Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 3(23). С. 83-90. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-83-90

УДК 517.95

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

О. Х. Масаева

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Кабардино-Балкарская республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а

E-mail: olesya.masaeva@yandex.ru

Доказано существование и единственность решения задачи Неймана для обобщенного уравнения Лапласа с дробной производной в верхней полуплоскости.

Ключевые слова: задача Неймана, оператор Римана-Лиувилля, интегральное преобразование с функцией Райта, обобщенное уравнение Лапласа

MSC 35L05

THE NEUMANN PROBLEM FOR THE GENERALIZED LAPLACE EQUATION

O. Kh. Masaeva

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Kabardino-Balkarian Republic, Nalchik, st. Shortanova,89a

E-mail: olesya.masaeva@yandex.ru

The existence and uniqueness of the solution of the Neumann problem is proved for the generalized Laplace equation with a fractional derivative in the upper half-plane.

Key words: Neumann problem, Riemann-Liouville operator, integral transformation with Wright function, generalized Laplace equation.

Введение

В области $\Omega=\{(x,y):-\infty<x<\infty,0<y<\infty\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)+D_{0y}^{\alpha}D_{0y}^{\alpha}u(x,y)=0, \tag{1}$$

где $0<\alpha<1, D_{0y}^{\alpha}$ – оператор дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля порядка α [1, с. 9]: $D_{0y}^{\alpha}u(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}D_{0y}^{\alpha-1}u(x,y)$, $D_{0y}^{\alpha-1}u(x,y)=\int\limits_0^y\frac{(y-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}u(x,t)dt$.

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u=u(x,y)$ такую, что $y^{1-\alpha}u\in C(\bar{\Omega})$, $u_{xx},D_{0y}^{\alpha}D_{0y}^{\alpha}u(x,y)\in C(\Omega)$, и удовлетворяющую уравнению (1).

Сформулируем задачу Неймана для уравнения (1): *найти в области Ω регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию*

$$\lim_{y\to0}D_{0y}^{\alpha-1}D_{0y}^{\alpha}u(x,y)=\tau(x),\ -\infty<x<\infty, \tag{2}$$

где $\tau(x)$ – заданная непрерывная функция на всей действительной оси.

В работе [2] был получен аналог интеграла Шварца для полуплоскости в случае системы Коши–Римана дробного порядка. В работе [3] была исследована задача Дирихле для уравнения (1) в полуплоскости. В работе [4] исследовалась единственность решения задачи Дирихле для уравнения

$$D_{0x}^{\alpha-1}u_x+D_{0y}^{\beta-1}u_y+c(x,y)u=0,\quad 1<\alpha,\beta<2,$$

в ограниченной области D, лежащей в первом квадранте, которая вместе с любой точкой $(x,y)\in D$ содержит интервалы с концами в точках $(x,y),(x,0)$ и $(x,y),(0,y)$.

В данной работе доказаны существование и единственность решения аналога задачи Неймана для уравнения (1) в верхней полуплоскости.

1. Предварительные сведения

Интегральные преобразования с функцией Райта [5] в ядре определяются с помощью формул

$$A^{\gamma,\mu}v(x)=x^{\mu-1}\int\limits_0^\infty v(t)\phi\left(-\gamma,\mu,-\frac{t}{x^\gamma}\right)dt,\ B^{\gamma,\mu}v(x)=\int\limits_0^\infty v(t)t^{\mu-1}\phi\left(-\gamma,\mu,-\frac{x}{t^\gamma}\right)dt,\ 0<\gamma<1,$$

где $\phi(\rho,\delta,z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\Gamma(\rho n+\delta)}$, $v(x)$ – функция заданная на положительной полуоси.

Справедлива формула

$$\int\limits_0^\infty u(x)A^{\gamma,\mu}v(x)dx=\int\limits_0^\infty v(x)B^{\gamma,\mu}u(x)dx. \tag{3}$$

Пусть $\nu<-\delta$, $\delta\neq0$. Тогда

$$B^{\gamma,\delta}x^{\nu}=x^{(\nu+\delta)/\gamma}\frac{\Gamma(-(\delta+\nu)/\gamma)}{\gamma\Gamma(-\nu)}. \tag{4}$$

Доказательство и более подробное изложение можно найти в монографии [6].

