Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 4(24). C. 10-18. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-10-18

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.6

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ПЕРВОГО РОДА, ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ *

С. З. Джамалов

Институт математики Академии Наук Республики Узбекистан, 100170, г.Ташкент, Академгородок, ул. М. Улугбека, 81, Узбекистан

E-mail: siroj63@mail.ru

В работе рассматриваются вопросы корректности одной обратной задачи для многомерного уравнения смешанного типа первого рода, второго порядка с периодическими условиями. Для этой задачи методами "ε-регуляризации", априорных оценок и последовательностью приближений доказаны теоремы существования и единственности решения в определенном классе.

Ключевые слова: многомерные уравнения смешанного типа первого рода второго порядка, обратная задача, корректность решения, методы "ε-регуляризации", последовательных приближений и априорных оценок.

MATHEMATICS

MSC 35M10, 35M20

ON AN INVERSE PROBLEM FOR THE MULTIDIMENSIONAL EQUATION MIXED TYPE OF THE FIRST KIND OF THE SECOND ORDER WITH PERIODIC CONDITIONS

S. Z. Dzhamalov

Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, M. Ulugbek, 81 str. Tashkent, 100170, Uzbekistan

E-mail: siroj63@mail.ru

In the present work, the problems of correctness of inverse problem for the multidimensional equation mixed type of the first kind of the second order with periodic conditions are considered. For this problem, the theorems on existence and uniqueness of the solution are proved in a certain class by "ε-regularization", a priori estimations and of successive approximations methods.

Key words: The multidimensional equation mixed type of the first kind of the second order, inverse problem, correctness of solution, "ε- regularization"method, method of successive approximations, method a priori estimations.

*Работа выполнена при финансовой поддержке проектов № ОТ-Ф4-88 и №MRU-OT-1/2017

Введение и постановка задачи

В процессе исследования нелокальных краевых задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными условиями и обратными задачами. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для уравнений параболического, эллиптического и гиперболического типов. Более полный список работ, посвященных данной тематике, можно найти в работах [1,2,7,8,10]. Значительно менее изученными являются обратные задачи для уравнений смешанного типа как первого, так и второго рода [4,5,9]. В данной работе для исследования разрешимости обратных задач для уравнения смещенного типа предлагается метод, который основан на сведении обратной задачи к бесконечным нагруженным системам дифференциальных уравнений. Напомним, нагруженным уравнением принято называть уравнения с частными производными, содержащие в коэффициентах значения тех или иных функционалов от решения уравнения [6,12].

Формулировка задачи

Пусть $\Omega = \prod\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i,\beta_i)$, $n-$ мерный параллелепипед Евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ точек $(x_1,...,x_n)$, $\alpha_1 < 0 < \beta_1$, $0 < \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i < +\infty$, $\forall i = \overline{2,n}.$
Обозначим через
$Q = \Omega \times (0,T) \times (0,\ell) = Q_1 \times (0,\ell) = \{(x,t,y); x \in \Omega, 0 < y < \ell, 0 < t < T < +\infty\}$ область с кусочно-гладкой границей $\partial Q = \partial Q_1 \times [0,\ell]$, $\partial Q_1 = \partial\Omega \times [0,T]$.
В области Q рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$Lu = K(x)u_{tt} + \left(a_{ij}(x)u_{x_j}\right)_{x_i} - a(x,t)u_{yy} + \alpha(x,t)u_t + c(x,t)u = \psi(x,t,y), \tag{1}$$

где $x_1 \cdot K(x) > 0$ при $x_1 \neq 0$, где $x_1 \in (\alpha_1,\beta_1)$.
Всюду ниже по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до n и будем предполагать, что все функции $\alpha(x,t)$, $c(x,t), a(x,t)$, встречающиеся в статье, вещественно значные, достаточно гладкие и периодические функции по переменной tс периодом T.

