Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 3(23). С. 158-167. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-158-167

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

УДК 519.63

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ СХЕМА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА, ОПИСЫВАЮЩЕГО МИКРОФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В КОНВЕКТИВНЫХ ОБЛАКАХ

Б. А. Ашабоков[1], И. Д. Тайсаев[2], М. Х. Шхануков-Лафишев[2]

[1] Институт информатики и проблем регионального управления КБНЦ РАН, 360000, г. Нальчик, ул. Инессы Арманд, 37 А

[2] Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

E-mail: ashabokov.boris@mail.ru, taisauti@yandex.ru, lafishev2014@yandex.ru

Рассматривается локально-одномерная схема для уравнения параболического типа общего вида в p-мерном параллелепипеде. Для описания коагуляционных процессов в облаке в рассматриваемое уранение включается нелокальный источник специального вида [1]. Получена априорная оценка для решения локально-одномерной схемы и доказана ее сходимость. Знакоопределенность оператора в главной части уравнения не предполагается.

Ключевые слова: краевая задача, локально-одномерная схема, устойчивость, сходимость схемы, погрешность аппроксимации.

Введение

Краевые задачи для параболических уравнений с нелокальным (интегральным) источником возникают при изучении диффузии частиц в турбулентной плазме, переноса влаги в почвогрунтах, при описании функции распределения по массам капель за счет микрофизических процессов конденсации, коагуляции (объединение мелких капель в большие по размеру агрегаты), дробления и замерзания капель [2]–[4].

Введем функцию $u(x,y,z,m,t)$ такую, что $u(x,y,z,m,t)dm$ дает в каждой точке (x,y,z) в момент времени t концентрацию облачных капель, масса которых заключена в интервале от m до $m+dm$.

Постановка задачи

В цилиндре $Q_T = G\times[0<t\leq T]$, основанием которого служит прямоугольный параллелепипед $G=\left\{x=(x_1,x_2,...,x_p):\ 0<x_\alpha<l_\alpha,\ \alpha=1,2,...,p\right\}$ с границей Γ рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,m,t),\ (x,t)\in Q_T, \tag{1.1}$$

$$u|_\Gamma = 0,\ u(x,m,0)=u_0(x,m), \tag{1.2}$$

где

$$Lu=\sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u,\ L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)+r_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}-$$

$$-q_\alpha(x,t)u-\frac{1}{p}\int\limits_0^{m_1}\beta\left(m,m'\right)u\left(x,m',t\right)dm', \tag{1.3}$$

$$\beta\left(m,m'\right)=\pi\left(r(m)+r\left(m'\right)\right)^2\cdot\left|V_1(m)-V_1\left(m'\right)\right|\cdot E\left(m,m'\right),$$

$$0<c_0\leq k_\alpha\leq c_1,\ \left|r_\alpha(x,t)\right|,\ \left|q_\alpha(x,t)\right|\leq c_2,\ \left|\beta\left(m,m'\right)\right|\leq c_3, \tag{1.4}$$

$r(m)$, $r(m')$ – радиусы сталкивающихся частиц; $V_1(m)$, $V_1(m')$ – их скорости падения, $E\left(m,m'\right)$ – коэффициент захвата для капель.

Локально-одномерная схема

На отрезке $[0,T]$ введем равномерную сетку $\bar{\omega}_\tau=\left\{t_j=j\tau,\ j=0,1,...,j_0\right\}$ с шагом $\tau=T/j_0$. Каждый интервал $\left(t_j,t_{j+1}\right)$ разобьем на p частей точками $t_{j+\frac{\alpha}{p}}=t_j+\frac{\alpha}{p}\tau$, $\alpha=1,2,...,p$ и обозначим через $\Delta_\alpha=\left(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}},t_{j+\frac{\alpha}{p}}\right]$.