2. Общее представление решения

Теорема 1. *Пусть* $|x|^{\varepsilon+1}\tau(x)\to 0$ *при* $|x|\to\infty$. *Тогда функция* $u(x,y)$, *определенная по формуле*

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(\xi-x,y)\tau(\xi)d\xi+C\frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \tag{5}$$

где

$$G(\xi-x,y)=\frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\ln|\xi-x|+\frac{y^{3\alpha-1}}{(\xi-x)^2}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-t}tE_{2\alpha,3\alpha}\left(-\frac{y^{2\alpha}t^2}{(\xi-x)^2}\right)dt, \tag{6}$$

является регулярным решением задачи (1), (2). Здесь $E_{\rho,\mu}(-z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k}{\Gamma(\rho k+\mu)}$ – *функция типа Миттаг–Леффлера [7].*

Лемма 1. *Справедлива оценка*

$$|G(\xi-x,y)|\leq\frac{Cy^{\alpha-1}\beta}{1+\beta}\ln\beta y^{\alpha}, \tag{7}$$

где C – *некоторая положительная постоянная,* $\beta=\frac{|\xi-x|}{y^{\alpha}}$.

Доказательство. Из (6) в результате замены $t=\sqrt{s}\frac{|\xi-x|}{y^{\alpha}}$, получим

$$G(\xi-x,y)=\frac{y^{\alpha-1}}{2}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\beta\sqrt{s}}E_{2\alpha,3\alpha}(-s)ds+\frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\ln|x-\xi|. \tag{8}$$

Представим интеграл (8) в виде

$$G(\xi-x,y)=\frac{y^{\alpha-1}}{2}\left(\int\limits_{0}^{1}e^{-\beta\sqrt{s}}E_{2\alpha,3\alpha}(-s)ds+\int\limits_{1}^{\infty}e^{-\beta\sqrt{s}}E_{2\alpha,3\alpha}(-s)ds\right)+\frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\ln\beta y^{\alpha}. \tag{9}$$

Подставив во второй интеграл равенство

$$E_{2\alpha,\alpha}(-s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}-sE_{2\alpha,3\alpha}(-s), \tag{10}$$

и интегрируя по частям, имеем

$$\int\limits_{1}^{\infty}e^{-\beta\sqrt{s}}E_{2\alpha,3\alpha}(-s)ds=-\frac{2}{\Gamma(\alpha)}e^{-\beta}\ln\beta+\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\beta}^{\infty}e^{-s}\ln s\,ds-\int\limits_{1}^{\infty}e^{-\beta\sqrt{s}}\frac{E_{2\alpha,\alpha}(-s)}{s}ds, \tag{11}$$

Подставляя (11) в (9) и устремляя β к нулю, так как $\int\limits_{0}^{1}E_{2\alpha,3\alpha}(-s)ds<\infty, \int\limits_{1}^{\infty}\frac{E_{2\alpha,\alpha}(-s)}{s}ds<\infty$, $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-s}\ln s\,ds<\infty$, получим

$$G(\xi-x,y)=O(y^{\alpha-1}),\ \beta\to 0. \tag{12}$$

Так как $G(\xi-x,y)=\frac{y^{\alpha-1}}{2\beta^2}\int\limits_0^\infty e^{-\sqrt{t}}E_{2\alpha,3\alpha}\left(-\frac{t}{\beta^2}\right)dt+\frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\ln\beta y^\alpha$, то

$$G(\xi-x,y)=O\left(y^{\alpha-1}\ln\beta y^\alpha\right),\,\beta\to\infty,y>0. \tag{13}$$

Таким образом, из оценок (12) и (13) следует оценка (7).
□

Лемма 2. *Функция $G(\xi-x,y)$ удовлетворяет уравнению (1), т. е.*

$$G_{xx}(\xi-x,y)=-D^\alpha_{0y}D^\alpha_{0y}G(\xi-x,y). \tag{14}$$

Доказательство. Внеся в правой части формулы (8) операцию дифференцирования дважды по x под знак интеграла, имеем

$$G_{xx}(\xi-x,y)=\frac{y^{-\alpha-1}}{2}\int\limits_0^\infty te^{-\beta\sqrt{s}}E_{2\alpha,3\alpha}(-s)ds-\frac{1}{|\xi-x|^2}\frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \tag{15}$$