Предположим: $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $a_{ij}(\alpha_k) = a_{ji}(\beta_k), \forall k = \overline{1,n}$; $x \in \overline{\Omega},$ $\xi \in R^n$, $|\xi|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2$.

Кроме того, пусть выполнено следующее условие

(a). $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2$, где $a_0 - const > 0$.

Прямая задача.

Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$D_t^p u\big|_{t=0} = D_t^p u\big|_{t=T}; \, p = 0,1, \tag{2}$$

$$D_{x_i}^p u\big|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^p u\big|_{x_i=\beta_i}, \tag{3}$$

$$u_y\big|_{y=0} = u_y\big|_{y=\ell} = 0. \tag{4}$$

Отметим, что в работе Б.Н. Цыбикова [13] при определенных условиях на коэффициенты и правую часть уравнения (1), в случае $a(x,t) = 0$ была доказана корректность задачи (2)-(3) из пространства С.Л.Соболева $W_2^l(Q)$, когда $2 \leq l$-целое число.

В данной работе в случае $a(x,t)\neq 0$ при выполнении условий (2)-(4) и дополнительного условия на решение уравнения (1) ищутся в определенных классах как само решение, так и правая часть специального вида.

Пусть $\psi(x,t,y)=g(x,t,y)+h(x,t)\cdot f(x,t,y)$, где $g(x,t,y)$ и $f(x,t,y)-$ заданные функции, а функция $h(x,t)$ подлежит определению. При этом для нахождения функции $h(x,t)$ к обычной постановке периодической задачи добавляется еще одно условие.

Обратная задача.

Найти пару функций $(u(x,t,y),\ h(x,t))$, удовлетворяющих уравнению (1) в области Q, таких, что функция $u(x,t,y)$ удовлетворяет краевым условиям (2)-(4), дополнительному условию

$$u(x,t,\ell_0)=\phi(x,t), \quad 0<\ell_0<\ell<+\infty. \tag{5}$$

и вместе с функций $h(x,t)$ принадлежит классу

$$U=\{(u,h)|\,(1+D_y)u\in W_2^2(Q);h\in W_2^2(Q_1)\}.$$

Пусть коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции и пусть выполнены следующие условия относительно коэффициентов, правой части и заданной функции $\phi(x,t)$.

Будем требовать выполнения следующих условий.

Условие 1. Пусть выполнены вышеперечисленные условия для коэффициентов уравнения (1) и пусть выполнены следующие условия:

$$(1+D_y)g\in W_2^1(Q);\quad g(x,0,y)=g(x,T,y);\ g(x,t,\ell_0)=g_0(x,t)\in W_2^1(Q_1).$$

$$f\in C^{0,1,4}_{x,t,y}(Q);\ \ f(x,0,y)=f(x,T,y);\ D_y^pf(x,t,0)=D_y^pf(x,t,\ell)=0;p=1,3;$$

$$f(x,t,\ell_0)=f_0(x,t)\in C^{0,1}_{x,t}(Q_1),\ |f_0(x,t)|\geq\eta>0,0<\eta<1$$

Условие 2. Предположим, что заданная функция $\phi(x,t)$ удовлетворяет следующим условиям

$$\phi(x,t)\in W_2^3(Q_1);\quad D_t^q\phi\big|_{t=0}=D_t^q\phi\big|_{t=T};q=0,1,2;\ D_{x_i}^p\phi\big|_{x_i=\alpha_i}=D_{x_i}^p\phi\big|_{x_i=\beta_i};p=0,1.$$

Для доказательства разрешимости задачи (1)-(5) сначала используем метод Фурье. А именно решение задачи (1)-(5) ищем в виде

$$u(x,t,y)=\sum_{s=0}^{\infty}u_s(x,t)Y_s(y),$$

где функции $\{Y_s(y)\}=\{\sqrt{\frac{1}{\ell}},\sqrt{\frac{2}{\ell}}\cos\mu_sy,\ \mu_s=(\frac{2\pi s}{\ell}),\ s\in N,\ N-$ множества натуральных чисел$\}$ являются решениями спектральной задачи Штурма - Лиувиля с условиями Неймана. Известно, что система собственных функций $\{Y_s(y)\}-$ фундаментальна в пространстве $L_2(0,\ell)$ и в нем образует ортонормированный базис [11,14].