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению O_{x_α} с шагом $h_\alpha=\frac{l_\alpha}{N_\alpha}$, $\alpha=1,2,...,p$:

$$\bar{\omega}_h=\prod_{\alpha=1}^{p}\bar{\omega}_{h_\alpha},\ \bar{\omega}_{h_\alpha}=\left\{x_\alpha^{(i_\alpha)}=i_\alpha h_\alpha:\ i_\alpha=0,1,...,N_\alpha,\ \alpha=1,2,...,p\right\}.$$

Уравнение (1.1) перепишем в виде

$$\Re u = \frac{\partial u}{\partial t} - Lu - f = 0, \tag{2.1}$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \Re_\alpha u = 0,\ \Re_\alpha u = \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha,\ \sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f. \tag{2.2}$$

На каждом полуинтервале Δ_α, $\alpha = 1,2,...,p$ будем последовательно решать задачи

$$\Re_\alpha v_{(\alpha)} = \frac{1}{p}\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} - L_\alpha v_{(\alpha)} - f_\alpha = 0,\ x \in G,\ t \in \Delta_\alpha, \tag{2.3}$$

$$v_{(\alpha)} = 0,\ x_\alpha = 0,$$

$$v_{(\alpha)} = 0,\ x_\alpha = l_\alpha,$$

полагая при этом [5, с. 522]

$$\vartheta_{(1)}(x;m,0) = u_0(x,m),\ \vartheta_{(1)}(x;m,t_j) = \vartheta_{(p)}(x;m,t_j),\ j = 1,2,...,$$

$$\vartheta_{(\alpha)}\left(x;m,t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right) = \vartheta_{(\alpha-1)}(x;m,t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}),\ \alpha = 2,3,...,p.$$

Аппроксимируем каждое уравнение (2.3) номера α двухслойной схемой на полуинтервале Δ_α, тогда получим цепочку p одномерных разностных уравнений:

$$\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}},\ \alpha = 1,2,...,p, \tag{2.4}$$

$$\Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \varkappa_\alpha\left(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right)_{x_\alpha} + b_\alpha^{+} a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + b_\alpha^{-} a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - d_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} -$$

$$-\frac{1}{p}\sum_{i_m=0}^{N_m} \beta(m,m_{i_m}) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x,m_{i_m},t)\hbar_m,$$

$$y^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big|_{\gamma_{h,\alpha}} = 0,\quad y(x,m,0) = u_0(x,m),\quad \alpha = 1,2,...,p, \tag{2.5}$$

$$a_\alpha = k_\alpha\left(x^{(-0.5h_\alpha)},\bar{t}\right),\ x^{(-0.5h_\alpha)} = (x_1,x_2,...,x_{\alpha-1},\ x_\alpha - 0.5h_\alpha, x_{\alpha+1},...,x_p),\ \bar{t} = t^{j+1/2},$$

$$\varkappa = \frac{1}{1+R_\alpha},\ R_\alpha = \frac{0.5h_\alpha|r_\alpha|}{k_\alpha} \text{ – разностное число Рейнольдса,}$$

$$r_\alpha^{+} = 0.5(r_\alpha + |r_\alpha|) \ge 0,\ r_\alpha^{-} = 0.5(r_\alpha - |r_\alpha|) \le 0,\ r_\alpha = r_\alpha^{+} + r_\alpha^{-},$$

$$a_{(1_\alpha)} = a_{i_\alpha+1},\ b_\alpha^{+} = \frac{r_\alpha^{+}}{k_\alpha},\ b_\alpha^{-} = \frac{r_\alpha^{-}}{k_\alpha},\ a_i = k_{i-\frac{1}{2}}(\bar{t}),$$

$$\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = f_\alpha(x,m,t_{j+0.5}),\ d_\alpha = q_\alpha,\ \hbar_m = \begin{cases} h_m,\ i_m = 1,2,...,N_m - 1, \\ h_m/2,\ i_m = 0;N_m. \end{cases}$$

Погрешность аппроксимации локально-одномерной схемы (ЛОС)

Характеристикой точности решения локально-одномерной схемы является разность $z^{j+\frac{\alpha}{p}} = y^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha}{p}}$, где $u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ – решение исходной задачи (1.1)–(1.2). Подставляя $y^{j+\frac{\alpha}{p}} = z^{j+\frac{\alpha}{p}} + u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ в разностное уравнение (2.4), получим для погрешности уравнение

$$\frac{z^{j+\frac{\alpha}{p}} - z^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha z^{j+\frac{\alpha}{p}} + \psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \tag{3.1}$$

$$z^{j+\frac{\alpha}{p}} = 0 \text{ при } x \in \gamma_{h,\alpha},\ z(x,m,0) = 0. \tag{3.2}$$

