Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 3(23). C. 124-130. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-124-130

УДК 517.927

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ С УЧЕТОМ ПОЛОВОЙ СТРУКТУРЫ

Ф. М. Лосанова, Р. О. Кенетова

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000,
г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А

E-mail: losanovaf@gmail.com, raisa.kenetova@mail.ru

В данной работе проведен анализ математической модели, которая описывает динамику популяции с учетом половой структуры. Для определения плотности семейных пар найдено нелинейное интегральное уравнение в свертках, обсуждены подходы к решению.

Ключевые слова: модель с половой структурой, динамика численности населения, плотность семейных пар, нелинейное интегральное уравнение, корень свертки.

MSC 34L99

ON ONE MODEL OF POPULATION DYNAMICS WITH REGARD TO SEX STRUCTURE

F. M. Losanova, R. O. Kenetova

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Nalchik,
Shortanova st., 89A, Russia

E-mail: losanovaf@gmail.com, raisa.kenetova@mail.ru

In this paper, we consider a mathematical model describing population dynamics in view of the sexual structure. We obtain a nonlinear convolution equation for determining the density of family pairs, and discuss approaches to its solution.

Key words: sexual structure model, population dynamics, density of family pairs, nonlinear integral equation, convolution root.

Введение

В настоящее время теория структурированных биологических популяций является достаточно активно развивающейся областью науки. Она находит важные приложения в биофизике и медицине. Значительный прикладной интерес представляют также те задачи теории структурированных биологических популяций, которые касаются связи внутрипопуляционной дифференциации, обусловленной внутренней структурой их элементов, с пространственно-временными аспектами их эволюции.

Рождаемость и смертность в определенных пределах могут быть описаны линейными процессами, а образование семейных пар является существенно нелинейным феноменом. Задача моделирования процесса формирования пары была названа "двухполой задачей"[1]. Построением и исследованием систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а также интегральных уравнений, описывающих возрастную структуру занимались многие авторы, такие как D.G. Kendall [2], N. Keyfitz [3], D.D McFarland [4], B. Parlett [5], J.H. Pollard [1], A.G. Fredrickson [6]. О.В. Староверов [7] предложил общую модель, учитывающую возрастную структуру и предпочтительный возраст вступления в брак.

Недостатком моделей, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями без возрастной структуры является то, что они подразумевают, что даже новорожденные могут незамедлительно образовывать пары. Период созревания можно моделировать только путем введения в дальнейшем полу-дискретных моделей интегральных уравнений в бесконечных пространствах [8].

В работе [8] представлена система трех связанных обыкновенных дифференциальных уравнений, которая включает в себя многие модели из более ранних, в виде особых случаев. Исследуемая в [8] модель нелинейна, стационарные решения представлены в экспоненциальном виде, которые описывают популяции с постоянной социальной структурой и соотношением полов, которые растут (или распадаются) экспоненциально по времени. "Рождение"следует интерпретировать как возраст особи достигшего совершеннолетнего возраста.

1. Описание модели

В данной работе проведен анализ математической модели, в основе которой лежит модель, предложенная в работе [8]

$$\dot{x} = az - \mu x - F(x,y), \tag{1}$$

$$\dot{y} = bz - \nu y - F(x,y), \tag{2}$$

$$\dot{z} = F(x,y) - cz, \tag{3}$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0. \tag{4}$$

Здесь $x = x(t)$, $y = y(t)$ – численность неженатых мужчин и незамужних женщин; $z = z(t)$ – число семейных пар; $0 < t < T$; μ, ν — коэффициенты интенсивности смертности мужчин и женщин (состоящих и не состоящих в браке), a, b, c — параметры модели, $F(x,y)$ — интенсивность (скорость) образования пар в результате контактов между неженатыми мужчинами и незамужними женщинами. Причем функция $F(x,y)$ должна удовлетворять следующим свойствам:

1) $F(0,y) = F(x,0) = 0$, для всех $x \geq 0, y \geq 0$;

2) если $u \geq 0, \vartheta \geq 0$, то $F(x+u, y+\vartheta) \geq F(x,y)$, $u, \vartheta = const$.

