

УДК 551.511+004.942

## **МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ КОНВЕКТИВНОГО ОБЛАКА**

**В. А. Шаповалов**

Высокогорный геофизический институт, 360030, г. Нальчик, пр. Ленина, 2  
E-mail: vet555\_83@mail.ru

Разработана трехмерная численная модель конвективного облака с учетом термодинамических, микрофизических и электрических процессов. В модели используется детальная микрофизика. Система уравнений модели облака, описывающая изменение во времени динамических и микрофизических характеристик облака, состоит из 3 уравнений движения, уравнений баланса тепла и влаги, 137 уравнений, описывающих спектр облачных капель, кристаллов и частиц микровыбросов. Помимо этого, для того чтобы решение удовлетворяло уравнению неразрывности, необходимо на каждом временном шаге решать трехмерное эллиптическое уравнение для возмущения давления. Одним из методов, широко используемых для решения таких задач, является метод расщепления, разработанный Г. И. Марчуком, усовершенствованный вариант этого метода — схема предиктор с дивергентным корректором — успешно применялся при моделировании кучевых облаков Р. Пастушковым. Проведенные исследования, показали, что, несмотря на определенную сложность в реализации этой схемы, она обеспечивает необходимую устойчивость счета, аппроксимацию 2-го порядка точности по пространству и времени и является консервативной. Используются методы расщепления по физическим процессам и покомпонентного расщепления (локально - одномерные схемы). Уравнения модели облака в конечно-разностном виде аппроксимировались центральными и направленными разностями для пространственных переменных, а также направленными разностями по времени. Получаемая при этом алгебраическая система решалась методом прогонки.

*Ключевые слова: математическое моделирование, трехмерная модель, конвективное облако, система уравнений модели, предиктор - корректор, локально - одномерные схемы.*

© Шаповалов В. А., 2018

## Введение

Наряду с успехами, достигнутыми в физике облаков за последние десятилетия, следует отметить, что многие вопросы еще остаются малоизученными. Это относится, прежде всего, к процессам в облаках с участием ледяных частиц, электричеству облаков, взаимодействию процессов в облаках и т.д. Разработаны модели облаков различной сложности в нашей стране [1, 2, 3, 4] и за рубежом [5, 6, 7, 8, 9, 10]. Направления исследований по физике облаков следующие:

- совершенствование математических моделей в плане уточнения и расширения учитываемых в них процессов;
- использование более эффективных методов проведения расчетов;
- усовершенствование способов формирования входных данных;
- изучение закономерностей формирования макро- и микроструктурных характеристик конвективных облаков при естественном развитии и активном воздействии;
- исследование взаимодействия физических процессов в облаках и облаков с окружающей атмосферой.

На современном этапе развития физики облаков в значительной степени повышается роль математического моделирования, которое является основным средством изучения сложных систем, к которым относятся конвективные и грозоградные облака [1, 10, 11, 12, 13].

## Описание модели

Разработанная трехмерная нестационарная численная модель конвективных облаков с детальным учетом термодинамических, микрофизических и электрических процессов отличается тем, что используется детальная микрофизика с несколькими десятками градаций размеров жидких и твердых частиц. Учитываются: накопление зарядов в облаке, потенциал и напряженность электрического поля, электрическая коагуляция облачных частиц. Гидротермодинамический блок модели состоит из уравнений движения, описывающих влажную конвекцию в приближении Буссинеска, в которых учитывается адвективный и турбулентный перенос, силы плавучести, трения и барических градиентов. Микрофизический блок модели описывает процессы нуклеации, конденсации, коагуляции капель с каплями, сублимации, аккреции, замерзания капель, осаждения облачных частиц в поле силы тяжести, их перенос воздушными потоками, а также взаимодействие облачных частиц под влиянием электрического поля облака [1, 14]. Постановка задачи математической модели конвективного облака включает следующие уравнения термодинамики, микрофизики и электростатики:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)u &= -\nabla\pi' + \Delta'u + lv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)v &= -\nabla\pi' + \Delta'v - lv, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)w = -\nabla\pi' + \Delta'w + g\left(\frac{\theta'}{\theta_0} + 0,61s' - Q_s\right),$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \sigma w, \quad (2)$$

уравнения термодинамики

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \theta &= \frac{L_C \theta}{c_p T} \frac{\delta M_C}{\delta t} + \frac{L_S \theta}{c_p T} \frac{\delta M_S}{\delta t} + \frac{L_F \theta}{c_p T} \frac{\delta M_F}{\delta t} + \Delta' \theta, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) s &= -\frac{\delta M_C}{\delta t} - \frac{\delta M_S}{\delta t} + \Delta' s, \end{aligned} \quad (3)$$

