

УДК 517.938

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАОТИЧЕСКИХ И РЕГУЛЯРНЫХ РЕЖИМОВ ФРАКТАЛЬНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ФИТЦХЬЮ-НАГУМО *

О. Д. Липко

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032,
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4
E-mail: olgalipko95@mail.ru

В настоящей работе исследуются условия существования хаотических и регулярных колебательных режимов эрдитарного осциллятора ФитцХью-Нагумо (ЭФН) – математической модели распространения нервного импульса в мембране. Для достижения этой цели, с помощью нелокальной явной конечно-разностной схемы и алгоритма Вольфа с процедурой ортогонализации Грама-Шмидта, были построены спектры максимальных показателей Ляпунова в зависимости от значений управляющих параметров модели ЭФН. Результаты расчетов показали, что существуют спектры максимальных показателей Ляпунова как с положительными значениями, так и с отрицательными. Результаты расчетов также были подтверждены с помощью осциллограмм и фазовых траекторий, что указывает на возможность существования как хаотических аттракторов, так и предельный циклов.

Ключевые слова: предельный цикл, осциллятор ФитцХью-Нагумо со степенной памятью, спектр максимальных показателей Ляпунова, осциллограммы и фазовые траектории.

© Липко О. Д., 2018

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ № МК-1152.2018.1 и по теме НИР КамГУ имени Витуса Беринга «Применение дробного исчисления в теории колебательных процессов» №АААА-А17-117031050058-9.

Введение

Классическая модель осциллятора ФитцХью-Нагумо (ФН) была предложена Джин-Ичи Нагумо, Сугуру Аримото и Сюдзи Йошизава в 1962 году [1], а годом ранее – Ричардом ФитцХью [2] для математического описания в биофизике распространения нервного импульса в мембране. Математическая модель осциллятора ФН является разновидностью осциллятора Ван дер Поля-Дуффинга и поэтому эта система обладает устойчивыми колебаниями (предельными циклами) и хаотической динамикой. Так как осциллятор ФН описывает предельные циклы, то он может быть использован при моделировании циклических процессов. Например, временной динамики сейсмической активности. В работе [3] рассмотрена диффузионная модель ФН миграции сейсмической активности вдоль разлома.

В случае эффекта наследственности (эредитарности) классическая модель ФН имеет обобщение, согласно которому текущее состояние системы зависит от конечного числа предыдущих состояний. Такой эффект распространен во фрактальных средах [4] и изучается в рамках наследственной механики [5]. Эредитарный осциллятор ФН (ЭФН) по аналогии с работой Вольтерра [6] можно описать с помощью интегро-дифференциальных уравнений с разностными ядрами, которые называются функциями памяти. В силу широкого распространения степенных законов в природе [7] имеет смысл выбрать функции памяти степенными. Такое предположение дает возможность перейти к уравнениям с производными дробных порядков, которые изучаются в рамках дробного исчисления [8], а эредитарные осцилляторы в этом случае называются фрактальными.

В работах автора [9, 10] был рассмотрен осциллятор ЭФН (задача Коши), получена и исследована нелокальная явная конечно-разностная схема, позволяющая найти численное решение соответствующей задачи Коши. С помощью численного алгоритма были построены и исследованы осциллограммы и фазовые траектории. Эта работа является логическим продолжением выше перечисленных статей и имеет целью установить условия существования хаотических и регулярных режимов ЭФН.