В нашей модели предлагается учитывать интенсивность образования семейных пар путем введения нелинейного оператора

$$F(x,y) = x * y * \alpha,$$

где

$$(x*y)(t) = \int_0^t x(t-s)y(s)ds$$

— свертка Лапласа функций $x(t)$ и $y(t)$, $\alpha(t)$ — заданная неотрицательная функция. Очевидно, что оператор $F(x,y)$ обладает свойствами 1) и 2). Кроме того, в предложенном виде модель более проста для анализа, а выбор плотности $\alpha(t)$ предоставляет более широкие возможности при описании конкретных данных.

2. Анализ модели

С помощью уравнения (3), (1) и (2) можно переписать в виде

$$\dot{x} + \mu x = (a-c)z - \dot{z}, \tag{5}$$

$$\dot{y} + \nu y = (b-c)z - \dot{z}. \tag{6}$$

Предполагая правые части известными, уравнения (5) и (6) перепишем в виде

$$x(t) = x_0 e^{-\mu t} + \int_0^t ((a-c)z - \dot{z})e^{-\mu(t-\eta)}d\eta, \tag{7}$$

$$y(t) = y_0 e^{-\nu t} + \int_0^t ((b-c)z - \dot{z})e^{-\nu(t-\eta)}d\eta. \tag{8}$$

Интегрируя по частям уравнения (7) и (8), получим

$$x(t) = (x_0 + z_0)e^{-\mu t} + (a-c+\mu)z * e^{-\mu t} - z, \tag{9}$$

$$y(t) = (y_0 + z_0)e^{-\nu t} + ((b-c+\nu)z * e^{-\nu t} - z. \tag{10}$$

Уравнение (3) также можно переписать в виде

$$z(t) = z_0 e^{-ct} + F(x,y) * e^{-ct}. \tag{11}$$

2.1. Случай $\mu \neq \nu$

Будем считать, что $\mu \neq \nu$. Вычислим $F(x,y)$

$$F(x,y) = [(x_0+z_0)e^{-\mu t} + (a-c+\mu)z*e^{-\mu t} - z]*$$
$$*[(y_0+z_0)e^{-\nu t} + ((b-c+\nu)z*e^{-\nu t} - z]*\alpha =$$

$$= (x_0+z_0)(y_0+z_0)\frac{e^{-\nu t}-e^{-\mu t}}{\mu-\nu}*\alpha + \big[(x_0+z_0)(b-c+\nu)\frac{e^{-\nu t}-e^{-\mu t}}{\mu-\nu} - \tag{12}$$
$$-(x_0+z_0)e^{-\mu t} + (a-c+\mu)(y_0+z_0)\frac{e^{-\nu t}-e^{-\mu t}}{\mu-\nu} - (y_0+z_0)e^{-\nu t}\big]*z*\alpha +$$
$$+\big[(a-c+\mu)(b-c+\nu)\frac{e^{-\nu t}-e^{-\mu t}}{\mu-\nu} - (a-c+\mu)e^{-\mu t} - (b-c+\nu)e^{-\nu t} + 1\big]*z*z*\alpha.$$

2.2. Случай $\mu = \nu$

Учитывая, что $e^{-\mu t} * e^{-\mu t} = te^{-\mu t}$, формула (12) запишется в виде

$$F(x,y) = [z*z*(a_1b_1te^{-\mu t} - (a_1+b_1)e^{-\mu t} + 1) +$$
$$+z*(((y_0+z_0)a_1 + (x_0+z_0)b_1)te^{-\mu t} - (x_0+y_0+2z_0)e^{-\mu t} +$$
$$+(x_0+z_0)(y_0+z_0)te^{-\mu t}]*\alpha.$$