уравнения для функций распределения капель, кристаллов и осколков замерзания по массам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + u \frac{\partial f_1}{\partial x} + v \frac{\partial f_1}{\partial y} + (w - V_1) \frac{\partial f_1}{\partial z} &= \\ &= \left( \frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_C + \left( \frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_{CG} + \left( \frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_{AC} + \left( \frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_{BR} + \left( \frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_F + \Delta' f_1 + I_1, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + u \frac{\partial f_2}{\partial x} + v \frac{\partial f_2}{\partial y} + (w - V_2) \frac{\partial f_2}{\partial z} = \left( \frac{\partial f_2}{\partial t} \right)_S + \left( \frac{\partial f_2}{\partial t} \right)_{AC} + \left( \frac{\partial f_2}{\partial t} \right)_F + \Delta' f_2 + I_2 + I, \quad (4)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial t} + u \frac{\partial f_3}{\partial x} + v \frac{\partial f_3}{\partial y} + (w - V_2) \frac{\partial f_3}{\partial z} = \left( \frac{\partial f_3}{\partial t} \right)_F + \left( \frac{\partial f_3}{\partial t} \right)_{AC} + \Delta' f_3,$$

уравнение Пуассона для потенциала электростатического поля

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0}, \quad (5)$$

Начальные условия для уравнений (1)-(5) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u(\vec{r}, 0) &= u_0(\vec{r}), \quad v(\vec{r}, 0) = v_0(\vec{r}), \quad w(\vec{r}, 0) = w_0(\vec{r}), \quad \theta(\vec{r}, 0) = \theta_0(\vec{r}), \quad s(\vec{r}, 0) = s_0(\vec{r}), \\ f_1(\vec{r}, m, 0) &= f_2(\vec{r}, m, 0) = f_3(\vec{r}, m, 0) = 0, \quad \rho_-(\vec{r}, 0) = \rho_+(\vec{r}, 0) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Граничные условия:

$$u(\vec{r}, t) = u_0(\vec{r}), \quad v(\vec{r}, t) = v_0(\vec{r}), \quad w(\vec{r}, t) = w_0(\vec{r}), \quad \theta(\vec{r}, t) = \theta_0(\vec{r}), \quad s(\vec{r}, t) = s_0(\vec{r}) \Big|_{x=0, L_x; y=0, L_y; z=L_z}$$

$$u(\vec{r}, t) = v(\vec{r}, t) = w(\vec{r}, t) = 0, \quad \theta(\vec{r}, t) = \theta_0(\vec{r}), \quad s(\vec{r}, t) = s_0(\vec{r}) \Big|_{z=0}$$

$$f_1(\vec{r}, m, t) = f_2(\vec{r}, m, t) = f_3(\vec{r}, m, t) = 0 \Big|_{x=0, L_x; y=0, L_y; z=L_z}$$

$$\frac{\partial f_1(\vec{r}, m, t)}{\partial z} = \frac{\partial f_2(\vec{r}, m, t)}{\partial z} = \frac{\partial f_3(\vec{r}, m, t)}{\partial z} = 0 \Big|_{z=0}$$

$$\frac{\partial U(\vec{r}, t)}{\partial x} = 0 \Big|_{x=0, L_x}, \quad \frac{\partial U(\vec{r}, t)}{\partial y} = 0 \Big|_{y=0, L_y}, \quad \frac{\partial U(\vec{r}, t)}{\partial z} = 0 \Big|_{z=L_z}, \quad U(\vec{r}, t) = 0 \Big|_{z=0}. \quad (7)$$

Система уравнений применяется для пространственно-временной области

$$0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z, 0 \leq m < \infty, t > 0. \quad (8)$$

Используются обозначения:

$$\left(\vec{V} \cdot \nabla\right) \equiv u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}, \Delta' = \frac{\partial}{\partial x} K \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial}{\partial z},$$

$\vec{r} = \{x, y, z\}$ - вектор координат,  $\vec{V} = \{u, v, w\}$  - вектор скорости,  $u(\vec{r})$ ,  $v(\vec{r})$ ,  $w(\vec{r})$ - компоненты вектора скорости;  $l$  - параметр, учитывающий инерционные силы;  $\theta(\vec{r})$  - потенциальная температура;  $\pi(\vec{r}) = c_p \bar{\theta} (P(z)/1000)^{R/c_p}$  - безразмерное давление;  $\bar{\theta}$  - средняя потенциальная температура;  $R$  - газовая постоянная;  $s(\vec{r})$ - удельная влажность воздуха;  $Q_S(\vec{r})$  - суммарное отношение смеси жидкой и твердой фаз в облаке;  $\sigma(z)$  - параметр, учитывающий изменение плотности воздуха с высотой;  $P(z)$  и  $T(\vec{r})$  - соответственно давление и температура;  $c_p$ - теплоемкость воздуха при постоянном давлении;  $L_C$ ,  $L_S$ ,  $L_F$  - соответственно удельная теплота конденсации, сублимации и замерзания;  $\pi'(\vec{r})$ ,  $\theta'(\vec{r})$ ,  $s'(\vec{r})$ - отклонения безразмерного давления, потенциальной температуры и удельной влажности от их фоновых значений в окружающей атмосфере  $\pi_0(\vec{r})$ ,  $\theta_0(\vec{r})$ ,  $s_0(\vec{r})$ ;  $\frac{\delta M_C}{\delta t}$ ,  $\frac{\delta M_S}{\delta t}$ - изменения удельной влажности за счет диффузии пара на капли и кристаллы;  $\frac{\delta M_F}{\delta t}$  - масса капельной воды, замерзающей в единицу времени в единицу объема воздуха;  $K(\vec{r})$  - коэффициент турбулентной диффузии.  $V_1(m)$ ,  $V_2(m)$  - установившиеся скорости падения жидких и твердых частиц;  $\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_C$ ,  $\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{CG}$ ,  $\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{AC}$ ,  $\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{BR}$ ,  $\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_F$  - изменения функции распределения капель за счет микрофизических процессов конденсации, коагуляции капель, аккреции капель и кристаллов, дробления и замерзания соответственно;  $\left(\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)_S$ ,  $\left(\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)_{AC}$ ,  $\left(\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)_F$  - изменения функции распределения кристаллов за счет сублимации, аккреции и замерзания капель;  $\left(\frac{\partial f_3}{\partial t}\right)_F$ ,  $\left(\frac{\partial f_3}{\partial t}\right)_{AC}$  - изменения функции распределения  $f_3(\vec{r}, m, t)$  за счет образования осколков при спонтанном замерзании переохлажденных облачных капель и их аккреции с кристаллами;  $I_1$  и  $I_2$  - источники капель и кристаллов;  $I$  - источник искусственных кристаллов при активном воздействии;  $\epsilon_0$  - диэлектрическая постоянная вакуума.

