

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-98-105

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
УДК 517.938

## **РАСЧЕТ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДУФФИНГА СО СТЕПЕННОЙ ПАМЯТЬЮ \***

**В. А. Ким<sup>1</sup>, Р. И. Паровик<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup> Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032  
Россия, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

<sup>2</sup> Институт космофизических исследований и распространения радиоволн  
ДВО РАН, 684034 Россия, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7  
E-mail: valentinekim@mail.ru, romanparovik@gmail.com

При исследовании нелинейных систем одной из важных задач является определение типа колебаний – периодического, квазипериодического, случайного, хаотического. Особенно сложно отличить квазипериодические колебания от хаотических и случайных, так как квазипериодические колебания часто имеют очень сложную форму, визуально слабо отличимую от «случайной». Особенностью хаотических колебаний является их высокая чувствительность к малым изменениям начальных условий. Поэтому одним из наиболее надежных способов детектирования хаоса является определение скорости разбегания траекторий, которая оценивается с помощью спектра показателей Ляпунова. В работе с помощью построения спектра максимальных показателей Ляпунова в зависимости от значений управляющих параметров были найдены хаотические режимы фрактального осциллятора Дуффинга с переменной степенной памятью, построены и исследованы его фазовые траектории.

*Ключевые слова: спектр максимальных показателей Ляпунова, фрактальный осциллятор Дуффинга, фазовые траектории, предельный цикл, хаотический аттрактор.*

© Ким В. А., Паровик Р. И., 2018

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ № МК-1152.2018.1 и по теме НИР КамГУ имени Витуса Беринга «Применение дробного исчисления в теории колебательных процессов» №АААА-А17-117031050058-9.

## Введение

Исследование нелинейных колебательных систем является актуальной задачей так как такие системы могут обладать хаотическими колебательными режимами [1]-[3]. Такими колебательными режимами обладает известный осциллятор Дуффинга [4]. Этот осциллятор Дуффинга обладает кубической нелинейностью, что приводит к не изохронности колебаний, т.е. зависимости амплитуды от частоты. Внешнее периодическое воздействие на осциллятор Дуффинга так же приводит к бистабильным колебательным режимам.

Однако, если рассматривать осциллятор Дуффинга в рамках дробной динамики, то мы приходим к его обобщению. Такое обобщение связано с дробным исчислением [5], что приводит к появлению дополнительных степеней свободы, которые характеризуют эффект степенной памяти — нелокальности по времени. Это свойство присуще фрактальным объектам, поэтому такие осцилляторы называют фрактальными или эрдитарными [6]-[14]. В настоящей работе исследуется фрактальный осциллятор Дуффинга с целью определения хаотических режимов с помощью спектра максимальных показателей Ляпунова.

## Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\ddot{x}(t) + \alpha D_{0t}^{q(t)} x(\tau) - x(t) + x^3(t) = \delta \cos(\omega t), \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0, \quad (1)$$

где  $x(t) \in C^2[0, T]$  – функция смещения,  $\alpha > 0$  – коэффициент трения,  $\delta > 0, \omega > 0$  – амплитуда и частота внешнего воздействия,  $x_0, y_0$  – заданные начальные условия,  $D_{0t}^{q(t)} x(\tau)$  – производная дробного переменного порядка Римана-Лиувилля:

$$D_{0t}^{q(t)} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{q(t)}}, \quad 0 < q(t) < 1,$$

$\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция Эйлера.

Задача Коши (1) представляет собой фрактальный осциллятор Дуффинга со степенной переменной памятью в диссипативном члене, который был рассмотрен в работах автора [7], [8]. Случай, когда  $q(t)$  от времени не зависит был рассмотрен в работе [15]. Задачу Коши можно представить в виде системы:

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha_1} x(t) = y(t), \alpha_1 = 1, \\ D_{0t}^{\alpha_2} y(t) = z(t), \alpha_2 = q(t), \\ D_{0t}^{\alpha_3} z(t) = x(t) - x^3(t) + \delta \cos(\omega t) - \lambda z(t), \alpha_3 = 1, \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0. \end{cases} \quad (2)$$

Заметим, что система (2) является диссипативной, т.е. фазовый объем  $\Delta V = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = -\alpha$ , где  $f_1, f_2, f_3$  – правые части системы (2). Поэтому эта система обладает аттрактором.

