Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 3(23). С. 148-157. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-148-157

УДК 512.24

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ С НЕПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И УЧЕТОМ ПЕРЕМЕННОЙ СТЕПЕННОЙ ПАМЯТИ *

Д. А. Твёрдый[1,2]

[1] Институт прикладной математики и автоматизации - филиал федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр российской академии наук», 360000, г. Нальчик, Шортанова, 89а

[2] Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: dimsolid95@gmail.com

В работе предложена задача Коши для уравнения Риккати с непостоянными коэффициентами и с учетом переменной степенной памяти. Степенная память определяется оператором дробной производной переменного порядка обобщающим производную Герасимова-Капуто. В работе с помощью численных методов: метода Ньютона и явной конечно-разностной схемы находится решение предложенной задачи Коши, а также определяется с помощью правила Рунге их вычислительная точность. Показано, что оба метода можно использовать для решение предложенной задачи Коши, однако метод Ньютона быстрее сходится. Далее в работе были построены расчетные кривые и фазовые траектории при различном выборе функции дробного порядка оператора дифференцирования. Сделано предположение, что предложенную модель можно использовать при описании экономических циклических процессов.

Ключевые слова: уравнение Риккати, дробная производная, наследственность, численные методы, дифференциальное уравнение.

© Твёрдый Д. А., 2018

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ № МК-1152.2018.1 и по теме НИР КамГУ имени Витуса Беринга «Применение дробного исчисления в теории колебательных процессов» №АААА-А17-117031050058-9.

Введение

Дифференциальные уравнения дробных порядков представляют большой интерес для исследования, так как часто находят свое применение во многих областях науки, таких как: математика, физика и др. [1, 2].

Уравнения с дробными производными принадлежат классу интегро-дифференциальных уравнений и называются по терминологии В. Вольтерра эредитарными [3]. Данное понятие означает наличие в изучаемом процессе эффекта памяти и характеризуется ядром интегро-дифференциального уравнения – функцией памяти. Если функция памяти является степенной, то мы естественным образом переходим к уравнению с дробной производной, которое изучается в рамках дробного исчисления [4, 5]. Одним из таких уравнений является эредитарное уравнение Риккати [6, 7, 8].

В работах автора [6, 7, 8, 18] рассматривалась задача Коши с постоянными коэффициентами. Уравнение Риккати было решено численно с помощью аппроксимации дробной производной конечной разностью. Далее реализация численного алгоритма сводилась к решению системы квадратных уравнений. Выбирая порядок дробной производной как некоторую функцию от времени, было построено семейство расчетных кривых, а также фазовые траектории. Были получены новые режимы распределений, которые зависят от конкретного вида переменного порядка дробной производной. Показано, что некоторые кривые распределений характерны для других эредитарных динамических систем [9].

В настоящей работе, будем рассматривать уравнение Риккати с непостоянными коэффициентами. И выбирая порядок дробной производной, в одном случае как константу, а в другом некоторую функцию от времени, были построены семейства расчетных кривых, а также фазовые траектории.

Для численного решения использовались: явная конечно-разностная схема и метод Ньютона. Методы исследованы на погрешность с помощью правила Рунге, и на точность решения.

Постановка задачи и методика решения

Рассмотрим следующее эредитарное уравнение:

$$\int_0^t K(t-\tau)\dot{u}(\tau)d\tau + a(t)u^2(t) + b(t)u(t) + c(t) = 0, \tag{1}$$

где $K(t-\tau)$ – функция памяти, $t \in [0,T], T > 0$ – время моделирования, $u(t)$ – функция решения, $a(t), b(t), c(t)$ – коэффициенты рассматриваемого уравнения, которые могут принимать как константное так и значение функции. Уравнение (1) является аналогом классического уравнения Рикккати [10], при $a(t) = -1, b(t) = 0, c(t) = 1$, но оно учитывает эффект памяти (эредитарности).

Если функция памяти $K(t-\tau)$ является функцией Хевисайда, то мы можем говорить, что процесс обладает полной памятью, если это функция Дирака, то память отсутствует. Поэтому будем рассматривать функцию памяти в виде степенной функции:

$$K(t-\tau) = \frac{(t-\tau)^{-\alpha(t)}}{\Gamma(1-\alpha(t))}, 0 < \alpha(t) < 1, \tag{2}$$

где $\Gamma(1-\alpha(t))$ – гамма-функция Эйлера.