Для границ пространственной области используются обозначения  $0, L_x, 0, L_y$  и  $0, L_z$ .

Для описания процессов в облаке применяются интегро-дифференциальные уравнения как в работах [2, 15, 16].

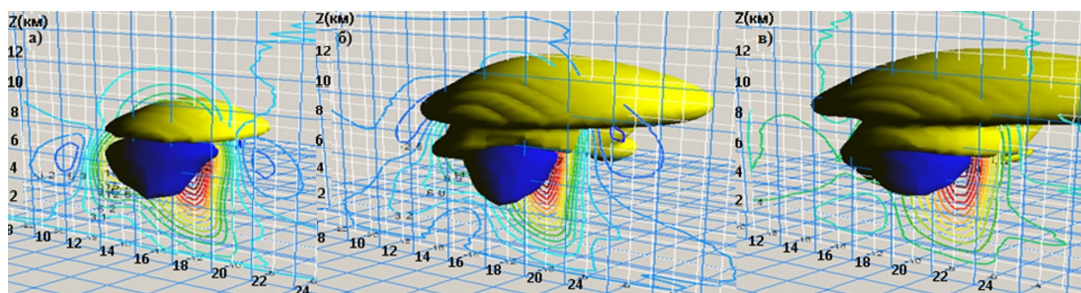


Рисунок. Пример результатов моделирования облака

## Методика численного решения

При решении уравнений модели в частных производных использованы методы расщепления по физическим процессам и покомпонентного расщепления (локально - одномерные схемы) [17, 18, 19].

Согласно работе [20], дифференциальный оператор  $A$  и соответствующий ему разностный оператор  $\Lambda$  можно представить в виде суммы операторов, каждый из которых включает производные лишь по одной пространственной переменной и разности лишь вдоль одного направления соответственно. Всего пространственных направлений  $N$ . Такие дифференциальные и разностные операторы будем называть локально - одномерными. И дифференциальный, и разностный операторы записываются в виде суммы локально - одномерных:

$$A = \sum_{i=1}^N A_i, \quad \Lambda = \sum_{i=1}^N \Lambda_i. \quad (9)$$

Для однородной задачи можно выписать схему расщепления по направлениям:

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/N} - u^n}{\tau} + \Lambda_1 u^{n+1/N} &= 0, \\ \frac{u^{n+2/N} - u^{n+1/N}}{\tau} + \Lambda_2 u^{n+2/N} &= 0, \\ &\dots \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+(N-1)/N}}{\tau} + \Lambda_n u^{n+1} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Получена система разностных уравнений, каждое из которых не аппроксимирует исходное дифференциальное, но может быть легко решено (методом прогонки вдоль соответствующего направления, если разностные операторы содержат лишь первые и вторые разности). Тем не менее, последовательно примененные друг за другом, они дают на следующем слое по времени решение с разумной точностью [19, 20]. Говорят, что имеет место суммарная аппроксимация – результирующий оператор послыонного перехода получился аппроксимирующим. Описанный выше способ называется иногда методом дробных шагов.

Решение систем уравнений типа (1)–(8) выполняется с использованием явных и неявных методов [18, 21].

Применение неявных разностных схем к решению систем уравнений в частных производных параболического типа приводит к системам алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Такие системы уравнений получаются также в случае решения уравнения Лапласа блочными итерационными методами [17, 21].

Методы решения для уравнения параболического типа на основе неявных разностных схем и алгоритмы прогонки для решения систем линейных уравнений с трехдиагональной матрицей изложены в работах [20, 22].