Постановка задачи

Рассмотрим обобщенную модель нелинейного фрактального осциллятора ЭФН:

$$\begin{cases} \partial_{0r}^{\beta} x(\tau) = c \cdot (y(t) - x(t) - \frac{x^3(t)}{3} + z), \\ \partial_{0r}^{\gamma} x(\tau) = -\frac{(x(t) - a + by(t))}{c}, \end{cases} \quad (1)$$

где дифференциальные операторы:

$$\partial_{0r}^{\beta} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}}, \quad \partial_{0r}^{\gamma} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\gamma}}, \quad (2)$$

определены в смысле Герасимова-Капуто [11, 12] с дробными порядками $1 < \beta < 2$, $0 < \gamma < 1$, a, b, c – константы, удовлетворяющие условиям $1 - 2b/3 < a < 1$, $0 < b < 1$, $b < c^2$, $x(t)$ – мембранный потенциал, z – интенсивность раздражителя, константа в первом приближении, которая также может иметь вид прямоугольного импульса

или дельта-функции, $t \in [0, T]$ — время процесса, $T > 0$ — время моделирования, x_0 и y_0 — начальные условия.

Модель ЭФН (1) описывает фрактальный нелинейный осциллятор и в случае $\beta = 2$ и $\gamma = 1$ переходит в классический нелинейный осциллятор ФН. Запишем (1) в виде системы в случае, когда $\{\beta\} \leq \{\gamma\}$ [13]:

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha_1} x_1(\tau) = x_2(t), \alpha_1 = \gamma, \\ \partial_{0t}^{\alpha_2} x_2(\tau) = a + bz - qx(t) - gx^3(t) - c(x^2 + p)x_2(t), \alpha_2 = \beta - \gamma, \end{cases} \quad (3)$$

где $p = b/c^2 - 1$, $q = 1 - b$, $g = b/3$ были взяты из работы [1].

Случай, когда $\{\beta\} > \{\gamma\}$ приводит к увеличению системы (3) на одно уравнение и будет рассматриваться в других работах.

В дальнейшем будем рассматривать систему (3) совместно с уравнениями в вариациях для построения спектра показателей Ляпунова по алгоритму Вольфа [14]. Составим уравнения в вариациях:

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha_1} \Delta x_1(\tau) = \Delta x_2(t), \\ \partial_{0t}^{\alpha_2} \Delta x_2(\tau) = (-2cx(t)y(t) - q - 3gx^2(t))\Delta x_1 - c(x^2(t) + p) \cdot \Delta x_2(t), \end{cases} \quad (4)$$

Правая часть системы (4) является произведением элементов матрицы Якоби системы (3) на соответствующие элементы векторов (вариации) $\{\Delta x_1, \Delta x_2\}$.

Системы (3) и два комплекта систем типа (4) с ортогональными начальными условиями решаются совместно с помощью численных методов, например, конечно-разностных схем. Далее строятся вектора, которые подвергаются процедуре ортогонализации Грамма-Шмидта и высчитываются максимальные показатели Ляпунова [14]. Показатели Ляпунова, построенные от различных значений управляющих параметров исходной системы (1) в совокупности образуют спектр. Положительные значения максимального показателя Ляпунова соответствуют области существования хаотического режима, а отрицательные — области существования регулярного режима.

Результаты моделирования и их обсуждение

В качестве численного метода решения систем (3) и (4) была выбрана нелокальная явная конечно-разностная схема с регулярной сеткой с количеством узлов $N = 200$ и шагом дискретизации $\tau = 0.05$. Свойства такой схемы были рассмотрены в работах автора [9] и [10], а в работе [16] обосновывается условие устойчивости и сходимости схем подобного типа.

Отметим, что так как параметры модели (1) ограничены, то эффектов, связанных с жесткостью системы, мы не наблюдаем.

Заметим, что области изменений значений управляющих параметров при построении спектров максимальных показателей Ляпунова можно расширить, если того требуют условия задачи. Однако при этом вырастут вычислительные затраты.

Пример 1. Рассмотрим значения управляющих параметров: $T = 100, c = 3, a = 0.7, b = 0.8, z = -0.68, \beta = 1.6, \gamma = 1$.

На осциллограмме (рис. 1а) мы можем увидеть, что при выбранных значениях управляющих параметров амплитуда колебаний выходит на постоянный уровень, а фазовая траектория (рис. 1б) имеет замкнутую орбиту и выходит на предельный цикл (регулярный аттрактор).