Процессы с функцией памяти вида (2) называются процессами с частичной потерей памяти и требуют особого внимания в их изучении, т.к. многие естественные процессы имеют степенные законы распределения, в большинстве случаев которые, будут приводить к понятию фрактальности или фракталу [19].

Подставив функцию памяти (2) в эредитарное уравнение (1) мы получим следующее интегро-дифференциальное уравнение, называемое эредитарным уравнением Риккати:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))}\int_0^t \frac{\dot{u}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha(t)}}d\tau + u^2(t) - 1 = 0. \tag{3}$$

В уравнении (3) введем следующее обозначение:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))}\int_0^t \frac{\dot{u}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha(t)}}d\tau, \tag{4}$$

которое является обобщением дробного оператора Герасимова-Капуто [9].

Необходимо отметить, что существуют другие определения производной дробного переменного порядков [9]. Мы же остановимся на определении (4), и запишем уравнение (3) в компактной форме:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)}u(\tau)+a(t)u^2(t)+b(t)u(t)+c(t)=0,u(0)=const. \quad (5)$$

В следствии вышесказанного, постановка задачи для эредитарного уравнения Риккати (1) в данном случае свелась к задаче Коши (5).

Следует заметить, что при $\alpha(t)$ – const, мы придём к задаче Коши, рассмотренной в работе [11]. А если $\alpha(t)=1$, то задача сведётся к классической задаче Коши для уравнения Риккати (5).

Так как задача Коши (5) в общем случае не имеет точного решения, то будем использовать численные методы для ее решения. Для этого разобьём временной отрезок $t\in[0,T]$ на N равных частей, где $\tau=\frac{T}{N}$ – шаг дискретизации, и получим что $t_n=n\tau,n=0,...,N-1$, а функция решения $u(t_n)=u_n$. Аппроксимацию дробной производной 4 проведем согласно работам [13, 14] в виде:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)}u(\tau)\approx\sigma_{\alpha_k,\tau}\sum_{i=1}^{k}\omega_{i,\alpha_k}(u_{k-i+1}-u_{k-i}),\qquad k=1,...,N-1, \quad (6)$$

где весовые коэффициенты равны:

$$\sigma_{\alpha_k,\tau}=\frac{\tau^{-\alpha_k}}{\Gamma(2-\alpha_k)},\qquad \omega_{i,\alpha_k}=i^{1-\alpha_k}-(i-1)^{1-\alpha_k}.$$

Можно показать, что аппроксимация (6) имеет первый порядок. Интегро–дифференциальную задачу Коши (5) можно переписать в разностной постановке:

$$\sigma_{\alpha_k,\tau}\sum_{i=0}^{k}\omega_{i,\alpha_k}(u_{k-i+1}-u_{k-i})+a_ku_k^2+b_ku_k+c_k=0,u_0=const. \quad (7)$$

Мы получили систему нелинейных алгебраических уравнений, алгоритм решения которой был реализован в программе NSFDRE [18]. Заметим что, в работах автора [6, 7, 8, 18] был рассмотрен случай при $a(t)=-1,b(t)=0,c(t)=1$. Причём, численное решение производилось особым образом, суть которого в том, чтобы свести вычисление значения функции в каждом узле сетки к решению квадратного уравнения (6).

Явная конечно-разностная схема

Из системы нелинейных алгебраических уравнений (7) мы можем получить следующую расчетную формулу:

$$u_{k+1}=\frac{1}{\sigma_{\alpha_k,\tau}}\left(a_ku_k^2+b_ku_k+c_k-\sigma_{\alpha_k,\tau}\sum_{i=1}^{k}\omega_{i,\alpha_k}(u_{k-i+1}-u_{k-i})+\sigma_{\alpha_k,\tau}u_k\right),u_0=const. \quad (8)$$

Эта формула является явной конечно-разностной схемой для нахождения численного решения задачи Коши (5) и была исследована в работе [7].