Уравнения (9)–(10) решались по методике предиктор-корректор, которая позволяет рассчитать изменение  $\phi$  в результате переноса облачных частиц ветром и турбулентными вихрями со вторым порядком точности по времени и пространству [2, 22].

Интегралы рассчитывались по схеме, представленной в работе [16].

При расчете оператора  $\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)$  предполагалось, что мгновенно дробятся все образующиеся в результате коагуляции капли, для которых  $j \geq 60$  ( $r(j) \geq 3565$  мкм). Выражение для  $Q(m, m')$  в переменных  $j$  и  $j'$  имеет вид:

$$Q(j', j) = \frac{7a}{j_0} \frac{r(j)}{r(j')} \exp \left[ -7 \frac{r(j)}{r(j')} \right], \quad (11)$$

где  $a = [(\xi^3 + 0,428\xi^2 + 0,122\xi + 0,0175) \exp(-7\xi) - 1,43 \cdot 10^{-3}]^{-1}$ ,  $\xi = r(1)/r(j')$ .

При вычислениях использованы шаги  $\Delta t/10$  для процесса конденсации. Контроль точности вычислений выполнялся путем определения баланса массы в системе.

Система уравнений (1)–(16), описывающая изменение во времени динамических и микрофизических характеристик облака, состоит из 3 уравнений движения, уравнений баланса тепла и влаги, (61+75+1=137) уравнений, описывающих спектр облачных капель, кристаллов и частиц микровыбросов. Помимо этого, для того чтобы решение удовлетворяло уравнению неразрывности, необходимо на каждом временном шаге решать трехмерное эллиптическое уравнение для возмущения давления. Одним из методов, широко используемых для решения таких задач, является метод расщепления, разработанный Г. И. Марчуком [19], усовершенствованный вариант этого метода – схема предиктор с дивергентным корректором – успешно применялся при моделировании кучевых облаков Р. Пастушковым [23]. Проведенные в [2] исследования, показали, что, несмотря на определенную сложность в реализации этой схемы, она обеспечивает необходимую устойчивость счета, аппроксимацию 2-го порядка точности по пространству и времени и является консервативной.

Реализация метода расщепления заключается в последовательном учете отдельных операторов системы уравнений: на первой половине шага  $\Delta t/2$  в три этапа решались уравнения, определяющие предиктор:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^{m+1/6}}{\partial t} + u^m \frac{\partial \varphi^{m+1/6}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} K^m \frac{\partial \varphi^{m+1/6}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \varphi^{m+2/6}}{\partial t} + v^m \frac{\partial \varphi^{m+2/6}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} K^m \frac{\partial \varphi^{m+2/6}}{\partial y}, \\ \frac{\partial \varphi^{m+3/6}}{\partial t} + w^m \frac{\partial \varphi^{m+3/6}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} K^m \frac{\partial \varphi^{m+3/6}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $m$  – номер итерации по времени,  $t_m \leq t \leq t_m + \Delta t/2$ ,  $\varphi^m = \{u^m, v^m, w^m, \theta^m, s^m \dots\}$  4-й этап заключался в корректировке решения с помощью найденного для момента времени  $t_m + \Delta t/2$  значения  $\varphi^{m+3/6}$ :

$$\begin{aligned} \varphi^{m+4/6} &= \varphi^m - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u\varphi)^{m+3/6} + \frac{\partial}{\partial y} (v\varphi)^{m+3/6} + \frac{\partial}{\partial z} (w\varphi)^{m+3/6} \right] \Delta t + \\ &+ \left[ \varphi^{m+3/6} \left( \frac{\partial u^{m+3/6}}{\partial x} + \frac{\partial v^{m+3/6}}{\partial y} + \frac{\partial w^{m+3/6}}{\partial z} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial x} K^m \frac{\partial \varphi^{m+3/6}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K^m \frac{\partial \varphi^{m+3/6}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K^m \frac{\partial \varphi^{m+3/6}}{\partial z} \right] \Delta t. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнения (12) в конечно-разностном виде аппроксимировались центральными и направленными разностями для пространственных переменных, а также направленными разностями по времени. Получаемая при этом алгебраическая система решалась методом прогонки. Уравнение (13) решается по явной схеме.

На 5-м этапе проводится расчет процесса конденсации-испарения водяного пара в облаке. Алгоритм вычислений детально изложен в работе [2], он основан на использовании более мелкого шага по времени, например,  $\Delta t/10$  и менее, обеспечивающего устойчивость счета.

Новые значения функций распределения  $f_1^{m+1}$ ,  $f_2^{m+1}$ ,  $f_3^{m+1}$  для момента времени  $t_{m+1} = t_m + \Delta t$  определяются окончательно после вычисления процессов коагуляции, распада и седиментации, из которых наиболее сложно рассчитывать коагуляционные

интегралы. В модели использовалась методика [24], основанная на 6-точечной логарифмической интерполяции подинтегральной функции, а также на точных оценках интегральных сумм. Эта методика оценки интегральных сумм применяется и для расчета распада облачных капель.