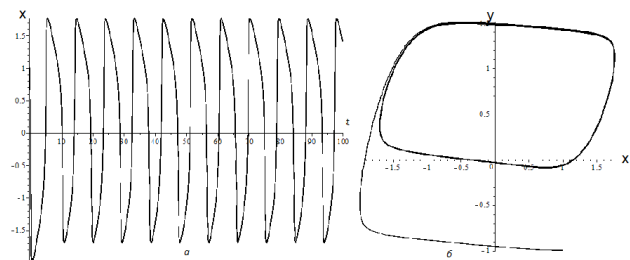


Фото 1. Осциллограмма *a)* и фазовая траектория *b)*

Пример 2. Рассмотрим следующие значения управляющих параметров: $T = 100, c = 7, a = 0.7, b = 0.8, z = -0.68, \beta = 1.6, \gamma = 1$ и построим графики.

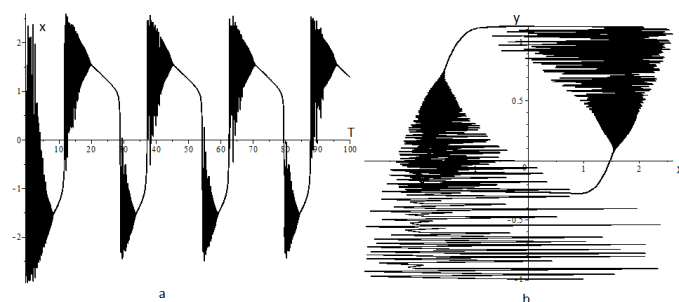


Фото 2. Осциллограмма *a)* и фазовая траектория *b)*

На рис. 2 приведен пример хаотического аттрактора, когда хаотический режим происходит в пределах некоторой ограниченной области на фазовой плоскости (рис. 2б).

Пример 3. Выберем значения управляющих параметров для построения спектра ляпуновских показателей: $N = 2000, T = 100, c = 3, a = 0.7, b = 0.8, z = -0.4, \alpha_2 = 1, x_0 = 1, y_0 = -1$.

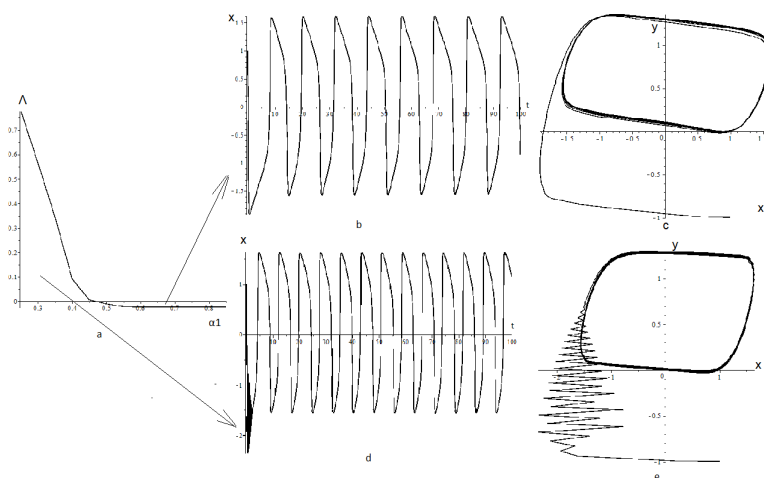


Фото 3. *a)* Спектр максимальных показателей Ляпунова от значений $\alpha_1 \in [0.1, 0.85]$ с шагом $h = 0.05$; *b)* осциллограмма при $\alpha_1 = 0.6$; *c)* фазовая траектория при $\alpha_1 = 0.6$; *d)* осциллограмма при $\alpha_1 = 0.4$; *e)* фазовая траектория при $\alpha_1 = 0.4$.

