Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 3(23). C. 91-97. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-91-97

УДК 517.91

ЗАДАЧА ДАРБУ ДЛЯ ДРОБНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ*

Р. А. Пшибихова

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, г.Нальчик, ул. Шортанова,89А

E-mail: Pshibihova@mail.ru

В данной работе доказана теорема существования и единственности решения задачи Дарбу для обобщенного телеграфного уравнения дробного порядка с производными Римана-Лиувилля.

Ключевые слова: задача Дарбу, дробное телеграфное уравнение, дробная производная, оператор Римана-Лиувилля

MSC 35R11

DARBOUX PROBLEM FOR FRACTIONAL TELEGRAPH EQUATION

R. A. Pshibikhova

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89A, Russia

E-mail: Pshibihova@mail.ru

In this paper we prove a theorem of existence and uniqueness of solutions of the Darboux problem for the generalized telegraph equation of fractional order with Riemann-Liouville derivatives.

Key words: Darboux problem, fractional telegraph equation, fractional derivative, Riemann-Liouville operator.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00462-а)

Введение

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\alpha} D_{0y}^{\beta} u(x,y) + \lambda u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где α, $\beta \in (0,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, D_{0s}^{γ} — оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля порядка γ с началом в точке 0 по переменной s, определенный следующим образом [1, с. 9]:

$$D_{0s}^{\gamma} f(s) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\gamma)} \int\limits_0^s \frac{f(v)}{(s-v)^{\gamma+1}} dv, & \gamma < 0, \\ f(s), & \gamma = 0, \\ \frac{d^n}{ds^n} D_{0s}^{\gamma-n} f(s), & n-1 < \gamma \le n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2}$$

Смешанную производную дробного порядка $D_{0x}^{\alpha} D_{0y}^{\beta} u(x,y)$ будем понимать как смешанную производную $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ композиции $D_{0x}^{\alpha-1} D_{0y}^{\beta-1} u(x,y)$ [2, с. 342]:

$$D_{0x}^{\alpha} D_{0y}^{\beta} u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} D_{0x}^{\alpha-1} D_{0y}^{\beta-1} u(x,y).$$

Ранее, в работе [3] доказана теорема существования и единственности решения аналога задачи Гурса для уравнения вида (1) с производными Римана-Лиувилля. Укажем работу [4], в которой исследовались краевые задачи для уравнения со смешанными частными производными дробного порядка. Более полный обзор работ, посвященных исследованию уравнений в частных производных дробного порядка можно найти, например, в [5] и [6].

В данной работе доказана теорема существования и единственности решения задачи Дарбу для уравнения (1).

Постановка задачи

Регулярным решением уравнения (1) в области

$$D = \{(x,y) : 0 < x < 1, \ 0 < y < 1-x\}$$

будем называть функцию $u(x,y)$ такую, что $x^{1-\mu} y^{1-\delta} u(x,y) \in C(\overline{D})$, для некоторых $\mu > 0$ и $\delta > 0$; $D_{0x}^{\alpha-1} u(x,y)$ и $D_{0y}^{\beta-1} u(x,y)$ непрерывны в области D вплоть до участков границы $x = 0$ и $y = 0$, соответственно; $D_{0x}^{\alpha-1} D_{0y}^{\beta-1} u(x,y)$ имеет непрерывные производные в области D по x и y, а также непрерывную смешанную производную $\partial^2 / \partial x \partial y$; $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) во всех точках $(x,y) \in D$.

Задача. *Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{x \to 0} D_{0x}^{\alpha-1} u(x,y) = \varphi(y), \quad 0 < y < 1, \tag{3}$$

$$u(x, 1-x) = \tau(x), \quad 0 < x < 1, \tag{4}$$

где $\varphi(y)$, $\tau(x)$ — заданные непрерывные функции.