На заключительном этапе решается система уравнений, описывающая адаптацию динамических полей [2]:

$$\begin{aligned} u^{m+1} &= u^{m+4/6} - \frac{\partial \pi'}{\partial x} \Delta t, \\ v^{m+1} &= v^{m+4/6} - \frac{\partial \pi'}{\partial y} \Delta t, \\ w^{m+1} &= w^{m+4/6} - \frac{\partial \pi'}{\partial z} \Delta t + g \Delta t \left[ \frac{\theta^{m+1} - \theta_0(z)}{\theta_0(z)} + 0,61(s^{m+1} - s_0(z)) - s_L^{m+1} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Из системы (14) совместно с уравнением неразрывности получено трехмерное эллиптическое уравнение для возмущения давления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \pi'^{m+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \pi'^{m+1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \pi'^{m+1}}{\partial z^2} - \sigma \frac{\partial^2 \pi'^{m+1}}{\partial z^2} &= F^{m+1}(x, y, z), \\ F^{m+1} &= \frac{1}{\Delta t} \left[ (\nabla \vec{V})^{m+4/6} - \sigma w^{m+4/6} \right] + \\ &+ g \left( \frac{\partial}{\partial z} - \sigma \right) \left[ \frac{\theta^{m+1} - \theta_0(z)}{\theta_0(z)} + 0,61(s^{m+1} - s_0(z)) - s_L^{m+1} \right], \\ \frac{\partial \pi'}{\partial x} \Big|_{x=0, L_x} &= \frac{\partial \pi'}{\partial y} \Big|_{y=0, L_y} = 0, \quad \frac{\partial \pi'}{\partial z} \Big|_{z=0, L_z} = g \left( \frac{\theta'}{\theta_0} + 0,61s' - s_L \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Для решения уравнения (15) использовался неявный двухшаговый метод блочной верхней релаксации [19, 21]. Уравнение (15) в конечно-разностном виде записывается так:

$$\begin{aligned} \pi_{i+1,j,k} + \pi_{i-1,j,k} + \pi_{i,j+1,k} + \pi_{i,j-1,k} + \pi_{i,j,k+1} + (1 + \sigma \cdot h) \pi_{i,j,k-1} &= \\ &= (6 + \sigma \cdot h) \pi_{i,j,k} + F_{ijk} h^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь индексы  $i, j, k$  соответствуют переменным по осям  $x, y, z$ ;  $h = \Delta x = \Delta y = \Delta z$  – шаг сетки.

Решение уравнения (16) методом - блочной релаксации разбивается на два этапа. При этом блок (группа) переменных, по которой проводится релаксация, обычно выбирается вдоль какой-нибудь оси. Так, для оси  $z$  (индекс  $k$ ) для 1-го этапа  $m$ -й итерации имеем:

$$\begin{aligned} \pi_{i,j,k}^{m+1/2} - \frac{1 + \sigma h}{6 + \sigma h} \pi_{i,j,k-1}^{m+1/2} - \frac{1}{6 + \sigma h} \pi_{i,j,k+1}^{m+1/2} &= \\ = \frac{1}{6 + \sigma h} \left[ \pi_{i-1,j,k}^{m+1} + \pi_{i,j-1,k}^{m+1} + \pi_{i,j+1,k}^m + \pi_{i+1,j,k}^m - F_{ijk} h^2 \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Правая часть (17) на этом этапе известна, поскольку перебор неизвестных проводится в порядке возрастания индексов. Таким образом, уравнение (16) может быть решено обычным методом прогонки.

На 2-м этапе находятся значения  $\pi_{ilk}^{m+1}$ , окончательные для данной итерации

$$\pi_{ilk}^{m+1} = \tau \pi_{ilk}^{m+1/2} + (1 - \tau) \pi_{ilk}^m. \quad (18)$$

Параметр релаксации  $\tau$  выбирается на основе экспериментов, в работе [17] по численным методам рекомендовано значение 1,8.

Аппроксимация уравнений модели в узлах пространственной сетки приводит к большой системе уравнений ( $\approx 10^6$  узлов сетки). Особенность систем, описываемых уравнениями параболического типа, такова, что вычислительные схемы могут применяться одновременно для групп переменных [20, 22]. Для ускорения расчетов применяется распараллеливание потоков на отдельных ядрах вычислительной системы или на графических процессорах GPU [25].

## Заключение

В статье описана методика численного решения системы уравнений трехмерной модели конвективного облака, которая представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных с параболической главной частью. Результаты исследований по полученной модели показали хорошее согласие с данными радиолокационных наблюдений облаков и данными измерений их характеристик, что свидетельствует об адекватности модели и удовлетворительной точности вычислительных схем. Эта работа может быть использована как методическая при подготовке учебных курсов по теории физики облаков, в научных изысканиях для детального количественного анализа параметров облака в ходе его эволюции, а так же имеет самостоятельный научный интерес в теории сложных динамических систем. Дальнейшее развитие этой работы представляет обобщение полученного подхода на случай множества взаимодействующих облачных ячеек и использование моделей подстилающей поверхности. Также будут развиваться методы распараллеливания вычислений на многопроцессорных системах и графических ускорителях.