Теперь выполним некоторые формальности построения.

Для нахождения функции $h(x,t)$ рассмотрим следы уравнения (1) при $y=\ell_0$. Тогда из равенства

$$Lu(x,t,\ell_0)=K(x)\,u_{tt}(x,t,\ell_0)+\big(a_{ij}(x)\,u_{x_j}(x,t,\ell_0)\big)_{x_i}-$$
$$-a(x,t)u_{yy}(x,t,\ell_0)+\alpha(x,t)\,u_t(x,t,\ell_0)+c(x,t)\,u(x,t,\ell_0)=\psi(x,t,\ell_0)\ ,$$

учитывая условие (5), определяем неизвестную функцию $h(x,t)$ в виде

$$h(x,t)=\frac{1}{f_0}[\Phi+a\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\mu_s^2u_s(x,t)Y_s(\ell_0)],$$

здесь $\Phi=L_0\phi-g_0,\ L_0\phi=K\phi_{tt}+\alpha\phi_t+(a_{ij}(x)\phi_{x_i})_{x_j}+c\phi,\ g_0(x,t)=g(x,t,\ell_0)$; $f(x,t,\ell_0)=f_0(x,t)\neq 0$, а для определения функции $u_s(x,t);\ s=0,1,2,3,...$ получим в области $Q_1=\Omega\times(0,T)$ бесконечное число нагруженных систем уравнений смешанного типа первого рода второго порядка:

$$Lu_s=L_0u_s+a\mu_s^2\,u_s=g_s+\frac{f_s}{f_0}\cdot[\Phi+a\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\mu_m^2u_mY_m(\ell_0)]\equiv F_s, \tag{6}$$

с периодическими условиями

$$D_t^pu_s\big|_{t=0}=D_t^pu_s\big|_{t=T}, \tag{7}$$

$$D_{x_i}^pu_s\big|_{x_i=\alpha_i}=D_{x_i}^pu_s\big|_{x_i=\beta_i};\ p=0,1. \tag{8}$$

Здесь

$$f_s(x,t)=\int_0^{\ell}f(x,t,y)Y_s(y)dy;\quad g_s(x,t)=\int_0^{\ell}g(x,t,y)Y_s(y)dy.$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. Пусть выполнены вышеуказанные условия 1 и 2 для коэффициентов задачи (1)-(5); кроме того, пусть $2\alpha+\lambda K\geq\delta_1>0$, где $\lambda-const>0$, $-(\lambda c+c_t)\geq\delta_2>0$, $-(\lambda a+a_t)\geq\delta_3>0$, и пусть далее существует положительное число σ такое, что для $\delta_0=\min\{\delta_1,\lambda a_0,\delta_2+\delta_3(\frac{2\pi}{\ell})^2\}$ имеют место оценки $\lambda a_0-16\sigma=\delta_*>0$, $\delta_0-c(\sigma)>b_0>0$, где $c(\sigma)=\sigma^{-1}\lambda^2\max\{\|K\|_{C^1(\Omega)},\left\|a_{ij}(x)\right\|_{C^1(\Omega)}\}$ и

$$M\cdot\|a\|_{C(Q_1)}^2<\frac{1}{2}.$$

Здесь $M=\frac{(1+5\lambda^2)\|f\|^2_{C^{0,1,4}_{x,t,y}}(1+\|f_0\|^2_{C^1(Q_1)})}{\sigma\eta^4\delta_*}$.
Тогда функции

$$u(x,t,y)=\sum_{s=0}^{\infty}u_s(x,t)Y_s(y), \tag{A}$$

$$h(x,t)=\frac{1}{f_0}[\Phi+a\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\mu_s^2u_s(x,t)Y_s(\ell_0)], \tag{B}$$