На рис. 3а приведен спектр максимальных ляпуновских показателей, построенный от значений параметра α_1 , на котором можно увидеть области как положительных $\alpha_1 \in [0.1, 0.457]$, так и отрицательных значений $\alpha_1 \in (0.457, 0.85]$. Далее в качестве примера приведены осциллограммы и фазовые траектории, построенные согласно значениям параметра α_1 из этих областей (на рис. 3 отмеченные стрелками). Мы видим, что положительные значения показателя Ляпунова соответствуют хаотическим режимам, а отрицательные — регулярным режимам.

Рассмотрим спектр максимального показателя Ляпунова, построенный в зависимости от значений параметра c .

Пример 4. Значения параметров: $T = 100, a = 0.7, b = 0.8, z = -0.4, \alpha_1 = 0.7, \alpha_2 = 1, x_0 = 1, y_0 = -1$

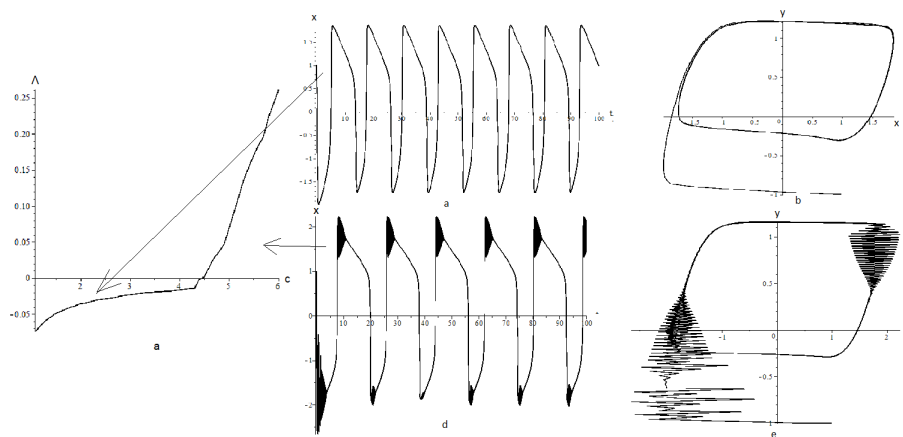


Фото 4. а) Спектр максимальных показателей Ляпунова от значений $c \in [1, 6]$ с шагом $h = 0.1$; б) осциллограмма при $c = 4$; в) фазовая траектория при $c = 4$; д) осциллограмма при $c = 7$; е) Фазовая траектория при $c = 7$.

Согласно, полученному спектру рис. 4а, мы видим, что значения параметра c из промежутка $[0, 4.4]$ соответствуют регулярные режимы, а в противном случае мы будем получать хаотические режимы.

Заметим, что границы спектров максимальных показателей Ляпунова можно уточнить, взяв более мелкий шаг дискретизации, но это приведет к большим вычислительным затратам.

Заключение

В работе с помощью спектров максимальных показателей Ляпунова, построенных в зависимости от значений управляющих параметров α_1 и c системы ЭФН (1) было показано, что для такой системы возможно существование как хаотических режимов, так и регулярных режимов. Более детальный анализ системы ЭФН, можно получить, построив атлас динамических режимов. Однако такая задача потребует значительных вычислительных ресурсов.

Другое продолжение работы может быть связано с обобщением модели (1) на случай переменных дробных порядков $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ по аналогии с работой [17].