Систему (2) можно решить с помощью численных методов. Для этого, используя дискретный аналог производной Римана-Лиувилля, производную Грюнвальда-Летникова [16], мы переходим к дискретному аналогу системы.

$$\begin{cases} x_k = \tau y_{k-1} + x_{k-1}, \\ z_k = \tau^{q_k} \sum_{i=1}^{k-1} w_i z_{k-i}, \\ z_k = z_{k-1} + \tau (x_{k-1} - x_{k-1}^3 + \delta \cos(\omega \tau (k-1)) - \lambda z_{k-1}), \end{cases} \quad (3)$$

где  $w_i = \left(1 - \frac{1+q_k}{i}\right) w_{i-1}$ ,  $w_0 = 1$  – весовые коэффициенты;  $k = 1, \dots, N-1$ ,  $N$  – количество узлов расчетной сетки,  $\tau = T/N$  – шаг сетки. Система (3) является ключевой для алгоритма построения максимальных показателей Ляпунова.

### Алгоритм расчета максимальных показателей Ляпунова

Существуют различные методы расчета максимальных показателей Ляпунова и все они завязаны на оценке расстояния между двумя фазовыми траекториями, построенных при разных значениях начальных условий. В случае, когда расстояние между траекториями уменьшается, то мы получаем аттрактор либо в виде устойчивого предельного цикла или предельной точки. В случае, когда фазовые траектории разбегаются, то мы приходим к хаотическому режимам, в частности, к хаотическому аттрактору. Если не известен вид уравнений в исходной системе (2), то используют алгоритм Бенеттина [17], если известна система и методы ее решения, то используют алгоритм Вольфа [18]. В обоих случаях необходимо проводить процедуру ортогонализации Грама-Шмидта, чтобы избежать влияния составляющей максимального показателя Ляпунова при вычислении соответствующих векторов вдоль фазовых траекторий.

Мы остановимся на алгоритме Вольфа. Для работы алгоритма необходимо составить из системы (2) систему из 9 уравнений в вариациях:

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha_1} \Delta x_1(t) = \Delta y_1(t), \\ D_{0t}^{\alpha_2} \Delta y_1(t) = \Delta z_1(t), \\ D_{0t}^{\alpha_3} \Delta y_1(t) = \Delta x_1(1 - 3x^2(t)) - \lambda \Delta z_1(t), \\ D_{0t}^{\alpha_1} \Delta x_2(t) = \Delta y_2(t), \\ D_{0t}^{\alpha_2} \Delta y_2(t) = \Delta z_2(t), \\ D_{0t}^{\alpha_3} \Delta y_2(t) = \Delta x_2(1 - 3x^2(t)) - \lambda \Delta z_2(t), \\ D_{0t}^{\alpha_1} \Delta x_3(t) = \Delta y_3(t), \\ D_{0t}^{\alpha_2} \Delta y_3(t) = \Delta z_3(t), \\ D_{0t}^{\alpha_3} \Delta y_3(t) = \Delta x_3(1 - 3x^2(t)) - \lambda \Delta z_3(t), \\ \Delta x_1(0) = 1, \Delta y_1(0) = 0, \Delta z_1 = 0, \\ \Delta x_2(0) = 0, \Delta y_2(0) = 1, \Delta z_2(0) = 0, \\ \Delta x_3(0) = 0, \Delta y_3(0) = 0, \Delta z_3(0) = 1. \end{cases} \quad (4)$$

где правые части представляют собой Якобиан системы (2). Система (4) совместно со системой (2) решается с помощью численных методов. После вычислений формируются три вектора, которые подвергаются процедуре Грама-Шмидта, потом проводится их нормализация и вычисляются сами показатели Ляпунова. Количество таких показателей совпадает с количеством уравнений в системе (2). Причем если

сумма показателей Ляпунова отрицательная, то исходная система имеет аттрактор, а если хотя бы один из них является положительным, то мы имеем дело с хаотическим аттрактором. Поэтому для исходной системы (2) мы имеем три показателя Ляпунова.