## Список литературы

- [1] Ашабоков Б. А. и др. Физика градовых облаков и активных воздействий на них: состояние и направления развития. Нальчик: Печатный двор, 2013. 216 с.
- [2] Коган Е. Л., Мазин И. П., Сергеев Б. Н., Хворостьянов В. И. Численное моделирование облаков. М.: Гидрометеиздат, 1984. 186 с.
- [3] Ашабоков Б. А., Бейтуганов М. Н., Куповых Г. В., Шаповалов А. В., Продан К. А., Шаповалов В. А. Численное моделирование электрических характеристик конвективных облаков // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. 2012. №6. С. 65–68.
- [4] Довгальюк Ю. А. и др. Концепция разработки трехмерной модели осадкообразующего конвективного облака II. Микрофизический блок модели // Труды Главной геофизической обсерватории им. А. И. Воейков. 2010. Т. 562. С. 7–39.
- [5] Liu X. L., Niu S. J. Numerical Simulation of Macro- and Micro-structures of Intense Convective Clouds with a Spectral Bin Microphysics Model // Adv. Atmos. Sci. 2010. vol. 27(5). pp. 1078–1088.
- [6] Lynn B., Khain, A. P., Dudhia J., Rosenfeld D., Pokrovsky A., Seifert A. Spectral (bin) microphysics coupled with a mesoscale model (MM5). Part 1 // Mon. Wea. Rev. 2005. vol. 133. pp. 44–71.



- [7] Mansell E. R., MacGorman D. R., Ziegler C. L., Straka J. M. Charge structure and lightning sensitivity in a simulated multicell thunderstorm // J. Geophys. Res. 2005. vol. 110. D12101.
- [8] Pruppacher H. R., Klett J. D. Microphysics of clouds and precipitation, 2nd Edition. Netherlands: Springer, 2010. 976 с.
- [9] Straka J. M. Cloud and precipitation microphysics. Principles and Parameterizations: Cambridge University Press, 2009. 392 p.
- [10] Wang P. K. Physics and Dynamics of Clouds and Precipitation: Cambridge University Press, 2013. 467 p.
- [11] Ашабоков Б. А., Шаповалов В. А., Езаова А. Г., Шаповалов М. А. Исследование образования ледяной фазы в мощных конвективных облаках на основе трехмерной численной модели // Естественные и технические науки. 2014. №5(73). С. 78–83.
- [12] Ashabokov B. A., Shapovalov A. V., Kuliev D. D., Prodan K. A., Shapovalov V. A. Numerical Simulation of Thermodynamic, Microstructural, and Electric Characteristics of Convective Clouds at the Growth and Mature Stages // Radiophysics and Quantum Electronics. 2014. vol. 56. no. 11. pp. 811–817.
- [13] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. М., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967. 568 с.
- [14] Ашабоков Б. А., Федченко Л. М., Шаповалов А. В., Езаова А. Г., Шаповалов М. А. Численные эксперименты по исследованию формирования микроструктурных характеристик грозоградовых облаков // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: естественные науки. 2014. №3(181). С. 40–44.
- [15] Бекряев В. И., Гурович М. В. Нестационарная численная модель Сb // Труды ГГО. 1991. Т. 538. С. 109–121.
- [16] Бекряев В. И. Некоторые вопросы физики облаков и активных воздействий на них. СПб.: Изд-во РГГМУ, 2007. 336 с.
- [17] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 557 с.
- [18] Марчук Г. И. Численные методы в прогнозе погоды. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 353 с.
- [19] Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
- [20] Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1. М.: Мир, 1990. 384 с.
- [21] Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
- [22] Мезингер Ф., Аракава А. Численные методы, используемые в атмосферных моделях. Перевод с английского под редакцией В. П. Садокова. Т. 2. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 360 с.
- [23] Пастушков Р. С. Численное моделирование взаимодействия конвективных облаков с окружающей их атмосферой // Труды ЦАО. 1972. Т. 108. С. 125.
- [24] Khvorostyanov V.I., Curry J.A. Thermodynamics, Kinetics, and Microphysics of Clouds: Cambridge University Press, 2014. 782 p.
- [25] Березин С. Б., Каргапольцев И. С., Марковский Н. Д., Сахарных Н. А. Параллельная реализация метода расщепления для системы из нескольких GPU с применением в задачах аэрогидродинамики // Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. 2012. №5(2). С. 246–252.

## Список литературы (ГОСТ)

- [1] Ашабоков Б. А. и др., *Физика градовых облаков и активных воздействий на них: состояние и направления развития*, Печатный двор, Нальчик, 2013, 216 с. [Ashabokov B. A. i dr., *Fizika gradovykh oblakov i aktivnykh vozdeystvij na nih: sostoyanie i napravleniya razvitiya*, Pechatnyj dvor, Nal'chik, 2013, 216 pp.]