Список литературы

- [1] Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S., “An active pulse transmission line simulating nerve axon”, *Proc. IRE.*, 1962, № 50, 2061–2070.
- [2] FitzHugh R., “Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane”, *Biophysical Journal*, 1961, № 1, 446-466.
- [3] Спиртус В.Б., “Возможности биофизических моделей типа ФитцХью-Нагумо в отображении двумерной миграции сейсмичности”, *Геофизический журнал*, **32**:1 (2010), 134-143. [Spirtus V. B., “Vozmozhnosti biofizicheskikh modelej tipa FitcKH’yu-Nagumo v otobrazhenii dvumernoj migracii sejsmichnosti”, *Geofizicheskij zhurnal*, **32**:1 (2010), 134-143].
- [4] Parovik R. I., “On a Credit Oscillatory System with the Inclusion of Stick-Slip”, *E3S Web of Conferences*, **11** (2016), 00018.
- [5] Вронский А.П., “Явление последействия в твердом теле”, *АН СССР. Прикладная математика и механика*, **5**:1 (1941), 31–56. [Vronskij A. P., “Javlenie posledejstvija v tverdom tele”, *AN SSSR. Prikladnaja matematika i mehanika*, **5**:1 (1941), 31–56].
- [6] Volterra V., “Sur les Equations Integro-Differentielleset Leurs Applications”, *Acta Mathematica*, **35**:1 (1912), 295-356.
- [7] Schroeder M., *Fractals, chaos, power laws: Minutes from an infinite paradise*, Freeman, 1992, 429 pp.
- [8] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006, 523 pp.
- [9] Lipko O. D., “Mathematical model of nerve impulse propagation with regard to heredity”, *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*, **16**:1 (2017), 52-60.
- [10] Липко О. Д., “Динамическая система ФитцХью-Нагумо”, *Актуальные проблемы прикладной математики и физики*, Материалы Международной научной конференции, ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, 2017, 126-127. [Lipko O. D., “Dinamicheskaya sistema FitcKH’yu-Nagumo”, *Aktual’nye problemy prikladnoj matematiki i fiziki*, Materialy Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, IPMA KBNC RAN, Nal’chik, 2017, 126-127].
- [11] Герасимов А. Н., “Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения”, *АН СССР. Прикладная математика и механика*, 1948, № 2, 529-539. [Gerasimov A. N., “Obobshchenie linejnyh zakonov deformacii i ih prilozhenie k zadacham vnutrennego treniya”, *AN SSSR. Prikladnaja matematika i mekhanika*, 1948, № 2, 529-539].
- [12] Caputo M., *Elasticit ‘ a e dissipazione.*, Zanichelli, Bologna, 1969, 150 с.
- [13] Липко О. Д., Паровик Р. И., “Исследование хаотических и регулярных режимов фрактального осциллятора ФитцХью-Нагумо”, *Актуальные проблемы прикладной математики*, Материалы IV Международной научной конференции, 2018, 157. [Lipko O. D., Parovik R. I., “Issledovanie haoticheskikh i reguljarnyh rezhimov fraktal’nogo oscillyatora FitcKH’yu-Nagumo”, *Aktual’nye problemy prikladnoj matematiki*, Materialy IV Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, 2018, 157].
- [14] Wolf A. et al., “Determining Lyapunov exponents from a time series”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1985, № 16(3), 285–317.
- [15] Паровик Р. И., *Математическое моделирование нелинейных эрдитарных осцилляторов*, КамГУ им. Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, 2017, 134 с. [Parovik R. I., *Matematicheskoe modelirovanie nelinejnyh ehreditarnyh oscillyatorov*, KamGU im. Vitusa Beringa, Petropavlovsk-Kamchatskij, 2017, 134 pp.]
- [16] Паровик Р.И., “Численный анализ задачи Коши для широкого класса фрактальных осцилляторов”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2018, № 1(21), 93-116. [Parovik R. I., “Chislennyj analiz zadachi Koshi dlya širokogo klassa fraktal’nyh oscillyatorov”, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*, 2018, № 1(21), 93-116].
- [17] Паровик Р. И., “Дробное исчисление в теории колебательных систем”, *Современные наукоемкие технологии*, 2017, № 1, 61-68. [Parovik R. I., “Drobnое ischislenie v teorii kolebatel’nyh sistem”, *Sovremennye naukoemkie tekhnologii*, 2017, № 1, 61-68].