Редукция к интегральному уравнению

Примем обозначение

$$W_{\mu,\delta}(x,y) = x^{\mu-1}y^{\delta-1}e^{\mu,\delta}_{\alpha,-\beta}(-\lambda x^{\alpha}y^{\beta}), \tag{5}$$

где

$$e^{\mu,\nu}_{\gamma,\delta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\gamma n+\mu)\Gamma(\nu-\delta n)} \tag{6}$$

— функция типа Райта [5, с. 23]. Заметим, что функцию $e^{\mu,\nu}_{\gamma,\delta}(z)$ можно выразить в виде

$$e^{\mu,\nu}_{\gamma,\delta}(z) = E_{(\gamma,-\delta),(\mu,\nu)}(z),$$

где

$$E_{(\rho_i),(\mu_i)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\mu_1+n\rho_1)\ldots\Gamma(\mu_m+n\rho_m)} \quad \left(m\geq 1, \quad \sum_{i=1}^{m}\rho_i>0\right)$$

— многопараметрическая функция Миттаг-Леффлера (см., например, [7]).

В работе [3] получено представление решения задачи Гурса

$$\lim_{x\to 0}D^{\alpha-1}_{0x}u(x,y) = \varphi(y), \qquad \lim_{y\to 0}D^{\beta-1}_{0y}u(x,y) = \psi(x),$$

для уравнения (1) в виде

$$u(x,y) = \int_0^x\int_0^y f(s,t)W_{\alpha,\beta}(x-s,y-t)dtds+ \tag{7}$$

$$+\int_0^x \psi(s)D^{\alpha}_{xs}W_{\alpha,\beta}(x-s,y)ds + \int_0^y \varphi(t)D^{\beta}_{yt}W_{\alpha,\beta}(x,y-t)dt+$$

$$+\psi(x)\frac{y^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}+\varphi(y)\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\varphi_0W_{\alpha,\beta}(x,y),$$

где

$$\varphi_0 = \lim_{y\to 0}D^{\beta-1}_{0y}\varphi(y).$$

Преобразуем равенство (7) с помощью формул

$$D^{\alpha}_{0x}W_{\alpha,\beta}(x,y) = W_{0,\beta}(x,y); \quad D^{\beta}_{0y}W_{\alpha,\beta}(x,y) = W_{\alpha,0}(x,y),$$

которые следуют из формулы дробного дифференцирования (интегрирования) степенных функций (см., например, [5, с. 15])

$$D^{\mu}_{0z}\frac{z^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} = \frac{z^{\delta-\mu-1}}{\Gamma(\delta-\mu)}.$$

Далее, используя формулу трансформации [5, с.24]:

$$W_{\mu,\delta}(x,y) = -\lambda W_{\mu+\alpha,\delta+\beta}(x,y)+\frac{x^{\mu-1}y^{\delta-1}}{\Gamma(\mu)\Gamma(\delta)}$$

получаем, что

$$W_{0,\beta}(x,y) = -\lambda W_{\alpha,2\beta}(x,y); \tag{8}$$

$$W_{\alpha,0}(x,y) = -\lambda W_{2\alpha,\beta}(x,y). \tag{9}$$

Таким образом, равенство (7) запишется в виде

$$u(x,y) = \int_0^x \int_0^y f(s,t) W_{\alpha,\beta}(x-s,y-t)dtds-$$

$$-\lambda \int_0^x \psi(s) W_{\alpha,2\beta}(x-s,y)ds - \lambda \int_0^y \varphi(t) W_{2\alpha,\beta}(x,y-t)dt+$$

$$+\psi(x)\frac{y^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} + \varphi(y)\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \varphi_0 W_{\alpha,\beta}(x,y).$$

Теперь удовлетворим условию (4) функцию $u(x,y)$ для нахождения $\psi(x)$

$$u(x,1-x) = \int_0^x \int_0^{1-x} f(s,t) W_{\alpha,\beta}(x-s,1-x-t)dtds-$$

$$-\lambda \int_0^x \psi(s) W_{\alpha,2\beta}(x-s,1-x)ds - \lambda \int_0^{1-x} \varphi(t) W_{2\alpha,\beta}(x,1-x-t)dt+$$

$$+\psi(x)\frac{(1-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} + \varphi(1-x)\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \varphi_0 W_{\alpha,\beta}(x,1-x) = \tau(x).$$