Метод Ньютона

Другим методом решения задачи Коши (5) по аналогии с работой [11] может быть метод Ньютона. Сначала определим функцию из уравнения (5) для формирования Якобиана:

$$f_k=\sigma_{\alpha_k,\tau}\sum_{i=0}^{k}\omega_{i,\alpha_k}(u_{k-i+1}-u_{k-i})+a_ku_k^2+b_ku_k+c_k=0.$$

Определим элементы Якобиана

$$R_{n,m}=\frac{df_n}{du_m}$$

Запишем матричное уравнение вида:

$$U_1=U_0-\frac{1}{J_0}F_0 \quad (9)$$

где,

$$U_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} F_0 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} J_0 = \begin{pmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & \dots & R_{1,N} \\ R_{2,1} & \dots & \dots & R_{2,N} \\ \vdots & \vdots & R_{3,3} & \vdots \\ R_{N,1} & \dots & \dots & R_{N,N} \end{pmatrix}$$

В вычислительном эксперименте запускаем итерационный процес (9) пока $r > \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-5}$ – точность, $r = 1000 \cdot \varepsilon$ –критерий останова. $norm(J_0) \neq 0$ – критерий сходимости метода. $r = |norm(U_1 - U_0)|$.

Заметим, что оба метода имееют ограничения, которые связаны с эффектом жесткости, возникающим при больших значениях управляющих параметров. Поэтому мы будем считать управляющие параметры в задаче (1) достаточно малыми.

Результаты моделирования

Рассмотрим некоторые примеры моделирования.

Пример 1. (Классическая задача Коши) Рассмотрим случай при $\alpha(t) = 1$, а коэффициенты уравнения принимают значения: $a_k = -\dfrac{Q}{N}, b_k = 0, c_k = \dfrac{Q}{N}$, где $Q = k$ или $Q = 2k$, где $k = 1..N$. Значения управляющих параметров: $N = 1000, T = 4$. Результаты моделирования приведены на рис.1.

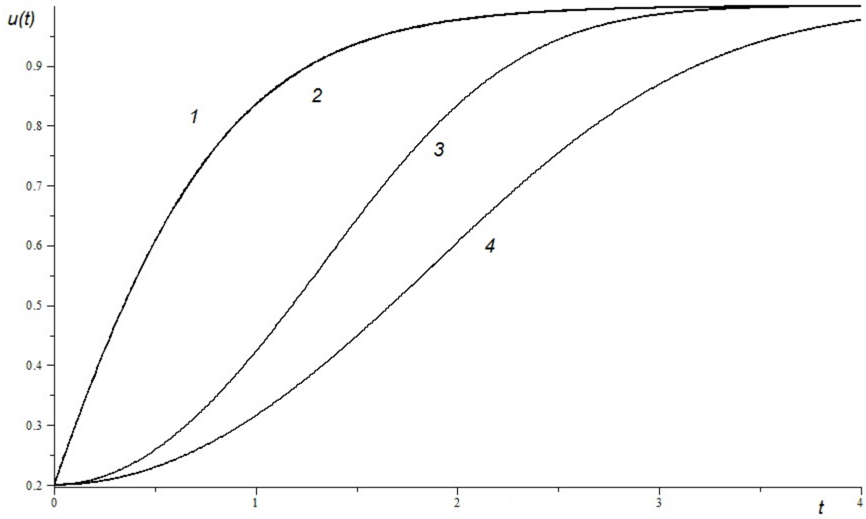

Фото 1. Пример 1. Расчетные кривые: *1*) точное решение, *2*) $a_k = -1, b_k = 0, c_k = 1$ (max value = 0.999564), *3*) $Q = 2k$ (max value = 0.999566), *4*) $Q = k$ (max value = 0.975986)

На рис.1 мы видим классические s-образные кривые, которые встречаются в экономических задачах.

Пример 2. Рассмотрим случай при $\alpha(t) = \dfrac{(1-\delta-\theta)\cos(\mu t) + (\theta - \delta + \phi)}{2}$, где: $\delta = 0, \theta = 0.05, \mu = 9, \phi = 1, \rho = 0$, а коэффициенты уравнения принимают значения: $a_k = -\frac{Q}{N}, b_k = 0, c_k = \frac{Q}{N}$, где $Q = k$ или $Q = 2k$, где $k = 1..N$. Значения управляющих параметров: $N = 1000, T = 30$. Результаты моделирования приведены на рис.2.

На рис. 2 мы видим включение переменной степенной памяти, которая дает осцилляции s-образной кривой и более медленный выход на асимптотику. Для таких расчетных кривых, пхожих на осциллограмму, были построены фазовые траектории (рис.3).