Далее учитывая формулу дробного дифференцирования функции типа Миттаг-Леффлера [6, с. 15], получаем $D^\alpha_{0y}y^{3\alpha-1}E_{2\alpha,3\alpha}\Big(-\frac{t^2y^{2\alpha-1}}{(\xi-x)^2}\Big)=y^{2\alpha-1}E_{2\alpha,2\alpha}\Big(-\frac{t^2y^{2\alpha}}{(\xi-x)^2}\Big)$, и

$$D^\alpha_{0y}y^{2\alpha-1}E_{2\alpha,2\alpha}\Big(-\frac{t^2y^{2\alpha}}{(\xi-x)^2}\Big)=y^{\alpha-1}E_{2\alpha,\alpha}\Big(-\frac{t^2y^{2\alpha}}{(\xi-x)^2}\Big),$$

Так как $y^{\alpha-1}E_{2\alpha,\alpha}\Big(-\frac{t^2y^{2\alpha}}{(\xi-x)^2}\Big)=\frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{t^2y^{3\alpha-1}}{(\xi-x)^2}E_{2\alpha,3\alpha}\Big(-\frac{t^2y^{2\alpha}}{(\xi-x)^2}\Big)$, $\quad D^\alpha_{0y}\frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}=0$, имеем

$$D^\alpha_{0y}D^\alpha_{0y}G(\xi-x,y)=\frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(\xi-x)^2}-\frac{y^{3\alpha-1}}{(\xi-x)^4}\int\limits_0^\infty t^3e^{-t}E_{2\alpha,3\alpha}\Big(-\frac{t^2y^{2\alpha}}{(\xi-x)^2}\Big)dt.$$

В результате замены переменной $\frac{t^2y^{2\alpha}}{(\xi-x)^2}=s$ получим

$$D^\alpha_{0y}D^\alpha_{0y}G(\xi-x,y)=\frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(\xi-x)^2}-\frac{y^{-\alpha-1}}{2}\int\limits_0^\infty te^{-\beta\sqrt{t}}E_{2\alpha,3\alpha}(-t)dt. \tag{16}$$

Из формул (15) и (16) видим, что имеет место (14). □

Лемма 3. *Справедлива оценка*

$$|G_{xx}(\xi-x,y)|\le\frac{M_1y^{-\alpha-1}}{\beta^\mu(1+\beta^{2-\mu})}, \tag{17}$$

где μ – сколь угодно малое положительное число.

Доказательство. Из формулы (15) с учетом (10) имеем

$$G_{xx}=\frac{y^{-\alpha-1}}{2}\int\limits_0^\infty e^{-\beta\sqrt{t}}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}-E_{2\alpha,\alpha}(-t)\right)dt-\frac{1}{|\xi-x|^2}\frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Отсюда следует, что

$$G_{xx}(\xi-x,y)=-\frac{y^{-\alpha-1}}{2}\int_0^\infty e^{-\beta\sqrt{t}}E_{2\alpha,\alpha}(-t)dt. \tag{18}$$

Пусть далее $G_{xx}(\xi-x,y)=-\frac{y^{-\alpha-1}}{2}\int_0^\infty e^{-\beta\sqrt{t}}(\beta\sqrt{t})^{\mu}(\beta\sqrt{t})^{-\mu}E_{2\alpha,\alpha}(-t)dt$. Так как $f(z)=e^{-z}z^{\mu}$ достигает своего максимального значения в точке $z=\mu$, имеем оценку

$$|G_{xx}(\xi-x,y)|\le\frac{y^{-\alpha-1}\beta^{-\mu}}{2}e^{-\mu}\mu^{\mu}\int_0^\infty t^{-\frac{\mu}{2}}|E_{2\alpha,\alpha}(-t)|dt.$$