- [2] Коган Е. Л., Мазин И. П., Сергеев Б. Н., Хворостьянов В. И., *Численное моделирование облаков*, Гидрометеиздат, М., 1984, 186 с. [Kogan E. L., Mazin I. P., Sergeev B. N., Hvorost'yanov V. I., *CHislennoe modelirovanie oblakov*, Gidrometeoizdat, M., 1984, 186 pp.]
- [3] Ашабоков Б. А., Бейтуганов М. Н., Куповых Г. В., Шаповалов А. В., Продан К. А., Шаповалов В. А., “Численное моделирование электрических характеристик конвективных облаков”, *Известия вузов. Северо-Кавказский регион*, 2012, № 6, 65–68. [Ashabokov B. A., Bejtuganov M. N., Kupovyh G. V., SHapovalov A. V., Prodan K. A., SHapovalov V. A., “CHislennoe modelirovanie ehlektricheskikh harakteristik konvektivnyh oblakov”, *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskij region*, 2012, № 6, 65–68].
- [4] Довгалюк Ю. А. и др., “Концепция разработки трехмерной модели осадкообразующего конвективного облака II. Микрофизический блок модели”, *Труды Главной геофизической обсерватории им. А. И. Воейкова*, 2010, № 562, 7–39. [Dovgalyuk YU. A. i dr., “Konceptsiya razrabotki trekhmernoj modeli osadkoobrazuyushchego konvektivnogo oblaka II. Mikrofizicheskij blok modeli”, *Trudy Glavnoj geofizicheskoy observatorii im. A. I. Voejkova*, 2010, № 562, 7–39].
- [5] Liu X. L., Niu S. J., “Numerical Simulation of Macro- and Micro-structures of Intense Convective Clouds with a Spectral Bin Microphysics Model”, *Adv. Atmos. Sci.*, 2010, № 27(5), 1078–1088.
- [6] Lynn B., Khain, A. P., Dudhia J., Rosenfeld D., Pokrovsky A., Seifert A., “Spectral (bin) microphysics coupled with a mesoscale model (MM5). Part 1”, *Mon. Wea. Rev.*, 2005, № 133, 44–71.
- [7] Mansell E. R., MacGorman D. R., Ziegler C. L., Straka J. M., “Charge structure and lightning sensitivity in a simulated multicell thunderstorm”, *J. Geophys. Res.*, **110**:D12101 (2005).
- [8] Pruppacher H. R., Klett J. D., *Microphysics of clouds and precipitation, 2nd Edition*, Springer, Netherlands, 2010, 976 pp.
- [9] Straka J. M., *Cloud and precipitation microphysics. Principles and Parameterizations*, Cambridge University Press, 2009, 392 pp.
- [10] Wang P. K., *Physics and Dynamics of Clouds and Precipitation*, Cambridge University Press, 2013, 467 pp.
- [11] Ашабоков Б. А., Шаповалов В. А., Езаова А. Г., Шаповалов М. А., “Исследование образования ледяной фазы в мощных конвективных облаках на основе трехмерной численной модели”, *Естественные и технические науки*, 2014, № 5(73), 78–83. [Ashabokov B. A., SHapovalov V. A., Ezaova A. G., SHapovalov M. A., “Issledovanie obrazovaniya ledyanoj fazy v moshchnyh konvektivnyh oblakah na osnove trekhmernoj chislennoj modeli”, *Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2014, № 5(73), 78–83].
- [12] Ashabokov B. A., Shapovalov A. V., Kuliev D. D., Prodan K. A., Shapovalov V. A., “Numerical Simulation of Thermodynamic, Microstructural, and Electric Characteristics of Convective Clouds at the Growth and Mature Stages”, *Radiophysics and Quantum Electronics*, **56**:11 (2014), 811–817.
- [13] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. М., Майер А. Г., *Теория бифуркаций динамических систем на плоскости*, Наука, М., 1967, 568 с. [Andronov A. A., Leon-tovich E. A., Gordon I. M., Majer A. G., *Teoriya bifurkacij dinamicheskikh sistem na ploskosti*, Nauka, M., 1967, 568 pp.]
- [14] Ашабоков Б. А., Федченко Л. М., Шаповалов А. В., Езаова А. Г., Шаповалов М. А., “Численные эксперименты по исследованию формирования микроструктурных характеристик грозоградовых облаков”, *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: естественные науки*, 2014, № 3(181), 40–44. [Ashabokov B. A., Fedchenko L. M., SHapovalov A. V., Ezaova A. G., SHapovalov M. A., “CHislen-nye ehksperimenty po issledovaniyu formirovaniya mikrostrukturnyh harakteristik gro-