На рис. 3 видно, что фазовые траектории выходят на предельный цикл, поэтому с помощью этой модели можно описывать циклические процессы.

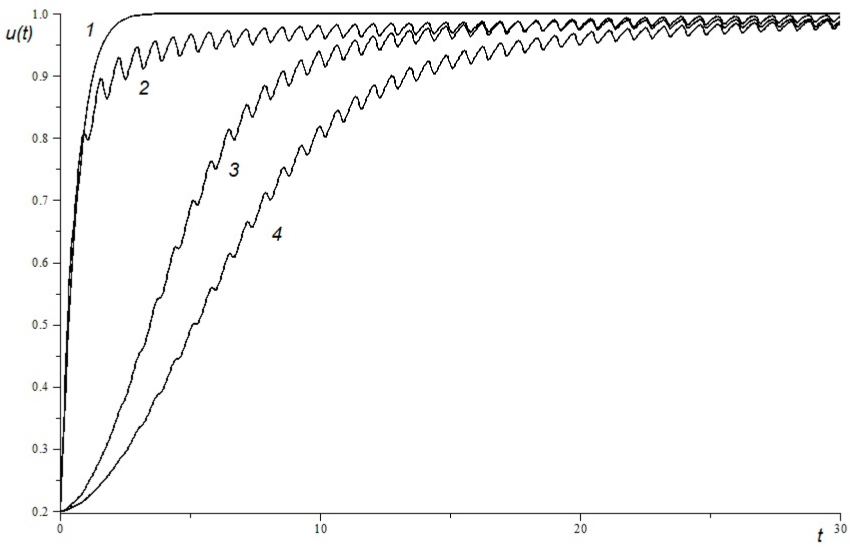

Фото 2. Пример 2. Осциллограмма: *1*) точное решение, *2*) $a_k=-1, b_k=0, c_k=1$ (max value $=0.990940$), *3*) $Q=2k$ (max value $=0.996933$), *4*) $Q=k$ (max value $=0.988204$)

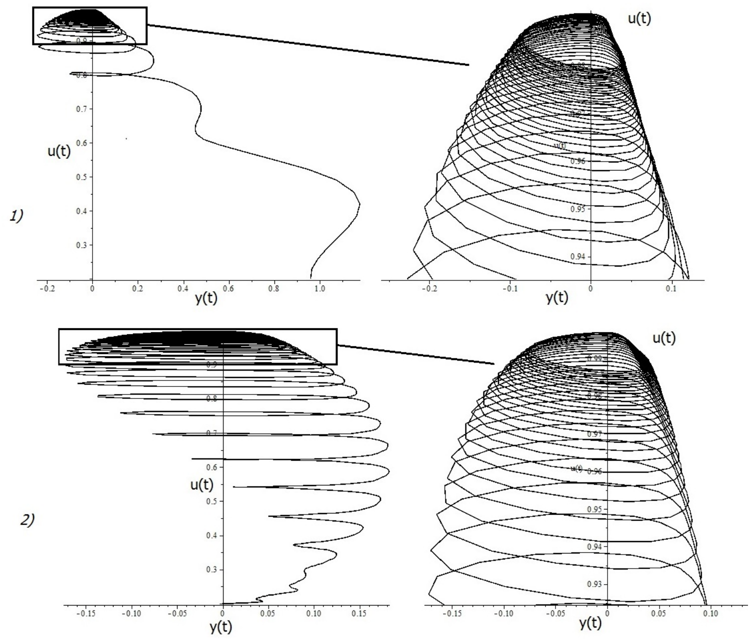

Фото 3. Фазовая траектория. *1)* $a_k=-1, b_k=0, c_k=1$, *2)* $a_k=\frac{-2k}{N}, b_k=0, c_k=\frac{2k}{N}$

Погрешность метода и расчётная точность

Рассмотрим изменение абсолютной ошибки ε и расчётный порядок точности p схемы (7), при изменении шага τ. Для вычисления абсолютной ошибки ε, будем использовать правило Рунге [17]:

$$\varepsilon=\max\left(\frac{u_{2N}[2k-1]-u_N[k]}{2^{p_{aprior}-1}}\right), k=0..N, p_{aprior}=1.$$

Априорную точность p_{aprior} решения в данном методе положим равной 1. Это следует из общего порядка аппроксимации схемы, задаваемого в граничных узлах сетки.