являются единственным решением обратной задачи (1)-(5) из указанного класса U.
Доказательство. Докажем теорему 1 поэтапно. Сначала покажем, что функция $u(x,t,y)$ удовлетворяет дополнительному условию (5), т.е. $u(x,t,\ell_0)=\phi(x,t)$. Подойдем от противного. Пусть существует решение задачи (1)-(4) из класса U, такое, что $u(x,t,\ell_0)=\vartheta(x,t)\neq\phi(x,t)$. Тогда для функции $z(x,t)=\vartheta(x,t)-\phi(x,t)$ в области Q_1 из (6)-(8) получим

$$L_0z=K(x)z_{tt}+\left(a_{ij}(x)z_{x_j}\right)_{z_{x_i}}+\alpha(x,t)z_t+c(x,t)z=0 \tag{9}$$

$$D_t^p z\big|_{t=0} = D_t^p z\big|_{t=T} \tag{10}$$

$$D_{x_i}^p z\big|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^p z\big|_{x_i=\beta_i}; p = 0,1. \tag{11}$$

Теперь докажем единственность решения задачи (9)-(11).
Для этого рассмотрим тождество:

$$2(L_0 z, z_t - \frac{\lambda}{2} z)_0 = 0, \quad \lambda - const > 0$$

Интегрируя по частям тождество и учитывая условия теоремы 1 и условия (10),(11), получим неравенство $\|z\|_1 \leq 0$. Значит задача (9)-(11) имеет единственное решение $z(x,t) = 0$, отсюда следует что $\vartheta(x,t) = \phi(x,t)$, т.е. $u(x,t,\ell_0) = \phi(x,t)$ [4,5,13].

Семейство нагруженных уравнений третьего порядка с малым параметром

Разрешимость задачи (6)-(8) докажем методом "$\varepsilon-$регуляризации", а именно в области Q_1 рассмотрим семейство бесконечных нагруженных уравнений третьего порядка с малым параметром [3-5]:

$$L_\varepsilon u_{s,\varepsilon} = -\varepsilon \frac{\partial^3 u_{s,\varepsilon}}{\partial t^3} + L_0 u_{s,\varepsilon} + \mu_s^2 a u_{s,\varepsilon} =$$

$$= g_s + \frac{f_s}{f_0} \cdot [\Phi + a \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m^2 u_{m,\varepsilon} Y_m(\ell_0)] \equiv F_{s,\varepsilon}; \tag{12}$$

$$D_t^q u_{s,\varepsilon}\big|_{t=0} = D_t^q u_{s,\varepsilon}\big|_{t=T}, \ q = 0,1,2, \tag{13}$$

$$D_{x_i}^p u_{s,\varepsilon}\big|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^p u_{s,\varepsilon}\big|_{x_i=\beta_i}, \ p = 0,1, \tag{14}$$

где $0 < \varepsilon-$ малое положительное число, $D_t^q w = \frac{\partial^q w}{\partial t^q}$, $q = 1,2$; $D_t^0 w = w$.
В дальнейшем при доказательстве теоремы 1 и корректности задачи (12)-(14) нам понадобятся следующие обозначения и вспомогательные леммы. Определим пространства вектор-функции $W_i(Q_1) = \{\vartheta_s : \vartheta_s \in W_2^i(Q_1); i = 0,1,2; \ s = 0,1,2,3,...\}$ с конечной нормой

$$\langle \vartheta_s \rangle_i^2 = \sum_{s=0}^{\infty} (1 + \mu_s^2) \|\vartheta_s\|^2_{W_2^i(Q_1)}; i = 0,1,2. \tag{C}$$