Заметим, что эти три показателя не могут быть равными нулю в силу того, что исходная система (2) является неавтономной.

Расчеты показали, что два показателя Ляпунова отрицательны, а третий показатель может менять свой знак. Поэтому при расчете спектра показателей Ляпунова мы будем ориентироваться на третий показатель Ляпунова.

## Результаты исследования

Рассмотрим пример, когда параметры задачи имеют следующие значения:  $t \in [0, 100]$ ,  $\delta = 0.3$ ,  $\omega = 1$ ,  $x_0 = 0.2$ ,  $y_0 = 0.3$ ,  $N = 2000$ ,  $h = 0.05$ , а функция  $q(t)$ :  $q(t) = q_0 - \frac{1}{\exp(\cos(\omega t))}$ . Результаты работы алгоритма Вольфа приведены на следующем рисунке.

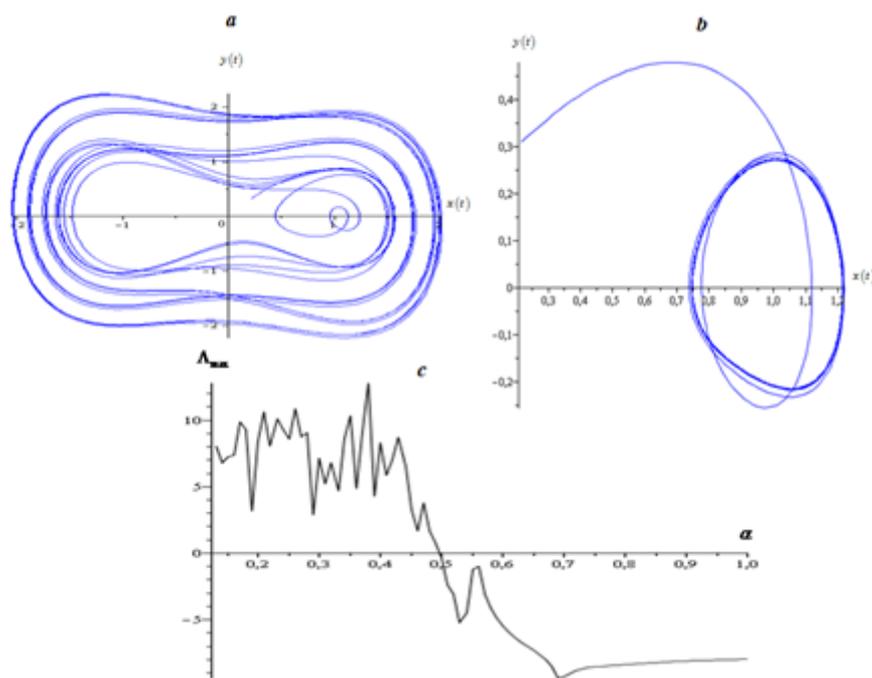


Рисунок. Хаотический аттрактор (a) при  $\alpha = 0.15$ ; предельный цикл (b) при  $\alpha = 0.64$ , построенные согласно спектру показателя Ляпунова (c)

Из рисунка видно, что на спектре показателя Ляпунова существуют положительные и отрицательные области. Положительные соответствуют хаотическому режиму, мы это видим на фазовой траектории (a), отрицательные области соответствуют регулярному режиму – предельному циклу (b).

## Заключение

В работе был исследован фрактальный осциллятор Дуффинга с переменной степенной памятью с целью идентификации хаотических режимов. Установлено, что в диапазоне изменения значений параметра  $\alpha \in [0, 0.5]$  наблюдается хаотический

режим, в диапазоне  $\alpha \in [0.5, 1]$  – регулярный режим или предельный цикл. Фактически спектр максимального показателя Ляпунова является бифуркационной диаграммой, в частности, для нашего примера имеет место бифуркация хаотический аттрактор-предельный цикл. Одной из продолжений этой работы является исследование точек покоя фрактального осциллятора Дуффинга (2) по аналогии с работой [19].