Обозначив через

$$\mathring{\psi}_\alpha = \left(L_\alpha u + f_\alpha - \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1/2},$$

и замечая, что $\sum\limits_{\alpha=1}^{p} \mathring{\psi}_\alpha = 0$, если $\sum\limits_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f$, представим погрешность в виде суммы $\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \mathring{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*$:

$$\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} + \mathring{\psi}_\alpha - \mathring{\psi}_\alpha = \left(\Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} - L_\alpha u^{j+\frac{1}{2}}\right) +$$

$$+\left(\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} - f_\alpha^{j+\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1/2}\right) + \mathring{\psi}_\alpha = \mathring{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*.$$

Очевидно,что $\psi_\alpha^* = O(h_\alpha^2 + \tau)$, $\mathring{\psi}_\alpha = O(1)$,

$$\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \sum_{\alpha=1}^{p} \mathring{\psi}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha^* = O(|h|^2 + \tau),\ |h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_p^2,$$

то есть ЛОС обладает суммарной аппроксимацией $O(|h|^2 + \tau)$.

Устойчивость локально-одномерной схемы

Умножим уравнение (2.4) скалярно на $y^{(\alpha)} = y^{j+\frac{\alpha}{p}}$:

$$\left(y_{\bar{t}}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha = \left(\Lambda_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha + \left(\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha, \tag{4.1}$$

$$(u,v)_\alpha = \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} u_{i_\alpha} v_{i_\alpha} h_\alpha,\ (u,v) = \sum_{x\in\omega_h} uvH,\ H = \prod_{\alpha=1}^{p} h_\alpha.$$

Преобразуем каждое слагаемое тождества (4.1):

$$\left(y_{\bar{t}}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right) = \frac{1}{2}\left(\|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2\right)_{\bar{t}} + \frac{\tau}{2}\|y_{\bar{t}}\|_{L_2(\alpha)}^2,$$

$$\left(\Lambda_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha = \left(\varkappa_\alpha\left(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\right)_{x_\alpha}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha + \left(b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha +$$

$$+\Big(b^-_\alpha a_\alpha y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha}, y^{(\alpha)}\Big)_\alpha - \Big(d_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big)_\alpha - \frac{1}{p}\Big(\sum_{i_m=0}^{N_m}\beta(m,m_{i_m})y^{(\alpha)}(x,m_{i_m},t)\hbar_m, y^{(\alpha)}\Big)_\alpha.$$

Так как $\varkappa = \frac{1}{1+R_\alpha} = 1-\frac{0.5h_\alpha|r_\alpha|}{k_\alpha}+O(h^2_\alpha)$, то $\varkappa$ заменим на $1-\frac{0.5h_\alpha|r_\alpha|}{k_\alpha}$. Тогда последнее выражение перепишем в виде

$$\Big(\Lambda_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big)_\alpha = -\Big(a_\alpha, y^2_{\bar{x}_\alpha}\Big]_\alpha + \Big(b^+_\alpha a^{(+1_\alpha)}_\alpha y_{x_\alpha}, y^{(\alpha)}\Big)_\alpha + \Big(b^-_\alpha a_\alpha y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha}, y^{(\alpha)}\Big)_\alpha -$$

$$-\Big(d_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big)_\alpha + 0.5h_\alpha\Big(a_\alpha\Big(\frac{|r_\alpha|}{k_\alpha}\Big)_{\bar{x}_\alpha}, y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha} y^{(\alpha)}_{i_\alpha-1}\Big]_\alpha + 0.5h_\alpha\Big(a_\alpha\frac{|r_\alpha|}{k_\alpha}, y^2_{\bar{x}_\alpha}\Big]_\alpha -$$

$$-\frac{1}{p}\Big(\sum_{i_m=0}^{N_m}\beta(m,m_{i_m})y^{(\alpha)}(x,m_{i_m},t)\hbar_m, y^{(\alpha)}\Big)_\alpha.$$