- zogradovyh oblakov”, *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Severo-Kavkazskij region. Seriya: estestvennye nauki*, 2014, № 3(181), 40–44].
- [15] Бекряев В. И., Гурович М. В., “Нестационарная численная модель Сб”, *Труды ГГО*, 1991, № 538, 109–121. [Bekryaev V. I., Gurovich M. V., “Nestacionarnaya chislennaya model’ Sb”, *Trudy GGO*, 1991, № 538, 109–121].
- [16] Бекряев В. И., *Некоторые вопросы физики облаков и активных воздействий на них*, Изд-во РГГМУ, СПб., 2007, 336 с. [Bekryaev V. I., *Nekotorye voprosy fiziki oblakov i aktivnyh vozdeystvij na nih*, Izd-vo RGGMU, SPb., 2007, 336 pp.]
- [17] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М., *Численные методы*, Наука, М., 1987, 557 с. [Bahvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobel’kov G. M., *Chislennye metody*, Nauka, M., 1987, 557 pp.]
- [18] Марчук Г. И., *Численные методы в прогнозе погоды*, Гидрометеиздат, Л., 1967, 353 с. [Marchuk G. I., *Chislennye metody v prognoze pogody*, Gidrometeoizdat, L., 1967, 353 pp.]
- [19] Марчук Г. И., *Методы вычислительной математики*, Наука, М., 1989, 608 с. [Marchuk G. I., *Metody vychislitel’noj matematiki*, Nauka, M., 1989, 608 pp.]
- [20] Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р., *Вычислительная гидромеханика и теплообмен*. Т. 1, Мир, М., 1990, 384 с. [Anderson D., Tannekhil Dzh., Pletcher R., *Vychislitel’naya gidromekhanika i teploobmen*. V. 1, Mir, M., 1990, 384 pp.]
- [21] Самарский А. А., *Теория разностных схем*, Наука, М., 1983, 616 с. [Samarskij A. A., *Teoriya raznostnyh skhem*, Nauka, M., 1983, 616 pp.]
- [22] Мезингер Ф., Аракава А., *Численные методы, используемые в атмосферных моделях*, Перевод с английского под редакцией В. П. Садокова. Т. 2, Гидрометеиздат, Л., 1982, 360 с. [Mezinger F., Arakava A., *Chislennye metody, ispol’zuetnye v atmosfernyh modelyakh*, Perevod s anglijskogo pod redakciej V. P. Sadokova. V. 2, Gidrometeoizdat, L., 1982, 360 pp.]
- [23] Пастушков Р. С., “Численное моделирование взаимодействия конвективных облаков с окружающей их атмосферой”, *Труды ЦАО*, 1972, № 108, 125. [Pastushkov R. S., “Chislennoe modelirovanie vzaimodejstviya konvektivnyh oblakov s okruzhayushchej ih atmosferoj”, *Trudy CAO*, 1972, № 108, 125].
- [24] Khvorostyanov V.I., Curry J.A., *Thermodynamics, Kinetics, and Microphysics of Clouds*, Cambridge University Press, 2014, 782 pp.
- [25] Березин С. Б., Каргапольцев И. С., Марковский Н. Д., Сахарных Н. А., “Параллельная реализация метода расщепления для системы из нескольких GPU с применением в задачах аэрогидродинамики”, *Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского*, 2012, № 5(2), 246–252. [Berezin S. B., Kargapol’cev I. S., Markovskij N. D., Saharnyh N. A., “Parallel’naya realizaciya metoda rasshchepleniya dlya sistemy iz neskol’kih GPU s primeneniem v zadachah aehrogidroinamiki”, *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I.Lobachevskogo*, 2012, № 5(2), 246–252].

**Для цитирования:** Шаповалов В. А. Численное решение системы уравнений трехмерной модели конвективного облака // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 3(23). С. 168–179. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-168-179

**For citation:** Shapovalov V. A. Methodology of the numerical solution equations system of three-dimensional model convective cloud, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018, **23**: 3, 168–179. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-168-179

Поступила в редакцию / Original article submitted: 08.06.2018

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-168-179

MSC 65C20, 93A30

## **METHODOLOGY OF THE NUMERICAL SOLUTION EQUATIONS SYSTEM OF THREE-DIMENSIONAL MODEL CONVECTIVE CLOUD**

**V. A. Shapovalov**

High-Mountain Geophysical Institute, 360030, Nalchik,  
Lenina av., 2, Russia  
E-mail: vet555\_83@mail.ru

A three-dimensional numerical model of a convective cloud is developed taking into account thermodynamic, microphysical and electrical processes. The model uses a detailed microphysics. The system of equations of the cloud model describing the time variation of the dynamic and microphysical characteristics of the cloud consists of 3 equations of motion, heat and moisture balance equations, 137 equations describing the spectrum of cloud droplets, crystals, and microbubble particles. In addition, in order for the solution to satisfy the continuity equation, it is necessary to solve the three-dimensional elliptic equation for the pressure perturbation at each time step. One of the methods widely used for solving such problems is the splitting method developed by G.I. Marchuk, an improved version of this method, the predictor scheme with a divergent corrector, was successfully used in the modeling of cumulus clouds by R. Pastushkov. The conducted studies showed that, despite the certain complexity in the implementation of this scheme, it provides the necessary stability of the count, an approximation of the second order of accuracy in space and time, and is conservative. Splitting methods for physical processes and componentwise splitting are used (locally - one-dimensional schemes). The equations of the cloud model in finite-difference form were approximated by central and directional differences for spatial variables, as well as directed time differences. The resulting algebraic system was solved by a sweep method.

*Key words: mathematical modeling, three-dimensional model, convective cloud, model equation system, predictor-corrector, local-one-dimensional schemes.*

© Shapovalov V. A., 2018