Так как $\int_0^\infty t^{-\frac{\mu}{2}}|E_{2\alpha,\alpha}(-t)|dt<\infty$ при $0<\mu<2$, имеем оценку

$$|G_{xx}(\xi-x,y)|\le C_1y^{-\alpha-1}\beta^{-\mu}. \tag{19}$$

C_1 – некоторая постоянная. Из (18) следует $G_{xx}(\xi-x,y)=-\frac{y^{-\alpha-1}}{2\beta^2}\int_0^\infty e^{-\sqrt{t}}E_{2\alpha,\alpha}\left(-\frac{t}{\beta^2}\right)dt$. Тогда

$$G_{xx}(\xi-x,y)=O\left(\frac{1}{\beta^2}\right),\ \beta\to\infty. \tag{20}$$

Из оценок (19) и (20) заключаем неравенство (17). □

Лемма 4. *Для функции (5) справедливо равенство*

$$\lim_{y\to 0}D_{0y}^{\alpha-1}D_{0y}^{\alpha}u=\frac{2\tau(x)}{\pi}\int_0^\infty E_{2\alpha,\alpha+1}(-s^2)ds. \tag{21}$$

Доказательство. Применяя композицию $D_{0y}^{\alpha-1}D_{0y}^{\alpha}$ операторов Римана-Лиувилля к интегралу в правой части формулы (5), имеем

$$D_{0y}^{\alpha-1}D_{0y}^{\alpha}u=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tau(\xi)D_{0y}^{\alpha-1}D_{0y}^{\alpha}G(\xi-x,y)d\xi, \tag{22}$$

где

$$D_{0y}^{\alpha-1}D_{0y}^{\alpha}G(\xi-x,y)=\frac{1}{(\xi-x)^2}\int_0^\infty e^{-t}ty^{\alpha}E_{2\alpha,\alpha+1}\left(-\frac{y^{2\alpha}t^2}{(\xi-x)^2}\right)dt.$$

Пусть ε – некоторое фиксированное положительное число, тогда

$$D_{0y}^{\alpha-1}D_{0y}^{\alpha}u=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{x-\varepsilon}+\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{\infty}\right)\tau(\xi)D_{0y}^{\alpha-1}D_{0y}^{\alpha}G(\xi-x,y)d\xi.$$

Сделав замену $\xi-x=y^{\alpha}\eta$, имеем

$$\pi D_{0y}^{\alpha-1}D_{0y}^{\alpha}u=\Big(\int_{-\infty}^{-\frac{\varepsilon}{y^{\alpha}}}+\int_{\frac{\varepsilon}{y^{\alpha}}}^{\infty}\Big)\frac{\tau(x+y^{\alpha}\eta)}{\eta^2}\int_0^\infty\frac{t}{e^t}E_{2\alpha,\alpha+1}\Big(-\frac{t^2}{\eta^2}\Big)dtd\eta+$$

$$\int\limits_{-\frac{\varepsilon}{y^\alpha}}^{\frac{\varepsilon}{y^\alpha}} \frac{\tau(x+y^\alpha\eta)-\tau(x)}{\eta^2}\int\limits_0^\infty \frac{t}{e^t}E_{2\alpha,\alpha+1}\Big(-\frac{t^2}{\eta^2}\Big)dtd\eta+2\tau(x)\int\limits_0^{\frac{\varepsilon}{y^\alpha}}\frac{1}{\eta^2}\int\limits_0^\infty\frac{t}{e^t}E_{2\alpha,\alpha+1}\Big(-\frac{t^2}{\eta^2}\Big)dtd\eta. \tag{23}$$

Из равенства (23) следует, что $\lim\limits_{y\to 0}D_{0y}^{\alpha-1}D_{0y}^{\alpha}u=\frac{2\tau(x)}{\pi}\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^{\frac{\varepsilon}{y^\alpha}}\frac{1}{\eta^2}\int\limits_0^\infty\frac{t}{e^t}E_{2\alpha,\alpha+1}\Big(-\frac{t^2}{\eta^2}\Big)dtd\eta$.

Так как

$$\int\limits_0^{\frac{\varepsilon}{y^\alpha}}\frac{d\eta}{\eta^2}\int\limits_0^\infty\frac{t}{e^t}E_{2\alpha,\alpha+1}\Big(-\frac{t^2}{\eta^2}\Big)dt=\int\limits_0^{\frac{\varepsilon}{y^\alpha}}d\eta\int\limits_0^\infty\frac{s}{e^{\eta s}}E_{2\alpha,\alpha+1}(-s^2)ds=\int\limits_0^\infty E_{2\alpha,\alpha+1}(-s^2)(1-e^{-\frac{\varepsilon}{y^\alpha}s})ds,$$

получаем (21) □

Лемма 5. *Справедливо равенство* $\int\limits_0^\infty E_{2\alpha,\alpha+1}(-s^2)ds=\frac{\pi}{2}$.