Получаем относительно $\psi(x)$ следующее уравнение

$$\psi(x)\frac{(1-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} - \lambda \int_0^x \psi(s) W_{\alpha,2\beta}(x-s,1-x)ds = \tau(x)-$$

$$-\int_0^x \int_0^{1-x} f(s,t) W_{\alpha,\beta}(x-s,1-x-t)dtds+$$

$$+\lambda \int_0^{1-x} \varphi(t) W_{2\alpha,\beta}(x,1-x-t)dt - \varphi(1-x)\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \varphi_0 W_{\alpha,\beta}(x,1-x),$$

которое после простых преобразований можно записать в виде

$$\psi(x) - \int_0^x K(x,s)\psi(s)ds = F(x), \tag{10}$$

где

$$K(x,s) = \lambda \Gamma(\beta)(1-x)^{1-\beta} W_{\alpha,2\beta}(x-s,1-x)$$

$$F(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{(1-x)^{\beta-1}}\Big[\tau(x)+\lambda\int\limits_0^{1-x}\varphi(t)W_{2\alpha,\beta}(x,1-x-t)dt-$$

$$-\int\limits_0^x\int\limits_0^{1-x}f(s,t)W_{\alpha,\beta}(x-s,1-x-t)dtds-\varphi(1-x)\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\varphi_0W_{\alpha,\beta}(x,1-x)\Big].$$

Таким образом, вопрос о разрешимости задачи (1), (3) и (4) сводится к решению уравнения (10), которое представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода с ядром $K(x,s)$, имеющим слабую особенность. Определив функцию $\psi(x)$, решение искомой задачи может быть найдено как решение задачи Гурса и представлено формулой (7).

Основные результаты

Сформулируем теорему существования и единственности решения задачи (1), (3) и (4).

Теорема. *Пусть*

$$x^{1-\alpha}y^{1-\beta}f(x,y)\in\ C(\overline{D}),\tag{11}$$

$$y^{1-\beta}\varphi(y)\in C[0,\,1]\cap C^1(0,\,1),\tag{12}$$

$$x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}\tau(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1),\tag{13}$$

и выполнено условие согласования

$$\varphi(1)=\lim_{x\to0}D_{0x}^{\alpha-1}\tau(x).\tag{14}$$

Тогда в области D существует и притом единственное регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (3) и (4).

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ — регулярное решение исследуемой задачи. Тогда для него выполнено соотношение (7), и как показано выше, след дробного интеграла от него на линии $y=0$, то есть функция $\psi(x)$, удовлетворяет интегральному уравнению (10), которое при сделанных предположениях не может иметь более одного решения. Отсюда, с учетом результатов работы [3], следует, в частности, единственность решения задачи (1), (3) и (4).

Для доказательства существования искомого решения достаточно показать, что найденная функция $\psi(x)$ (вместе с заданными $\varphi(y)$ и $f(x,y)$) удовлетворяет условиям разрешимости задачи Гурса для рассматриваемого уравнения, сформулированные в работе [3]. Для этого необходимо показать, что

$$\lim_{y\to0}y^{1-\delta}\varphi(y)<\infty,\qquad D_{0y}^{\beta-1}\varphi(y)\in C[0,\,1]\cap C^1(0,\,1),\tag{15}$$

$$\lim_{x\to0}x^{1-\mu}\psi(x)<\infty,\qquad D_{0x}^{\alpha-1}\psi(x)\in C[0,\,1]\cap C^1(0,\,1),\tag{16}$$

и

$$\lim_{x\to0}D_{0x}^{\alpha-1}\psi(x)=\lim_{y\to0}D_{0y}^{\beta-1}\varphi(y).\tag{17}$$

Прежде всего отметим, что условия, наложенные на функцию $\varphi(y)$ в условии теоремы, обеспечивают выполнение (15).