Точность решения вычислялась по следующей формуле:

$$p = \frac{\ln(|\varepsilon|)}{\ln(\tau)}$$

Далее в таблицах приведены ошибки методов Ньютона и явной конечно-разностной схемы при различных значениях управляющих параметров.

Таблица 1

$\alpha(t) = 1$, **коэффициенты:** $a_k = -1, b_k = 0, c_k = 1$.

$T = 4$		Явная схема		Метод Ньютона	
N	$\tau = T/M$	ε	p	ε	p
131	0.03053	0.02976399	1.00732407	0.02852538	1.01950699
263	0.01521	0.01472148	1.00778523	0.01442476	1.01264953
527	0.007590	0.00732013	1.00742083	0.00724523	1.00952790
1055	0.003791	0.00365016	1.00681261	0.00362983	1.00781448
2111	0.001895	0.00182260	1.00620044	0.00181659	1.00672675

Таблица 2

$$\alpha(t) = \frac{(1-\delta-\theta)\cos(\mu t) + (\theta - \delta + \phi)}{2}$$, **коэффициенты:** $a_k = -1, b_k = 0, c_k = 1$.

$T = 30$		Явная схема		Метод Ньютона	
N	$\tau = T/M$	ε	p	ε	p
131	0.02290	0.22322959	1.01733685	0.10334363	1.53982068
263	0.01141	0.11034162	1.01530081	0.13943750	0.90749798
527	0.005693	0.05485674	1.01291935	0.07113849	0.92223440
1055	0.002844	0.02761422	1.00823724	0.03607520	0.93316216
2111	0.001421	0.01384458	1.00614547	0.01836893	0.93967042

Таблица 3

$\alpha(t) = 1$, **коэффициенты:** $a_k = \frac{-k}{N}, b_k = 0, c_k = \frac{k}{N}$

$T = 4$		Явная схема		Метод Ньютона	
N	$\tau = T/M$	ε	p	ε	p
131	0.0353	0.01194783	1.26893900	0.01775548	1.15539548
263	0.01521	0.00590738	1.22592560	0.00888477	1.12842195
527	0.007590	0.00293373	1.19450157	0.00444444	1.10965046
1055	0.003791	0.00146462	1.17061051	0.00222269	1.09579049
2111	0.001895	0.00073123	1.15189252	0.00111142	1.08510469

Заключение

Была рассмотрена задача Коши эредитарного уравнения (1) с непостоянными коэфициентами, которые являются гладкими функциями. Проведён численный анализ предложенной задачи с помощью методов: нелокальной явной конечно-разностной схемы и метода Ньютона.

Проведена оценка вычислительной точности по правилу Рунге для используемых численных методов. Показано что при уменьшении шага τ, вычислительная точность $p \to 1$, при этом погрешность ε уменьшается в два раза, и стремится к 0.

Поэтому оба метода можно использовать для численного решения предложенной задачи. При этом метод Ньютона быстрее сходится чем метод явной конечно-разностной схемы.

Построены с помощью численных методов новые расчетные кривые и фазовые траектории.

Список литературы

[1] Учайкин В. В., *Метод дробных производных*, Артишок, Ульяновск, 2008, 512 с. [Uchajkin V. V., *Metod drobnyh proizvodnyh*, Artishok, Ul'yanovsk, 2008, 512 pp.]

[2] Petras I., *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*, Springer Science and Business Media, 2011, 218 pp.

[3] Volterra V., "Sur lesequations integro-differentielles et leurs applications", *Acta Mathematica*, **35**:1 (1912), 295–356.

[4] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с. [Nahushev A. M., *Drobnoe ischislenie i ego primenenie*, Fizmatlit, M., 2003, 272 pp.]

[5] Паровик Р. И, "Дробное исчисление в теории колебательных систем", *Современные наукоемкие технологии*, 2017, № 1, 61–68. [Parovik R. I, "Drobnoe ischislenie v teorii kolebatel'nyh sistem", *Sovremennye naukoemkie tekhnologii*, 2017, № 1, 61–68].

[6] Твёрдый Д. А, "Уравнение Риккати с производной дробного переменного порядка", *Международный студенческий научный вестник*, 2017, № 2, 42–42. [Tvyordyj D. A, "Uravnenie Rikkati s proizvodnoj drobnogo peremennogo poryadka", *Mezhdunarodnyj studencheskij nauchnyj vestnik*, 2017, № 2, 42–42].