Работа выполнена по теме НИР «Применение дробного исчисления в теории колебательных процессов» №АААА-А17-117031050058-9 при финансовой поддержке гранта президента РФ №МК-1152.2018.1.

## Список литературы

- [1] Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., *Лекции по нелинейной динамике*, Регулярная и хаотическая динамика, Ижевск, 2011, 516 с. [Anishchenko V. S., Vadivasova T. E., *Lekcii po nelinejnoj dinamike*, Reguljarnaya i haoticheskaya dinamika, Izhevsk, 2011, 516 pp.]
- [2] Tavazoei M. S., Haeri M., “Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **237**:20 (2008), 2628–2637.
- [3] Верисокин А. Ю., “Определение показателей Ляпунова на примере модели Селькова в присутствии внешней периодической силы”, *Ученые записки. Электронный научный журнал Курского государственного университета*, 2013, № 2(26), 18-29. [Verisokin A. YU., “Opredelenie pokazatelej Lyapunova na primere modeli Sel’kova v prisutstvii vneshej periodicheskoj sily”, *Uchenye zapiski. EHlektronnyj nauchnyj zhurnal Kurskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2013, № 2(26), 18-29].
- [4] Duffing G., “Elastizität und Reibung beim Riemmentrieb”, *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A*, **2**:3 (1931), 99–104.
- [5] Паровик Р. И., “Дробное исчисление в теории колебательных систем”, *Современные наукоемкие технологии*, 2017, № 1, 61-68. [Parovik R. I., “Drobnое ischislenie v teorii kolebatel’nyh sistem”, *Sovremennye naukoemkie tekhnologii*, 2017, № 1, 61-68].
- [6] Drobysheva I. V., “Mathematical modeling of nonlinear hereditary oscillators on the example of Duffing oscillator with fractional derivatives in the sense of Riemann-Liouville”, *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*, **13**:2 (2016), 39-45.
- [7] Kim V. A., “Duffing oscillator with external harmonic action and variable fractional Riemann-Liouville derivative characterizing viscous friction”, *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*, **13**:2 (2016), 46-49.
- [8] Ким В. А., Паровик Р. И., “Математическая модель нелинейного осциллятора Дуффинга с памятью”, *Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения*, Материалы Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых, 2017, 253-254. [Kim V. A., Parovik R. I., “Matematicheskaya model’ nelinejnogo oscillyatora Duffinga s pamjat’yu”, *Aktual’nye problemy differencial’nyh uravnenij i ih prilozheniya*, Materialy Respublikanskoj nauchnoj konferencii s uchastiem zarubezhnyh uchenyh, 2017, 253-254].
- [9] Ким В. А., Паровик Р. И., “Хаотические режимы осциллятора Дуффинга с производной переменного дробного порядка Римана-Лиувилля”, *Актуальные проблемы прикладной математики*, Материалы IV Международной научной конференции, 2018, 121. [Kim V. A., Parovik R. I., “Haoticheskie rezhimy oscillyatora Duffinga s proizvodnoj peremennogo drobnogo porjadka Rimana-Liuvillya”, *Aktual’nye problemy prikladnoj matematiki*, Materialy IV Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, 2018, 121].
- [10] Ким В. А., Паровик Р. И., “Хаотические и регулярные режимы осциллятора Дуффинга с памятью”, *Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий*, Материалы Международной научно-практической конференции, 2018, 24-27. [Kim V. A., Parovik R. I., “Haoticheskie i reguljarnye rezhimy oscillyatora Duffinga s pamjat’yu”, *Aktual’nye zadachi matematicheskogo modelirovaniya i informacionnyh tekhnologij*, Materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii, 2018, 24-27].
- [11] Мейланов Р. П., Янполов М. С., “Особенности фазовой траектории фрактального осциллятора”, *Письма в ЖТФ*, **28**:1 (2002), 67-73. [Mejlanov R. P., Yanpolov M. S.,