Список литературы (ГОСТ)

- [1] Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proc. IRE. 1962. no. 50. pp. 2061–2070
- [2] FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophysical Journal. 1961. no. 1. pp. 446-466
- [3] Спиртус В.Б. Возможности биофизических моделей типа ФитцХью-Нагумо в отображении двумерной миграции сейсмичности // Геофизический журнал. 2010. Т. 32. no. 1. С. 134-143
- [4] Parovik R. I. On a Credit Oscillatory System with the Inclusion of Stick-Slip // E3S Web of Conferences. 2016. vol. 11. ID. 00018
- [5] Вронский А.П. Явление последействия в твердом теле // АН СССР. Прикладная математика и механика. 1941. Т. 5. №1. С. 31–56
- [6] Volterra V. Sur les Equations Integro-Differentielles et Leurs Applications // Acta Mathematica. 1912. vol. 35. no. 1. pp. 295-356
- [7] Schroeder M. Fractals, chaos, power laws: Minutes from an infinite paradise: Freeman, 1992. 429 p.
- [8] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier. 2006. 523 p.
- [9] Lipko O. D. Mathematical model of nerve impulse propagation with regard to heredity // Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2017. vol. 16. no. 1. pp. 52-60
- [10] Липко О. Д. Динамическая система ФитцХью-Нагумо // Актуальные проблемы прикладной математики и физики. Материалы Международной научной конференции. Нальчик: ИПМА КБНЦ РАН, 2017. С. 126-127
- [11] Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // АН СССР. Прикладная математика и механика. 1948. № 2. С. 529-539
- [12] Caputo M. Elasticit ' a e dissipazione. Bologna: Zanichelli. 1969. 150 p.
- [13] Липко О. Д., Паровик Р.И. Исследование хаотических и регулярных режимов фрактального осциллятора ФитцХью-Нагумо // Актуальные проблемы прикладной математики. Материалы IV Международной научной конференции. 2018. С. 157
- [14] Wolf A. et al. Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1985. vol. 16(3). pp. 285-317
- [15] Паровик Р. И. Математическое моделирование нелинейных эрдитарных осцилляторов. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2017. 134 с.
- [16] Паровик Р.И. Численный анализ задачи Коши для широкого класса фрактальных осцилляторов // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. №1(21). С. 93-116
- [17] Паровик Р.И. Дробное исчисление в теории колебательных систем // Современные наукоемкие технологии. 2017. №1. С. 61-68

Для цитирования: Липко О. Д. Исследование хаотических и регулярных режимов фрактального осциллятора ФитцХью-Нагумо // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 3(23). С. 116-123. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-116-123

For citation: Lipko O. D. Investigation of regular and chaotic modes of the FitzHugh-Nagumo fractal oscillator, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018, **23**: 3, 116-123. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-116-123

Поступила в редакцию / Original article submitted: 08.06.2018

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-116-123

MSC 34A08, 34K28, 37N30

INVESTIGATION OF REGULAR AND CHAOTIC MODES OF THE FITZHUGH-NAGUMO FRACTAL OSCILLATOR *

O. D. Lipko

Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky,
Pogranichnaya st., 4, Russia
E-mail: olgalipko95@mail.ru

In this paper we study the conditions for the existence of chaotic and regular oscillatory regimes of the hereditary oscillator FitzHugh-Nagumo (EFN), a mathematical model for the propagation of a nerve impulse in a membrane. To achieve this goal, using the non-local explicit finite-difference scheme and Wolf's algorithm with the Gram-Schmidt orthogonalization procedure, the Lyapunov maximum exponent spectra were constructed as a function of the values of the control parameters of the model of the EFN. The results of the calculations showed that there are spectra of maximum Lyapunov exponents both with positive values and with negative values. The results of the calculations were also confirmed with the help of oscillograms and phase trajectories, which indicates the possibility of the existence of both chaotic attractors and limit cycles.

Key words: limit cycle, FitzHugh-Nagumo oscillator with power memory, the spectrum of Lyapunov maximum exponents, oscillograms and phase trajectories.

© Lipko O. D., 2018

*This work was supported by the grant of the President of the Russian Federation No. MK-1152.2018.1 and on the topic of the research of Vitus Bering Kamchatka State University "Application of fractional calculus in the theory of oscillatory processes" No. AAAA-A17-117031050058-9.