С помощью леммы 1 из [6] находим

$$\Big(b^+_\alpha a^{(+1_\alpha)}_\alpha y_{x_\alpha}, y^{(\alpha)}\Big)_\alpha + \Big(b^-_\alpha a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}, y^{(\alpha)}\Big)_\alpha \le$$

$$\le \frac{2c_1c_2}{c_0}\Big(\varepsilon|| y_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\alpha)} + c(\varepsilon)\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}\Big),$$

$$\Big(d_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big)_\alpha \le c_2\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)},$$

$$\Big(a_\alpha\Big(\frac{|r_\alpha|}{k_\alpha}\Big)_{\bar{x}_\alpha}, y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha} y^{(\alpha)}_{i_\alpha-1}\Big]_\alpha \le c_4\Big(\varepsilon|| y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\alpha)} + c(\varepsilon)\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}\Big),$$

где $\left|a_\alpha\Big(\frac{|r_\alpha|}{k_\alpha}\Big)_{\bar{x}_\alpha}\right| \le c_4$.

$$\Big(\sum_{i_m=0}^{N_m}\beta(m,m_{i_m})y^{(\alpha)}(x,m_{i_m},t)\hbar_m, y^{(\alpha)}\Big)_\alpha \le$$

$$\le \|\sum_{i_m=0}^{N_m}\beta(m,m_{i_m})y^{(\alpha)}(x,m_{i_m},t)\hbar_m\|_{L_2(\alpha)}\|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)} \le$$

$$\le \varepsilon c_3\|\sum_{i_m=0}^{N_m}y^{(\alpha)}(x,m_{i_m},t)\hbar_m\|^2_{L_2(\alpha)} + \frac{1}{4\varepsilon}\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)} \le$$

$$\le \varepsilon c_3\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1}\Big(\sum_{i_m=0}^{N_m}y^{(\alpha)}(x,m_{i_m},t)\hbar_m\Big)^2\hbar_\alpha + \frac{1}{4\varepsilon}\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)} \le$$

$$\le \varepsilon c_3 m_1\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1}\sum_{i_m=0}^{N_m}y^2(x,m_{i_m},t)h_\alpha\hbar_m + \frac{1}{4\varepsilon}\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)} =$$

$$= \varepsilon c_3\|y^{(\alpha)}(x,m,t)\|^2_{L_2(\alpha,m)} + \frac{1}{4\varepsilon}\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)},$$

$$(\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)})_\alpha \le \frac{1}{2}\|\varphi^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)} + \frac{1}{2}\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}.$$

Подставляя полученные неравенства в тождество (4.1), находим

$$\frac{1}{2}\Big(\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}\Big)_{\bar{t}} + \Big(\Big(1-0.5h_\alpha\frac{|r_\alpha|}{k_\alpha}\Big)a_\alpha, y^2_{\bar{x}_\alpha}\Big]_\alpha \le \frac{1}{2}\|\varphi^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)} + c(\varepsilon)\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)} +$$

$$+\varepsilon\Big(c_4+\frac{2c_1c_2}{c_0}\Big)||y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}]|_{L_2(\alpha)}^2+\varepsilon c_3\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1}h_\alpha\sum_{i_m=0}^{N_m}y^2(x,m_{i_m},t)\hbar_m. \tag{4.2}$$

Пользуясь разностным аналогом теоремы вложения при $\varepsilon\le\frac{c_0}{2c_5}$, $c_5=c_4+\frac{2c_1c_2}{c_0}$, $h_\alpha\le\frac{k_\alpha}{|r_\alpha|}$, перепишем (4.2) иначе:

$$\frac{1}{2}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\alpha)}^2+\frac{c_0}{2}\tau||y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}]|_{L_2(\alpha)}^2\le\frac{\tau}{2}\|\varphi^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2+c(\varepsilon)_\tau\|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2+\frac{1}{2}\|y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\|_{L_2(\alpha)}^2+$$

$$+\varepsilon c_3\tau\frac{l_\alpha^2}{4}\sum_{i_m=0}^{N_m}h_m||y_{\bar{x}_\alpha}]|_{L_2(\alpha)}^2,$$

$$\frac{1}{2}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\alpha)}^2+\frac{c_0}{2}\tau||y_{\bar{x}_\alpha}]|_{L_2(\alpha)}^2\le\frac{\tau}{2}\|\varphi^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2+c(\varepsilon)\tau\|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2+$$

$$+\varepsilon c_3\frac{l_\alpha^2}{4}\tau\sum_{i_m=0}^{N_m}h_m\|y_{\bar{x}_\alpha}]|_{L_2(\alpha)}^2+\frac{1}{2}\|y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\|_{L_2(\alpha)}^2. \tag{4.3}$$