- “Osobennosti fazovoj traektorii fraktal'nogo oscillyatora”, *Pis'ma v ZHTF*, **28**:1 (2002), 67-73].
- [12] Паровик Р.И., “Задача Коши для нелокального уравнения Матье”, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **13**:2 (2011), 90-98. [Parovik R.I., “Zadacha Koshi dlya nelokal'nogo uravneniya Mat'e”, *Doklady Adygskoj (CHerkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk*, **13**:2 (2011), 90-98].
- [13] Паровик Р.И., “Математическое моделирование эредитарного осциллятора”, *Компьютерные исследования и моделирование*, **7**:5 (2015), 1001-1021. [Parovik R.I., “Matematicheskoe modelirovanie ehreditarnogo oscillyatora”, *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie*, **7**:5 (2015), 1001-1021].
- [14] Паровик Р.И., *Математическое моделирование нелинейных эредитарных осцилляторов*, КамГУ им. Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, 2017, 135 с. [Parovik R.I., *Matematicheskoe modelirovanie nelinejnyh ehreditarnyh oscillyatorov*, KamGU im. Vitusa Beringa, Petropavlovsk-Kamchatskij, 2017, 135 pp.]
- [15] Syta A., Litak G., Lenci S., Scheffler M., “Chaotic vibrations of the Duffing system with fractional damping”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **24**:1 (2014), 013107..
- [16] Петухов А.А., Ревизников Д.Л., “Алгоритмы численных решений дробно-дифференциальных уравнений”, *Вестник МАИ*, **16**:6 (2009), 228–243. [Petuhov A. A., Reviznikov D. L., “Algoritmy chislennyh reshenij drobno-differencial'nyh uravnenij”, *Vestnik MAI*, **16**:6 (2009), 228–243].
- [17] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M., “Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them, P. I: Theory. P. II: Numerical application”, *Meccanica*, **15** (1980), 9-30.
- [18] Wolf A. et al., “Determining Lyapunov exponents from a time series”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **16**:3 (1985), 285-317.
- [19] Паровик Р.И., “Об исследовании устойчивости эредитарного осциллятора Ван-дер-Поля”, *Фундаментальные исследования*, 2016, № 3-2, 283-287. [Parovik R.I., “Ob issledovanii ustojchivosti ehreditarnogo oscillyatora Van-der-Polya”, *Fundamental'nye issledovaniya*, 2016, № 3-2, 283-287].

## Список литературы (ГОСТ)

- [1] Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е. Лекции по нелинейной динамике. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2011. 516 с.
- [2] Tavazoei M. S., Haeri M. Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2008. Vol. 237, no. 20. P. 2628–2637.
- [3] Верисокин А.Ю. Определение показателей Ляпунова на примере модели Селькова в присутствии внешней периодической силы // *Ученые записки. Электронный научный журнал Курского государственного университета*. 2013. № 2 (26). С. 18-29.
- [4] Duffing G. Elastizität und Reibung beim Riemmentrieb // *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A*. 1931. Vol. 2, no. 3. P. 99–104.
- [5] Паровик Р.И. Дробное исчисление в теории колебательных систем // *Современные наукоемкие технологии*. 2017. № 1. С. 61-68.
- [6] Drobysheva I.V. Mathematical modeling of nonlinear hereditary oscillators on the example of Duffing oscillator with fractional derivatives in the sense of Riemann-Liouville // *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*. 2016. T. 13. № 2. С. 39-45.
- [7] Kim V.A. Duffing oscillator with external harmonic action and variable fractional Riemann-Liouville derivative characterizing viscous friction // *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*. 2016. T. 13. № 2. С. 46-49.
- [8] Ким В.А., Паровик Р.И. Математическая модель нелинейного осциллятора Дуффинга с памятью. Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения. Материалы Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых. 2017. С. 253-254.