Очевидно, что пространство $W_i\ (Q_1)$ с определённой нормой (C) является банаховым пространством [14]. Из определения пространств $W\ _2^i(Q_1)$, $i = 0,1,2$ следует
$W_2(Q_1) \subset W_1(Q_1) \subset W_0(Q_1)$.
Через $W(Q_1)$ ниже будем обозначать класс вектор-функций $\{\vartheta_{s,\varepsilon}(x,t)\}_{s=0}^{\infty}$ таких, что $\{\vartheta_{s,\varepsilon}(x,t)\}_{s=0}^{\infty} \in W_2(Q_1)$, $\{\frac{\partial^3 \vartheta_{s,\varepsilon}}{\partial t^3}\}_{s=0}^{\infty} \in W_0(Q_1)$, и удовлетворяющих соответствующим условиям (13),(14).
Определение. Решением задачи (12)-(14) будем называть вектор-функцию $\{\vartheta_{s,\varepsilon}(x,t)\} \in W$, удовлетворяющую уравнению (12). Теперь разрешимость задачи (12)-(14) докажем методом последовательных приближений [2,4,5].

Рассмотрим следующую задачу.

$$L_\varepsilon u_{s,\varepsilon}^{(l)} = -\varepsilon \frac{\partial^3 u_{s,\varepsilon}^{(l)}}{\partial t^3} + L_0\, u_{s,\varepsilon}^{(l)} + \mu_s^2\, a\, u_{s,\varepsilon}^{(l)} =$$

$$= g_s + \frac{f_s}{f_0} \cdot [\Phi + a \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m^2\, u_{m,\varepsilon}^{(l-1)}\, Y_m(\ell_0)] \equiv F_{s,\varepsilon}^{(l-1)}; \tag{15}$$

$$D_t^q u_{s,\varepsilon}^{(l)}\Big|_{t=0} = D_t^q u_{s,\varepsilon}^{(l)}\Big|_{t=T},\ q = 0,1,2, \tag{16}$$

$$D_{x_i}^p u_{s,\varepsilon}^{(l)}\Big|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^p u_{s,\varepsilon}^{(l)}\Big|_{x_i=\beta_i},\ p = 0,1 \tag{17}$$

где $l = 0,1,2,3...$

Лемма 1. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда для решения задачи (15)-(17) справедливы следующие оценки

$I).\quad \frac{\varepsilon}{\delta_*} \cdot \left\langle u_{s,\varepsilon tt}^{(l)} \right\rangle_0^2 + \left\langle u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\rangle_1^2 \le const(\widehat{l});$

$II).\quad \frac{\varepsilon}{\delta_*} \cdot \left\langle u_{s,\varepsilon ttt}^{(l)} \right\rangle_0^2 + \left\langle u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\rangle_2^2 \le const(\widehat{l}).$

где символом $const(\widehat{l})$ здесь и далее обозначена постоянная, не зависящая от l.

Доказательство леммы 1.

Применяя результаты работ [4,5], методы индукции, Галеркина и априорных оценок к тождествам

$$2(L_\varepsilon u_{s,\varepsilon}^{(l)}, \ell u_{s,\varepsilon}^{(l)})_0 = \quad 2(F_s(u_{s,\varepsilon}^{(l-1)}), \ell u_{s,\varepsilon}^{(l)})_0, \tag{18}$$

$$-2(L_\varepsilon u_{s,\varepsilon}^{(l)}, \frac{\partial^2 \ell u_{s,\varepsilon}^{(l)}}{\partial t^2})_0 = -2(F_s(u_{s,\varepsilon}^{(l-1)}), \frac{\partial^2 \ell u_{s,\varepsilon}^{(l)}}{\partial t^2})_0, \tag{19}$$

где $(\cdot,\cdot)_0$ -обычное скалярное произведение в $L_2(Q_1)$, $w = u_{s,\varepsilon}^{(l)}$,

$$\ell w = w_t - \frac{\lambda}{2} w;\ \frac{\partial^2 \ell w}{\partial t^2} = w_{ttt} - \frac{\lambda}{2}\, w_{tt}.$$

