, рассмотрение задач более общего типа с нелокальными граничными условиями, а также проведение численных расчетов.

Список литературы

[1] Чудновский А. Ф., *Теплофизика почв*, Наука, М., 1976, 352 с. [Chudnovskij A. F., *Teplofizika pochv*, Nauka, M., 1976, 352 pp.]

[2] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с. [Nakhushev A. M., *Drobnoe ischislenie i ego primenenie*, Fizmatlit, M., 2003, 272 pp.]

[3] Керефов М. А., "Об одной краевой задаче для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной", *Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. акад. наук*, **4**:1 (1999), 12–14. [Kerefov M. A., "Ob odnoj kraevoj zadache dlya modificirovannogo uravneniya vlagoperenosa s drobnoj po vremeni proizvodnoj", *Dokl. Adyg. (Cherkes.) Mezhdunar. akad. nauk*, **4**:1 (1999), 12–14].

[4] Керефов М. А., Геккиева С. Х., "Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной в многомерной области", *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика.*, **41**:23 (220) (2015), 17–23. [Kerefov M. A., Gekkieva S. Kh., "Kraevye zadachi dlya modificirovannogo uravneniya vlagoperenosa s drobnoj po vremeni proizvodnoj v mnogomernoj oblasti", *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika.*, **41**:23 (220) (2015), 17–23].

[5] Керефов М. А., Геккиева С. Х., "Нелокальная краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса", *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*, 2017, №2, 106–112. [Kerefov M. A., Gekkieva S. Kh., "Nelokal'naya kraevaya zadacha dlya obobshchennogo uravneniya vlagoperenosa", *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika*, 2017, №2, 106–112].

[6] Кулик В. Я., "Исследование движения почвенной влаги с точки зрения инвариантности относительно непрерывных групп преобразований", *Исследование процессов обмена энергией и веществом в системе почва-растение-воздух*, Наука, Л., 1972, 315 с. [Kulik V. YA., "Issledovanie dvizheniya pochvennoj vlagi s tochki zreniya invariantnosti otnositel'no nepreryvnyh grupp preobrazovanij", *Issledovanie processov obmena ehnergiej i veshchestvom v sisteme pochva-rastenie-vozduh*, Nauka, L., 1972, 315 pp.]

[7] Лафишева М. М., Керефов М. А., Дышекова Р. В., "Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова с нелокальным условием", *Владикавказский математический журнал*, **19**:1 (2017), 50–58. [Lafisheva M. M., Kerefov M. A., Dyshekova R. V., "Raznostnye skhemy dlya uravneniya vlagoperenosa Allera – Lykova s nelokal'nym usloviem", *Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal*, **19**:1 (2017), 50–58].

[8] Геккиева С. Х., "Первая краевая задач для уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова с дробной по времени производной", *Устойчивое развитие: проблемы, концепции, модели*, Материалы Всероссийской конференции с международным участием, 2017, 99–102. [Gekkieva S. Kh., "Pervaya kraevaya zadach dlya uravneniya vlagoperenosa Allera – Lykova s drobnoj po vremeni proizvodnoj", *Ustojchivoe razvitie: problemy, koncepcii, modeli*, Materialy Vserossijskoj konferencii s mezhdunarodnym uchastiem, 2017, 99–102].

[9] Чудновский А. Ф., "Некоторые коррективы в постановке и решении задач тепло и влагопереноса в почве", *Сб. трудов по агрофизике*, 1969, 41–54. [Chudnovskij A. F., "Nekotorye korrektivy v postanovke i reshenii zadach teplo i vlagoperenosa v pochve", *Cb. trudov po agrofizike*, 1969, 41–54].

[10] Керефов М. А., *Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной*, Дис. ... канд. физ.-мат. наук, Нальчик, 2000, 75 с. [Kerefov M. A., *Kraevye zadachi dlya modificirovannogo uravneniya vlagoperenosa s drobnoj po vremeni proizvodnoj*, Dis. ... kand. fiz.-mat. nauk, Nal'chik, 2000, 75 pp.]

[11] Баззаев А. К., Гутнова Д. К, Шхануков-Лафишев М. Х., "Локально-одномерная схема для параболического уравнения с нелокальным условием", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **52**:6 (2012), 1048–1057. [Bazzaev A. K., Gutnova D. K, SHkhanukov-Lafishev M. H., "Lokal'no-odnomernaya skhema dlya parabolicheskogo uravneniya s nelokal'nym usloviem", *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **52**:6 (2012), 1048–1057].

[12] Архестова С. М., Шхануков-Лафишев М. Х, "Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова с нелокальным условием", *Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН*, 2012, №3, 7–16. [Arhestova S. M., Shkhanukov-Lafishev M. H, "Raznostnye skhemy dlya uravneniya vlagoperenosa Allera–Lykova s nelokal'nym usloviem", *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo centra RAN*, 2012, №3, 7–16].

[13] Геккиева С. Х., Керефов М. А., "Краевые задачи для обобщенного уравнения влагопереноса", *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2018, №1 (21), 21–32. [Gekkieva S. Kh., Kerefov M. A., "Kraevye zadachi dlya obobshchennogo uravneniya vlagoperenosa", *Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskie nauki*, 2018, №1 (21), 21–32].

[14] Керефов М. А., Геккиева С. Х., "Первая краевая задача для неоднородного нелокального волнового уравнения", *Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика*, 2016, №4, 76–86. [Kerefov M. A., Gekkieva S. Kh., "Pervaya kraevaya zadacha dlya neodnorodnogo nelokal'nogo volnovogo uravneniya", *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika*, 2016, №4, 76–86].

[15] Псху А. В., *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005, 199 с. [Pskhu A. V., *Uravneniya v chastnyh proizvodnyh drobnogo poryadka*, Nauka, M., 2005, 199 pp.]

Для цитирования: Геккиева С. Х. Нелокальная краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 4(24). С. 19-28. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-19-28

For citation: Gekkieva S. Kh. Nonlocal boundary-value problem for the generalized Aller – Lykov moisture transport equation, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018, **24**: 4, 19-28. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-19-28

Поступила в редакцию / Original article submitted: 18.09.2018

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2018. no.4(24). pp. 19–28. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-19-28

MSC 35E99

NONLOCAL BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE GENERALIZED ALLER – LYKOV MOISTURE TRANSPORT EQUATION

S. Kh. Gekkieva

Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Center of RAS, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89 A, Russia
E-mail: gekkieva_s@mail.ru

The mathematical modeling of different process types, for example, particle diffusion in a turbulent plasma, the propagation of heat in a thin rod, moisture transfer in soil, problems in mathematical biology and control problems, entails solving nonlocal boundary value problems. The paper considers a nonlocal boundary-value problem for the Aller – Lykov moisture transfer equation with a Riemann – Liouville time fractional derivative. The equation under consideration is a generalization of the Aller – Lykov equation obtained by introducing the concept of the fractal rate of humidity change, which explains the presence of flows moving against the water potential. For the solution to the problem, an a priori estimate has been obtained by the method of energy inequalities in terms of the fractional Riemann – Liouville derivative, which implies the uniqueness of the solution.

Key words: equation of moisture transfer, fractional Riemann – Liouville derivative, generalized Aller – Lykov equation, a priori estimate.