Просуммируем (4.3) по i_m от 0 до N_m:

$$\frac{1}{2}\sum_{i_m=0}^{N_m}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\alpha)}^2\hbar_m+\frac{c_0}{2}\tau\sum_{i_m=0}^{N_m}\|y_{\bar{x}_j}]|_{L_2(\alpha)}^2\hbar_m\le\frac{\tau}{2}\sum_{i_m=0}^{N_m}\|\varphi^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2\hbar_m+$$

$$+c(\varepsilon)\tau\sum_{i_m=0}^{N_m}\|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2\hbar_m+\varepsilon c_3\frac{l_\alpha^2}{4}m_1\tau\sum_{i_m=0}^{N_m}h_m\|y_{\bar{x}_\alpha}]|_{L_2(\alpha)}^2+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i_m=0}^{N_m}\|y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\|_{L_2(\alpha)}^2\hbar_m. \tag{4.4}$$

При $\varepsilon\le\frac{c_0}{c_3l_\alpha^2m_1}$ (4.4) перепишем:

$$\frac{1}{2}\sum_{i_m=0}^{N_m}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\alpha)}^2\hbar_m+\frac{c_0}{4}\tau\sum_{i_m=0}^{N_m}\|y_{\bar{x}_\alpha}]|_{L_2(\alpha)}^2\hbar_m\le\frac{\tau}{2}\sum_{i_m=0}^{N_m}\|\varphi^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2\hbar_m+$$

$$+c(\varepsilon)\tau\sum_{i_m=0}^{N_m}\|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2\hbar_m+\frac{1}{2}\sum_{i_m=0}^{N_m}\|y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\|_{L_2(\alpha)}^2\hbar_m. \tag{4.5}$$

Просуммируем (4.5) по всем $i_\beta\neq i_\alpha$, $\beta=1,2,...,p$. Тогда получим

$$\sum_{i_m=0}^{N_m}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2,\hbar_m+\frac{c_0}{2}\tau\sum_{i_m=0}^{N_m}\|y_{\bar{x}_\alpha}]|_{L_2(\omega_h)}^2h_m\le\tau\sum_{i_m=0}^{N_m}\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2h_m+$$

$$+c(\varepsilon)\tau\sum_{i_m=0}^{N_m}\|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\omega_h)}^2h_m+\sum_{i_m=0}^{N_m}\|y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\|_{L_2(\omega_h)}^2h_m. \tag{4.6}$$

Просуммируем (4.6) сначала по $\alpha=1,2,...,p$:

$$\sum_{i_m=0}^{N_m}\|y^{j+1}\|_{L_2(\omega_h)}^2\hbar_m+\frac{c_0}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\tau\sum_{i_m=0}^{N_m}\|y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}]|_{L_2(\omega_h)}^2\hbar_m\le$$

$$\leq \sum_{\alpha=1}^{p} \tau \sum_{i_m=0}^{N_m} \|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m + c(\varepsilon) \sum_{\alpha=1}^{p} \tau \sum_{i_m=0}^{N_m} \|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m +$$

$$+ \sum_{i_m=0}^{N_m} \|y^j\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m,$$

затем по j' от 0 до j:

$$\sum_{i_m=0}^{N_m} \|y^{j+1}\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m + \frac{c_0}{2} \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_m=0}^{N_m} \|y_{\bar{x}_j}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m \leq$$

$$\leq \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_m=0}^{N_m} \|\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m + c(\varepsilon) \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_m=0}^{N_m} \|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m +$$

$$+ \sum_{i_m=0}^{N_m} \|y^0\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m. \tag{4.7}$$

Из (4.7) имеем

$$\sum_{i_m=0}^{N_m} \|y^{j+1}\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m \leq c(\varepsilon) \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_m=0}^{N_m} \|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m + F^j, \tag{4.8}$$