После интегрирования по частям, применяя неравенство Коши с σ и обобщённое неравенство Минковского к тождествам (18),(19), получим соответственно первую и вторую оценки. *Лемма 1 доказана.*

Теперь введём новую вектор-функцию из $W(Q_1)$ по формуле $\vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)} = u_{s,\varepsilon}^{(l)} - u_{s,\varepsilon}^{(l-1)}$; $\varepsilon > 0; s = 0,1,2......; \ l = 1,2,3.......$ и положим, что $\{\vartheta_{s,\varepsilon}^{(0)}\} = \{u_{s,\varepsilon}^{(0)}\}$.

Тогда для неё справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда для функции $\left\{\vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)}\right\} \in W(Q_1)$ справедливы следующие оценки

$III).\quad \frac{\varepsilon}{\delta_*} \left\langle \vartheta_{s,\varepsilon tt}^{(l)} \right\rangle_0^2 + \left\langle \vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\rangle_1^2 \le \left(\frac{1}{2}\right)^{(l-1)} const(\widehat{l}),$

$IV).\quad \frac{\varepsilon}{\delta_*} \left\langle \vartheta_{s,\varepsilon ttt}^{(l)} \right\rangle_0^2 + \left\langle \vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\rangle_2^2 \le \left(\frac{1}{2}\right)^{(l-1)} const(\widehat{l}).$

Доказательство леммы 2.

Так как для функции $\left\{u_{s,\varepsilon}^{(l)}\right\} \in W(Q_1)$ справедливы оценки I) и II), то, повторяя рассуждения леммы 1, получим утверждение леммы 2. *Лемма 2 доказана.*

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда задача (12)-(14) однозначно разрешима в $W(Q_1)$.
Доказательство. Теорему докажем методом сжимающих отображений [14]. Определим в пространстве $W(Q_1)$ оператор

$$u_{s,\varepsilon}^{(l)} = L_\varepsilon^{-1} F_s(u_{s,\varepsilon}^{(l-1)}) \equiv \Re u_{s,\varepsilon}^{(l-1)}$$

где $L_\varepsilon^{-1}-$ обратный оператор, соответствующий дифференциальному выражению (12) и условиям (13),(14).
1.Сначала покажем, что оператор $\Re$ отображает пространства $W(Q_1)$ в себя.
Пусть $\left\{u_{s,\varepsilon}^{(l-1)}\right\} \in W(Q_1)$, тогда для решения задачи (12)-(14) справедливо утверждение леммы 1, т.е. справедлива оценка II), отсюда для любых $l = 1,2,3...$ получим $\left\{u_{s,\varepsilon}^{(l)}\right\} \in W(Q_1)$. Таким образом, $\Re : W(Q_1) \to W(Q_1)$.
2. Покажем, что $\Re$ - сжимающий оператор.
Пусть $\left\{u_{s,\varepsilon}^{(l)}\right\}, \left\{u_{s,\varepsilon}^{(l-1)}\right\} \in W(Q_1)$. Рассмотрим новую функцию $\vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)} = u_{s,\varepsilon}^{(l)} - u_{s,\varepsilon}^{(l-1)}$. Для нее справедливо утверждение леммы 2, т.е. справедлива оценка IV),

$$\frac{\varepsilon}{\delta_*}\left\langle \vartheta_{s,\varepsilon ttt}^{(l)} \right\rangle_0^2 + \left\langle \vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\rangle_2^2 \le \left(\frac{1}{2}\right)^{(l-1)} const(\widehat{l}).$$

Таким образом, $\Re$ - сжимающий оператор. По известному принципу сжимающих отображений, задача (12)-(14) имеет единственное решение $\{u_{s,\varepsilon}\}$, принадлежащее пространству $W(Q_1)$ [14]. *Теорема 2 доказана.*