3. Интегральное уравнение для плотности семейных пар

Подставляя (12) в (11) получим

$$z(t) = (z*z*B)(t) + (z*C)(t) + D(t), \tag{13}$$

где

$$B(t) = [B_1e^{-(\nu+c)t} - B_2e^{-(\mu+c)t} + e^{-ct}]*\alpha,$$
$$B_1 = \frac{(a-c+\nu)(b-c+\nu)}{\mu-\nu}, \quad B_2 = \frac{(a-c+\mu)(b-c+\mu)}{\mu-\nu},$$
$$C(t) = [C_1e^{-(\nu+c)t} - C_2e^{-(\mu+c)t}]*\alpha,$$
$$C_1 = \frac{(a-c+\nu)(y_0+z_0) + (b-c+\nu)(x_0+z_0)}{\mu-\nu},$$
$$C_2 = \frac{(b-c+\mu)x_0 - (a-c+\mu)y_0 + z_0(b-a)}{\mu-\nu},$$
$$D(t) = D_1[e^{-(\nu+c)t} - e^{-(\mu+c)t}]*\alpha + z_0e^{-ct}, \quad D_1 = \frac{(x_0+z_0)(y_0+z_0)}{\mu-\nu}.$$

Перенеся слагаемое $(z*C)(t)$ уравнения (13) в левую часть и считая оставшуюся правую часть известной, приходим к уравнению

$$z(t) = F(t) + (R*F)(t), \tag{14}$$

где $F(t) = (z*z*B)(t) + D(t)$, $R(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C^{*n}(t)$ — резольвента ядра $C(t)$. Здесь $C^{*n}(t)$ означает n-ую степень свертки: $C^{*0} = C(t)$, $C^{*n}(t) = (C*C^{n-1})(t)$.

Подставив (14) в (13), приходим к интегральному уравнению

$$z(t) = (z*z*P)(t) + Q(t), \tag{15}$$

где $P(t) = B(t) + (R*B)(t)$, $Q(t) = D(t) + (R*D)(t)$.

4. О методах решения уравнения (15)

Таким образом, для определения плотности семейных пар $z(t)$ мы пришли к нелинейному интегральному уравнению (15). Далее обсудим некоторые подходы к решению этого уравнения.

4.1. Сведение к вопросу о нахождении корня свертки

Обозначим через $w(t) = (z*P)(t)$. Далее, подействуем на обе части уравнения (15) оператором $P*$, то есть возьмем свертку с функцией $P(t)$, получим

$$w(t) = (w*w)(t) + (Q*P)(t). \tag{16}$$

Или, после простых преобразований

$$\left(w(t) - \frac{1}{2}\right) * \left(w(t) - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - (Q*P)(t). \tag{17}$$

Таким образом, вопрос нахождения решения уравнения (15) сведен к нахождению квадратного корня свертки от правой части (17). То есть, необходимо найти функцию $h(t)$ такую, что

$$(h*h)(t) = \frac{1}{4} - (Q*P)(t).$$

Определив $h(t)$ получим, что

$$w(t) = \frac{1}{2} \pm h(t).$$

Далее, $z(t)$ ищется как решение уравнения $(z*P)(t) = w(t)$, которое является интегральным уравнением первого рода типа свертки, и может быть обращено, например, если $P(0) \neq 0$ и $P'(t) \in C[0,T]$.

4.2. Линеаризация

Для поиска приближенного решения (15) можно применить метод линеаризации, предложенный в работе [9, стр. 68]. Для этого вместо исходного уравнения рассматривается линеаризованное нагруженное уравнение

$$z(t) = (z*\bar{z}*P)(t) + Q(t), \tag{18}$$

где $\bar{z} = \frac{1}{T}\int_0^T z(s)ds$ — усреднение искомого решения. Полученное уравнение является линейным и его решение можно найти (например методом последовательных приближений), считая $\bar{z}$ известным. Далее, усредняя найденное решение, получаем функциональное уравнение для нахождения $\bar{z}$. Данный метод позволяет находить приближенное решение, которое в определенных случаях оказывается достаточным для проведения качественного анализа модели.