[7] Tvyordyj D.A., "Riccati equation with variable heredity", *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*, **16**:1 (2017), 61–68.

[8] Твёрдый Д. А., "Эредитарное уравнение Риккати с дробной производной переменного порядка", *Актуальные проблемы прикладной математики и физики*, Материалы международной научной конференции, 2017, 200. [Tvyordyj D. A., "EHreditarnoe uravnenie Rikkati s drobnoj proizvodnoj peremennogo poryadka", *Aktual'nye problemy prikladnoj matematiki i fiziki*, Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, 2017, 200].

[9] Паровик Р. И., "Математическое моделирование нелинейных эредитарных осцилляторов", 2017, 135. [Parovik R. I., "Matematicheskoe modelirovanie nelinejnyh ehreditarnyh oscillyatorov", 2017, 135].

[10] Riccati J., "Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus", *Actorum Eruditorum Supplementa*, 1724, № 8, 66–73.

[11] Sweilam N. H., Khader M. M., Mahdy A. M. S., "Numerical studies for solving fractional Riccati differential equation", *Applications and Applied Mathematics*, **7**:2 (2012), 595–608.

[12] Parovik R. I., "Mathematical model of a wide class memory oscillators", *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS)*, **11**:2 (2018), 108–122.

[13] Parovik R. I., "Explicit finite-difference scheme for the numerical solution of the model equation of nonlinear hereditary oscillator with variable-order fractional derivatives", *Archives of Control Sciences*, **26**:3 (2016), 429–435.

[14] Новикова Е. Р., "Осциллятор Ван дер Поля-Дуффинга с эффектом эредитарности", *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, **2**:18 (2017), 65–75. [Novikova E. R., "Oscillyator Van der Polya-Duffinga s ehffektom ehreditarnosti", *Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskie nauki*, **2**:18 (2017), 65–75].

[15] Кумакшев С. А., "Исследование регулярных и релаксационных колебаний осцилляторов Рэлея и Ван-дер-Поля", *Вестник Нижегородского университета им. НИ Лобачевского*, 2011, № 4–2, 203–205. [Kumakshev S. A., "Issledovanie regulyarnyh i

relaksacionnyh kolebanij oscillyatorov Rehleya i Van-der-Polya", *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. NI Lobachevskogo*, 2011, №4–2, 203–205].

[16] Баранов С. В., Кузнецов С. П., Пономаренко В. И., "Хаос в фазовой динамике осциллятора Ван дер Поля с модулированной добротностью и дополнительной запаздывающей обратной связью", *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*, **18**:1 (2010), 11–23. [Baranov S. V., Kuznecov S. P., Ponomarenko V. I., "Haos v fazovoj dinamike oscillyatora Van der Polya s modulirovannoj dobrotnost'yu i dopolnitel'noj zapazdyvayushchej obratnoj svyaz'yu", *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Prikladnaya nelinejnaya dinamika*, **18**:1 (2010), 11–23].

[17] Березин И. С., Жидков Н. П., *Методы вычислений*. Т. 2, М.-Л., 1967, 464 с. [Berezin I. S., ZHidkov N. P., *Metody vychislenij*. V. 2, M.-L., 1967, 464 pp.]

[18] Твердый Д. А., Паровик Р. И., "Программа численного расчета задачи Коши для уравнения Риккати с производной дробного переменного порядка", *Фундаментальные исследования*, **8-1** (2017), 98–103. [Tverdyj D. A., Parovik R. I., "Programma chislennogo rascheta zadachi Koshi dlya uravneniya Rikkati s proizvodnoj drobnogo peremennogo poryadka", *Fundamental'nye issledovaniya*, **8-1** (2017), 98–103].

[19] Федер Е., *Фракталы*, Мир, М., 1991. [Feder E., *Fraktaly*, Mir, M., 1991].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Учайкин В. В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.

[2] Petras I. Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation: Springer Science and Business Media, 2011. 218 p.

[3] Volterra V. Sur lesequations integro-differentielles et leurs applications // Acta Mathematica. 1912. vol 35. no. 1. pp. 295–356.

[4] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

[5] Паровик Р. И. Дробное исчисление в теории колебательных систем // Современные наукоемкие технологии. 2017. №1. С. 61–68.