Далее, из (12), (14) и оценки

$$\left|W_{\xi,\eta}(x,y)\right| \le const \cdot x^{\xi-1}y^{\eta-1}$$

следует, что для правой части уравнения (10) справедливы соотношения

$$|F(x)| \le const \cdot x^{\alpha-1}, \qquad F(x) \in C^1(0,1),$$

и

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}F(x) = \Gamma(\beta)\left[\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}\tau(x) - \varphi(1) + \frac{\varphi_0}{\Gamma(\beta)}\right].$$

Отсюда, с учетом (14) и соотношений

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}F(x) = \lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}\psi(x), \qquad |K(x,s)| \le const \cdot (x-s)^{\alpha-1}(1-x)^{\beta},$$

следует справедливость (16) и (17). Это завершает доказательство теоремы. □

Список литературы

[1] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003. [Nahushev A. M., *Drobnoe ischilenie i ego primenenie*, Fizmatlit, M., 2003].

[2] Самко С. Г., Килбас А.А., Маричев О. И., *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987, 688 с. [Samko S. G., Kilbas A.A., Marichev O. I., *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ih prilozheniya*, Nauka i tekhnika, Minsk, 1987, 688 pp.]

[3] Пшибихова Р. А., “Аналог задачи Гурса для обобщенного телеграфного уравнения дробного порядка”, *Дифференц. уравнения*, 2014, № 50(6), 839-843. [Pshibikhova R. A., “Analog zadachi Gursa dlya obobshchennogo telegrafnogo uravneniya drobnogo poryadka”, *Differenc. uravneniya*, 2014, № 50(6), 839-843].

[4] Еремин А. С., “Три задачи для одного уравнения в частных дробных производных”, *Дифференциальные уравнения и краевые задачи*, Труды Всероссийской научной конференции, **3**, 2004, 94–98. [Eremin A. S., “Tri zadachi dlya odnogo uravneniya v chastnyh drobnyh proizvodnyh”, *Differencial’nye uravneniya i kraevye zadachi*, Trudy Vserossijskoj nauchnoj konferencii, **3**, 2004, 94–98].

[5] Псху А. В., *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005, 199 с. [Pskhu A. V., *Uravneniya v chastnyh proizvodnyh drobnogo poryadka*, Nauka, M., 2005, 199 pp.]

[6] Kilbas A. A., Srivastava H.M., Trijillo J.J., *Theory and application of fractional differential equations*, Math. Stud.Elsevier, North-Holland Amsterdam, 2006, 323 pp.

[7] Kiryakova V. S., “The Multi-Index Mittag-Leffler Functions as Generators of Fractional Calculus Operators and Laplace Transforms.”, *Internetional Conference on Mathemetics and Its Aplications*, Extended Abstracts, Kuwait Univ., 2004, 169–175.

Список литературы (ГОСТ)

[1] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003

[2] Самко С. Г., Килбас А.А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

[3] Пшибихова Р. А. Аналог задачи Гурса для обобщенного телеграфного уравнения дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2014. №50(6). С. 839-843.

[4] Еремин А. С. Три задачи для одного уравнения в частных дробных производных // Дифференциальные уравнения и краевые задачи: Труды Всероссийской научной конференции. Т. 3. 2004. С. 94-98.

[5] Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

[6] Kilbas A. A., Srivastava H.M., Trijillo J.J. Theory and application of fractional differential equations. North-Holland Amsterdam: Elsevier, 2006. 323 p.

[7] Kiryakova V. S. The Multi-Index Mittag-Leffler Functions as Generators of Fractional Calculus Operators and Laplace Transforms // Internetional Conference on Mathemetics and Its Aplications: Extended Abstracts, Kuwait Univ. 2004. pp. 169–175.

Для цитирования: Пшибихова Р. А. Задача Дарбу для дробного телеграфного уравнения // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2018. № 3(23). C. 91-97. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-91-97

For citation: Pshibikhova R. A. Darboux problem for fractional telegraph equation, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2018, **23**: 3, 91-97. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-91-97

Поступила в редакцию / Original article submitted: 08.06.2018