Заключение

В данной работе исследована математическая модель, описывающая динамику популяции с учетом половой структуры, которая представляет собой систему трех связанных обыкновенных дифференциальных уравнений. Решая их мы приходим к нелинейному интегральному уравнению (15) в свертках для определения плотности семейных пар $z(t)$. В работе обсуждены методы решения данного уравнения. Один из них сводит вопрос о решении нелинейного уравнения к вопросу о нахождении квадратного корня свертки. Второй метод позволяет находить приближенные решения для проведения качественного анализа модели.

Список литературы

[1] Pollard J. H., *Stochastic processes and population growth*, Cambridge University Press, 1973.

[2] Kendall D. G., "Models for pair formation in bisexual populations", *Roy. Statist. Soc.*, **Ser B 2** (1949), 230-264.

[3] Keyfitz N., "The mathematics of sex and marriage", *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposion on Mathematical Statistics and Probability*. V. IV, Biology and health, 1972, 89-108.

[4] McFarland D. D., "Comparison of alternative marriage models", *Population dynamics*, Academic Press, New York-London, 1972, 89-106.

[5] Parlett B., "Can there be a marriage function?", *Population Dynamics*, Academic Press, New York-London, 1972, 107-135.

[6] Fredrickson A. G., "A mathematical theory of age structure in sexual populations: Random mating and monogamous marriage models", *Math. Biosci.*, **10** (1971), 117-143.

[7] Staroverov, O. V., "Reproduction of the structure of the population and marriages", *Ekonomika i matemati6eskije metody*, **13** (1977), 72-82.

[8] Hadeler K. P., Waldstatter R., Worz-Busekros A., "Models for pair formation in bisexual populations", *J. Math. Biol.*, **26**:6 (1988), 635-639.

[9] Нахушев А.М., *Нагруженные уравнения и их применение*, Наука, М., 2012, 232 с. [Nahushev A.M., *Nagruzhennye uravneniya i ih primenenie*, Nauka, M., 2012, 232 pp.]

Список литературы (ГОСТ)

[1] Pollard J. H. Stochastic processes and population growth. Cambridge University Press, 1973.

[2] Kendall D. G. Models for pair formation in bisexual populations // Roy. Statist. Soc. 1949. Ser B 2. pp. 230-264.

[3] Keyfitz N. The mathematics of sex and marriage // Proceedings of the Sixth Berkeley Symposion on Mathematical Statistics and Probability. 1972. IV: Biology and health. pp. 89-108.

[4] McFarland D. D. Comparison of alternative marriage models. Population dynamics. New York-London: Academic Press, 1972. C. 89-106.

[5] Parlett B. Can there be a marriage function?. Population Dynamics. New York-London: Academic Press, 1972. pp. 107-135.

[6] Fredrickson A. G. A mathematical theory of age structure in sexual populations: Random mating and monogamous marriage models // Math. Biosci. 1971. vol. 10. pp. 117-143.

[7] Staroverov O. V. Reproduction of the structure of the population and marriages // Ekonomika i matematicheskije metody. 1977. vol. 13. pp. 72-82.

[8] Hadeler K. P., Waldstatter R., Worz-Busekros A. Models for pair formation in bisexual populations // J. Math. Biol. 1988. vol. 26. no. 6. pp. 635-639.
[9] Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.

Для цитирования: Лосанова Ф. М., Кенетова Р. О. Об одной модели динамики численности населения с учетом половой структуры // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 3(23). C. 124-130. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-124-130

For citation: Losanova F. M., Kenetova R. O. On one model of population dinamics with regard to sex structure, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018, **23**: 3, 124-130. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-124-130

Поступила в редакцию / Original article submitted: 08.06.2018