где

$$F^j = \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_m=0}^{N_m} \|\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m + \sum_{i_m=0}^{N_m} \|y^0\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m.$$

С помощью неравенства (4.8) на основании леммы 4 из [7, с. 171] из неравенства (4.7) получаем априорную оценку

$$\sum_{i_m=0}^{N_m} \|y^{j+1}\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_m=0}^{N_m} \|y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m \leq$$

$$M(t) \left[\sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_m=0}^{N_m} \|\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m + \sum_{i_m=0}^{N_m} \|u_0(x,m)\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m \right]. \tag{4.9}$$

Из оценки (4.9) следует

Теорема 1. Локально-одномерная схема (2.4)–(2.5) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (2.4)–(2.5) при любых h и $\tau \leq \tau_0$ справедлива оценка (4.9).

Сходимость локально-одномерной схемы

По аналогии с [5, с. 528] представим решение задачи (3.1)–(3.2) в виде суммы $z_{(\alpha)} = \upsilon_{(\alpha)} + \eta_{(\alpha)}$, где $\eta_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\eta_{(\alpha)} - \eta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \mathring{\psi}_\alpha, \ x \in \omega_{h_\alpha} + \gamma_{h,\alpha}, \ \alpha = 1, 2, ..., p, \tag{5.1}$$

$$\eta(x, 0) = 0.$$

Из (5.1) следует $\eta^{j+1}=\eta_{(p)}=\eta^j+\tau\Big(\mathring{\psi}_1+\mathring{\psi}_2+...+\mathring{\psi}_p\Big)=\eta^j=...=\eta^0=0$. Для $\eta^\alpha=\tau\Big(\mathring{\psi}_1+\mathring{\psi}_2+...+\mathring{\psi}_\alpha\Big)=-\tau\Big(\mathring{\psi}_{\alpha+1}+...+\mathring{\psi}_p\Big)=O(\tau)$.

Функция $\upsilon_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\upsilon_{(\alpha)}-\upsilon_{(\alpha-1)}}{\tau}=\Lambda_\alpha\upsilon_{(\alpha)}+\tilde{\psi}_\alpha,\ x\in\omega_h,\ \alpha=1,2,...,p, \tag{5.2}$$

$$\upsilon_{(\alpha)}=-\eta_\alpha,\ x_\alpha\in\gamma_{h,\alpha},\ \upsilon_{(\alpha)}(x,0)=0,\ \tilde{\psi}_\alpha=\psi^*_\alpha+\Lambda_\alpha\eta_{(\alpha)}.$$

Решение задачи (5.2) оценим с помощью теоремы 1.

Так как $\eta^j=0,\ \eta_{(\alpha)}=O(\tau),\ \|z^j\|\le\|\upsilon^j\|$, то из оценки (4.9) следует

Теорема 2. Пусть задача (1.1)–(1.2) имеет единственное непрерывное в $\overline{Q}_T$ решение $u(x,m,t)$ и существуют непрерывные в Q_T производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2\partial x_\beta^2},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2\partial t},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2},\ \alpha=1,2,...,p,\ \alpha\ne\beta,$$

тогда локально-одномерная схема (2.4)–(2.5) сходится со скоростью $O(|h|^2+\tau)$, так что

$$\|y^{j+1}-u^{j+1}\|_1\le M\Big(|h|^2+\tau\Big),\ |h|^2=h_1^2+h_2^2+...+h_p^2.$$

$$\|y^{j+1}\|_1^2=\sum_{i_m=0}^{N_m}(\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\omega_h)}\hbar_m+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_m=0}^{N_m}\|y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}]|^2_{L_2(\omega_h)}h_m.$$

Список литературы

[1] Ашабоков Б. А., Шаповалов А. В., *Конвективные облака: численные модели и результаты моделирования в естественных условиях и при активном воздействии*, Издательство КБНЦ РАН, Нальчик, 2008, 252 с. [Ashabokov B. A., SHapovalov A. V., *Konvektivnye oblaka: chislennye modeli i rezul'taty modelirovaniya v estestvennyh usloviyah i pri aktivnom vozdejstvii*, Izdatel'stvo KBNC RAN, Nal'chik, 2008, 252 pp.]