[6] Твёрдый Д. А. Уравнение Риккати с производной дробного переменного порядка // Международный студенческий научный вестник. 2017. №2. С. 42–42.

[7] Tvyordyj D.A. Riccati equation with variable heredity // Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2017. vol. 16. no. 1. pp. 61–68.

[8] Твёрдый Д. А. Эредитарное уравнение Риккати с дробной производной переменного порядка // Актуальные проблемы прикладной математики и физики: Материалы международной научной конференции, 2017. С. 200.

[9] Паровик Р. И. Математическое моделирование нелинейных эредитарных осцилляторов. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2017. 135 с.

[10] Riccati J. Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus // Actorum Eruditorum Supplementa. 1724. no. 8. pp. 66–73.

[11] Sweilam N. H., Khader M. M., Mahdy A. M. S. Numerical studies for solving fractional Riccati differential equation // Applications and Applied Mathematics. 2012. vol. 7. no. 2. pp. 595–608.

[12] Parovik R.I. Mathematical model of a wide class memory oscillators // Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS). 2018. vol. 11. no. 2. pp. 108–122.

[13] Parovik R. I. Explicit finite-difference scheme for the numerical solution of the model equation of nonlinear hereditary oscillator with variable-order fractional derivatives // Archives of Control Sciences. 2016. vol. 26. no. 3. pp. 429–435.

[14] Новикова Е. Р. Осциллятор Ван дер Поля-Дуффинга с эффектом эредитарности // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2017. Т. 2. № 18. С. 65–75.

[15] Кумакшев С. А. Исследование регулярных и релаксационных колебаний осцилляторов Рэлея и Ван-дер-Поля // Вестник Нижегородского университета им. НИ Лобачевского. 2011. №. 4–2. С. 203–205.

[16] Баранов С. В., Кузнецов С. П., Пономаренко В. И. Хаос в фазовой динамике осциллятора Ван дер Поля с модулированной добротностью и дополнительной запаздывающей обратной связью // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18. №1. С. 11–23.

[17] Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2. М.-Л.: 1967. 464 с.

[18] Твердый Д. А., Паровик Р. И. Программа численного расчета задачи Коши для уравнения Риккати с производной дробного переменного порядка // Фундаментальные исследования. 2017. № 8-1. С. 98–103.

[19] Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991.

Для цитирования: Твёрдый Д. А. Задача Коши для уравнения Риккати с непостоянными коэффициентами и учетом переменной степенной памяти // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 3(23). C. 148-157. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-148-157

For citation: Tvoyrdyj D. A. The Cauchy problem for the Riccati equation with variable power memory and non-constant coeffcients, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018, **23**: 3, 148-157. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-148-157

Поступила в редакцию / Original article submitted: 16.06.2018

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2018. no.3(23). pp. 148–157. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-148-157

MSC 34A08

THE CAUCHY PROBLEM FOR THE RICCATI EQUATION WITH VARIABLE POWER MEMORY AND NON-CONSTANT COEFFCIENTS *

D. A. Tvoyrdyj

[1] Institute of Applied Mathematics and Automation - a branch of the federal state budget scientific institution "Federal Scientific Center"KBS CRAS 360000, Nalchik, Shortanova, 89a
[2] Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia
E-mail: dimsolid95@gmail.com

The Cauchy problem for the Riccati equation with non-constant coefficients and taking into account variable power memory is proposed. Power memory is defined by the operator of a fractional derivative of a variable order generalizing the Gerasimov-Caputo derivative. In work with the help of numerical methods: the Newton method and the explicit finite-difference scheme, the solution of the proposed Cauchy problem is found, and also their calculation accuracy is determined using the Runge rule. It is shown that both methods can be used to solve the proposed Cauchy problem, but Newton's method converges faster. Further in this work, the calculated curves and phase trajectories were constructed for a different choice of the fractional order function of the differentiation operator. It is assumed that the proposed model can be used in describing economic cyclical processes.

Key words: Riccati equation, fractional derivative, hereditarity, numerical methods, differential equation.

© Tvoyrdyy D. A., 2018

*This work was supported by the grant of the President of the Russian Federation No. MK-1152.2018.1 and on the topic of the research of Vitus Bering Kamchatka State University "Application of fractional calculus in the theory of oscillatory processes"No.AAAA-A17-117031050058-9.