Семейство нагруженных уравнений смешанного типа второго порядка

Теперь докажем однозначную разрешимость задачи (6)-(8).
Ниже используем уравнение третьего порядка с малым параметром (12) в качестве "ε-регуляризирующего"уравнения для уравнения (6) [3-5].
Пусть $\{u_{s,\varepsilon}\} \in W(Q_1)$. При фиксированном $\varepsilon > 0$ эта функция есть единственное решение задачи (12)-(14). Тогда при $\varepsilon > 0$ для любого фиксированного $s = 0,1,2,3........$ справедливо неравенство IV). По теореме о слабой компактности [11,14], из ограниченной последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность функций такую, что при $\varepsilon_j \to 0$ решение $u_{s,\varepsilon_j} \to u_s$ слабо сходится в $W(Q_1)$. Покажем, что предельная функция $u_s(x,t)$ удовлетворяет уравнению (6) почти всюду в $W(Q_1)$. Действительно, так как подпоследовательность $\{u_{s,\varepsilon_j}\}$ слабо сходится в $W(Q_1)$, $u_{s,\varepsilon_j ttt} \in W_0(Q_1)$ а оператор L_0- линеен, то при фиксированном s имеем

$$Lu_s - F_s = \varepsilon_j \frac{\partial^3 u_{s,\varepsilon_j}}{\partial t^3} + L_0(u_{s,\varepsilon_j} - u_s). \tag{20}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon_j \to 0$, получаем $Lu_s = F_s$ почти всюду. При фиксированном s функция $u_s(x,t)$ будет единственным решением задачи (6)-(8) из $W_2(Q_1)$. Чтобы доказать единственность задачи (6)-(8), рассмотрим следующее тождество

$$2(Lu_s - F_s, \ell u_s)_0 = 0. \tag{23}$$

Применяя метод априорных оценок [4,5], при выполнении условий теоремы в $W_2(Q_1)$ получаем неравенство $\langle u_s \rangle_1 \le 0$. Отсюда следует единственность решения задачи (6)-(8).

Разрешимость обратной задачи

Так как выполнены все условия теоремы 1,2 и система собственных функций $\{Y_s(y)\}-$ фундаментальна в пространстве $L_2(0,\ell)$ и в нем образует ортонормированный базис, то, используя равенство Парсеваля-Стеклова

$$\|u\|_U^2 = \left\|(1+D_y)u\right\|^2_{W_2^2(Q)} = \sum_{s=0}^{\infty} (1+\mu_s^2) \, \|u_s\|^2_{W_2^2(Q_1)}$$

для решения задачи (6)-(8) получим решение задачи (1)-(5) из указанного класса U. *Тем самым доказана теорема 1.*

Список литературы

[1] Аниконов Ю. Е., *Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений*, Наука, Новосибирск, 1978, 120 с. [Anikonov YU. E., *Nekotorye metody issledovaniya mnogomernyh obratnyh zadach dlya differencial'nyh uravnenij*, Nauka, Novosibirsk, 1978, 120 pp.]

[2] Бубнов. Б. А., *К вопросу о разрешимости многомерных обратных задач для параболических и гиперболических уравнений*, Препринты №713, 714, ВЦ.СО АН СССР, Новосибирск, 1987, 44 с. [Bubnov. B. A., *K voprosu o razreshimosti mnogomernyh obratnyh zadach dlya parabolicheskih i giperbolicheskih uravnenij*, Preprinty №713, 714, VC.SO AN SSSR, Novosibirsk, 1987, 44 pp.]

[3] Врагов В. Н., *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики*, НГУ, Новосибирск, 1983, 84 с. [Vragov V. N., *Kraevye zadachi dlya neklassicheskih uravnenij matematicheskoj fiziki*, NGU, Novosibirsk, 1983, 84 pp.]