[2] Коган Е. Л. и др., *Численное моделирование облаков*, Гидрометеоиздат, М., 1984, 178 с. [Kogan E. L. i dr., *CHislennoe modelirovanie oblakov*, Gidrometeoizdat, M., 1984, 178 pp.]

[3] Berry E. X., "Cloud Droplets Growth by Collection", *J. Atmos. Sci.*, **24**:6 (1967), 688–701.

[4] Berry E. X., Reinhardt R. L., "An Analysis of Gloud Drop Growth by Collection", *J. Atmos. Sci.*, **31**:7 (1974), 1825–1831.

[5] Самарский А. А., *Теория разностных схем*, Наука, М., 1977, 656 с. [Samarskij A. A., *Teoriya raznostnyh skhem*, Nauka, M., 1977, 656 pp.]

[6] Андреев И. Б., "О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **8**:6 (1968), 1218–1231. [Andreev I. B., "O skhodimosti raznostnyh skhem, approksimiruyushchih vtoruyu i tret'yu kraevye zadachi dlya ehllipticheskih uravnenij", *ZH. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **8**:6 (1968), 1218–1231].

[7] Самарский А. А., Гулин А. В., *Устойчивость разностных схем*, Наука, М., 1973, 480 с. [Samarskij A. A., Gulin A. V., *Ustojchivost' raznostnyh skhem*, Nauka, M., 1973, 480 pp.]

Список литературы (ГОСТ)

[1] Ашабоков Б. А., Шаповалов А. В. Конвективные облака: численные модели и результаты моделирования в естественных условиях и при активном воздействии. Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2008. 252 с.

[2] Коган Е. Л. и др. Численное моделирование облаков. М.: Гидрометеоиздат, 1984. 178 с.

[3] Berry E. X. Cloud Droplets Growth by Collection // J. Atmos. Sci. 1967. vol. 24. no.6. pp. 688–701.

[4] Berry E. X., Reinhardt R. L. An Analysis of Gloud Drop Growth by Collection // J. Atmos. Sci. 1974. vol. 31. no. 7. pp. 1825–1831.

[5] Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.

[6] Андреев И. Б. О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. Т. 8. №6. С. 1218–1231.

[7] Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 480 с.

Для цитирования: Ашабоков Б. А., Тайсаев И. Д., Шхануков-Лафишев М. Х. Локально-одномерная схема для параболического уравнения общего вида, описывающего микрофизические процессы в конвективных облаках // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 3(23). C. 158-167. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-158-167

For citation: Ashabokov B. A., Taisaev I. D., Shkhanukov-Lafishev M. Kh. A local one-dimensional scheme for parabolic equation of general form, describing microphysical processes in convective clouds, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2018, **23**: 3, 158-167. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-158-167

Поступила в редакцию / Original article submitted: 08.06.2018

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2018. no.3(23). pp. 158–167. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-158-167

NUMERICAL METHODS OF SOLVING THE PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS

MSC 35K10

A LOCAL ONE-DIMENSIONAL SCHEME FOR PARABOLIC EQUATION OF GENERAL FORM, DESCRIBING MICROPHYSICAL PROCESSES IN CONVECTIVE CLOUDS

B. A. Ashabokov[1], I. D. Taisaev[2], M. Kh. Shkhanukov-Lafishev[2]

[1] Institute of Computer Science and Problems of Regional Management Kabardin-Balkar Scientific Center of RAS, 360000, Nalchik, Inessy Armand st., 37 A, Russia
[2] Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Center of RAS, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89 A, Russia
E-mail: ashabokov.boris@mail.ru, taisauti@yandex.ru, lafishev2014@yandex.ru

This paper considers a locally one-dimensional scheme for a parabolic equation of general form in a p-dimensional parallelepiped.To describe coagulation processes in the cloud, the equation under study involves a non-local source of a specific type [1]. An a priori estimate for the solution to the locally one-dimensional scheme is obtained and its convergence is proved. Sign definiteness for the operator in the principal part of the equation is not assumed.

Key words: boundary value problem, locally one-dimensional scheme, stability, scheme convergence, approximation error.