- [9] Ким В.А., Паровик Р.И. Хаотические режимы осциллятора Дуффинга с производной переменного дробного порядка Римана-Лиувилля. Актуальные проблемы прикладной математики Материалы IV Международной научной конференции. 2018. С. 121.
- [10] Ким В.А., Паровик Р.И. Хаотические и регулярные режимы осциллятора Дуффинга с памятью. Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий Материалы Международной научно-практической конференции. 2018. С. 24-27.
- [11] Мейланов Р. П., Янполов М. С. Особенности фазовой траектории фрактального осциллятора // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28, № 1. С. 67-73.
- [12] Паровик Р.И. Задача Коши для нелокального уравнения Матье // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2011. Т. 13. № 2. С. 90-98.
- [13] Паровик Р.И. Математическое моделирование эрдитарного осциллятора // Компьютерные исследования и моделирование. 2015. Т. 7. № 5. С. 1001-1021.
- [14] Паровик Р.И. Математическое моделирование нелинейных эрдитарных осцилляторов. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2017. 135 с
- [15] Syta A., Litak G., Lenci S., Scheffler M. Chaotic vibrations of the Duffing system with fractional damping//Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2014. Т. 24. №1. 013107.
- [16] Петухов А. А., Ревизников Д. Л. Алгоритмы численных решений дробно-дифференциальных уравнений//Вестник МАИ. 2009. Т. 16. №6. С. 228–243.
- [17] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M., Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them, P. I: Theory. P. II: Numerical application // Meccanica. 1980. V. 15. p. 9-30.
- [18] Wolf A. et al. Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1985. vol. 16. no. 3. pp. 285-317.
- [19] Паровик Р.И. Об исследовании устойчивости эрдитарного осциллятора Ван-дер-Поля // Фундаментальные исследования. 2016. № 3-2. С. 283-287.

**Для цитирования:** Ким В. А., Паровик Р. И. Расчет максимальных показателей Ляпунова для колебательной системы Дуффинга со степенной памятью // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 3(23). С. 98-105. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-98-105

**For citation:** Kim V. A., Parovik R. I. Calculation the maximum Lyapunov exponent for the oscillatory system of Duffing with a degree memory, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018, **23**: 3, 98-105. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-98-105

Поступила в редакцию / Original article submitted: 10.06.2018

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-98-105

MATHEMATICAL MODELING OF DYNAMIC SYSTEMS

MSC 34A08, 34K28, 37N30

## **CALCULATION THE MAXIMUM LYAPUNOV EXPONENT FOR THE OSCILLATORY SYSTEM OF DUFFING WITH A DEGREE MEMORY \***

**V. A. Kim<sup>1</sup>, R. I. Parovik<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup> Vitus Bering Kamchatka State University, 683032, Kamchatskiy kray, 4, Pogranichnaya Str., Russia

Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia

<sup>2</sup> Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, 684034, Kamchatskiy kray, 7, Mirnaya Str., Paratunka, Russia

E-mail: valentinekim@mail.ru, romanparovik@gmail.com

In the study of nonlinear systems, one of the important problems is the determination of the type of oscillations-periodic, quasi-periodic, random, chaotic. It is especially difficult to distinguish between quasi-periodic oscillations from chaotic and random oscillations, since quasi-periodic oscillations often have a very complex shape, visually weakly distinguishable from «random». A feature of chaotic oscillations is their high sensitivity to small changes in the initial conditions. Therefore, one of the most reliable ways of detecting chaos is to determine the rate of run-off of trajectories, which is estimated using the Lyapunov exponent spectrum. Using the construction of the spectrum of Max Lyapunov exponents, depending on the values of the control parameters, chaotic regimes of the Duffing fractal oscillator with variable power memory were found, and its phase trajectories.

*Key words: spectrum of maximum Lyapunov exponents, Duffing fractal oscillator, phase trajectories, limit cycle, chaotic attractor.*

© Kim V. A., Parovik R. I., 2018

---

\*This work was supported by the grant of the President of the Russian Federation No. MK-1152.2018.1 and on the topic of the research of Vitus Bering Kamchatka State University "Application of fractional calculus in the theory of oscillatory processes" No. AAAA-A17-117031050058-9.