[4] Джамалов С. З., "Об одной линейной обратной задачи для уравнения Трикоми в трёхмерном пространстве", *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2016, № 2(13), 12-17. [Dzhamalov S. Z., "Ob odnoj linejnoj obratnoj zadachi dlya uravneniya Trikomi v tryohmernom prostranstve", *Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskie nauki*, 2016, № 2(13), 12-17].

[5] Джамалов С. З., "Об одной линейной обратной задаче для уравнения смешанного типа первого рода второго порядка в трехмерном пространстве", *УзМЖ*, 2017, № 2, 58-65. [Dzhamalov S. Z., "Ob odnoj linejnoj obratnoj zadache dlya uravneniya smeshannogo tipa pervogo roda vtorogo poryadka v trekhmernom prostranstve", *UzMZH*, 2017, № 2, 58-65].

[6] Дженалиев М. Т., *К теории краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений*, Институт теоретической и прикладной математики, Алматы, 1995. [Dzhenaliev M. T., *K teorii kraevyh zadach dlya nagruzhennyh differencial'nyh uravnenij*, Institut teoreticheskoj i prikladnoj matematiki, Almaty, 1995].

[7] Кабанихин С. И., *Обратные и некорректные задачи*, Сибирское научное издательство, Новосибирск, 2009, 458 с. [Kabanihin S. I., *Obratnye i nekorrektnye zadachi*, Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, Novosibirsk, 2009, 458 pp.]

[8] Кожанов А. И., "Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи", *Журн. вычислит, математики и мат. физики*, **44**:4 (2004), 694-716. [Kozhanov A. I., "Nelinejnye nagruzhennye uravneniya i obratnye zadachi", *Zhurn. vychislit, matematiki i mat. fiziki*, **44**:4 (2004), 694-716].

[9] Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В., "Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа", *Изв, вузов. Математика*, 2011, № 2, 71-85. [Sabitov K. B., Martem'yanova N. V., "Nelokal'naya obratnaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo tipa", *Izv, vuzov. Matematika*, 2011, № 2, 71-85].

[10] Лаврентьев М. М, Романов В. Г, Васильев В. Г., *Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений*, Наука, Новосибирск, 1969, 67 с. [Lavrent'ev M. M, Romanov V. G, Vasil'ev V. G., *Mnogomernye obratnye zadachi dlya differencial'nyh uravnenij*, Nauka, Novosibirsk, 1969, 67 pp.]

[11] Ладыженская О. А., *Краевые задачи математической физики*, Наука, М, 1973. [Ladyzhenskaya O. A., *Kraevye zadachi matematicheskoj fiziki*, Nauka, M, 1973].

[12] Нахушев А. М., *Дифференц. уравнения*, **19**:1 (1983), 86-94. [Nahushev A. M., *Differenc. uravneniya*, **19**:1 (1983), 86-94].

[13] Цыбиков Б. Н., "О корректности периодической задачи для многомерного уравнения смешанного типа", *Неклассические уравнения математической физики*, Новосибирск, 1986, 201-206. [Cybikov B. N., "O korrektnosti periodicheskoj zadachi dlya mnogomernogo uravneniya smeshannogo tipa", *Neklassicheskie uravneniya matematicheskoj fiziki*, Novosibirsk, 1986, 201-206].

[14] Триногин В. А., *Функциональный анализ*, Наука, М, 1980, 494 с. [Trinogin V. A., *Funkcional'nyj analiz*, Nauka, M, 1980, 494 pp.]

Для цитирования: Джамалов С. З. Об одной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа первого рода, второго порядка с периодическими условиями // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 4(24). C. 10-18. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-10-18

For citation: Dzhamalov S. Z. On an inverse problem for the multidimensional equation mixed type of the first kind of the second order with periodic conditions, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2018, **24**: 4, 10-18. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-10-18

Поступила в редакцию / Original article submitted: 17.08.2018