Доказательство. В результате замены $s=t^\alpha$ имеем

$$\int\limits_0^\infty E_{2\alpha,\alpha+1}(-s^2)ds=\alpha\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}E_{2\alpha,\alpha+1}(-t^{2\alpha})dt.$$

Отсюда, так как (см. [6, с. 84]) $A^{\alpha,1-\alpha}\sin t=t^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}(-t^{2\alpha})$, имеем

$$\int\limits_0^\infty E_{2\alpha,\alpha+1}(-s^2)ds=\alpha\int\limits_0^\infty\frac{1}{t}A^{\alpha,1-\alpha}\sin tdt.$$

По формуле (3) получаем

$$\int\limits_0^\infty\frac{1}{t}A^{\alpha,1-\alpha}\sin tdt=\int\limits_0^\infty\sin tB^{\alpha,1-\alpha}\frac{1}{t}dt. \tag{24}$$

По формуле (4) имеем $B^{\alpha,1-\alpha}\frac{1}{t}=\frac{1}{\alpha t}$, и $\int\limits_0^\infty E_{2\alpha,\alpha+1}(-s^2)ds=\int\limits_0^\infty\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$. □

Перейдем к доказательству теоермы 1.

Доказательство. С помощью оценки (7) заключаем, что

$$|u(x,y)|\le\frac{Cy^{\alpha-1}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|x-\xi|}{y^\alpha+|x-\xi|}\ln|x-\xi||\tau(\xi)|d\xi\le y^{\alpha-1}K\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|x-\xi|}{y^\alpha+|x-\xi|}\ln|x-\xi||\xi|^{-1-\varepsilon}d\xi.$$

Таким образом, имеем оценку

$$|u(x,y)|\le My^{\alpha-1},$$

где M – некоторая постоянная. По лемме 3 получаем

$$|u_{xx}|\le\frac{y^{-1}M_1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\tau(\xi)|d\xi}{|x-\xi|^\mu+|x-\xi|^2}\le M_2y^{-1},$$

где M_1, M_2 – положительные постоянные. Из леммы 2 следует, что функция (5) удовлетворяет уравнению (1). Следовательно, интегралы, полученные при внесении под знак интеграла в правой части (5) операторов дифференцирования $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ и $D^{\alpha}_{0y}D^{\alpha}_{0y}$, сходятся равномерно вблизи каждой точки $(x,y), y>0$. Из лемм 4 и 5 следует, что $u(x,y)$ удовлетворяет условию (2). Поэтому функция $u(x,y)$, представимая в виде (5), в области Ω является регулярным решением задачи (1), (2). $\square$

3. Единственность решения

Теорема 2. *Пусть $u_x, y^{1-\alpha}D^{\alpha}_{0y}u \in C(\bar{\Omega})$, и пусть*

$$\lim_{|x|\to\infty} u_x \cdot D^{\alpha-1}_{0y}u = 0, \quad \lim_{y\to\infty} D^{\alpha-1}_{0y}u \cdot D^{\alpha-1}_{0y}D^{\alpha}_{0y}u = 0. \tag{25}$$

Тогда решение задачи (1), (2) единственно с точностью до слагаемого $C\frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$.

Доказательство. Установим, что однородная задача (1), (2) имеет только решение $u(x,y) = C\frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, где C -произвольная постоянная. Так как

$$D^{\alpha-1}_{0y}u \cdot Lu \equiv (u_x D^{\alpha-1}_{0y}u)_x - u_x D^{\alpha-1}_{0y}u_x + (D^{\alpha-1}_{0y}u \cdot D^{\alpha-1}_{0y}D^{\alpha}_{0y}u)_y - D^{\alpha}_{0y}u \cdot D^{\alpha-1}_{0y}D^{\alpha}_{0y}u,$$

то

$$\int_{-a}^{a}\int_{0}^{b} D^{\alpha-1}_{0y}u \cdot Lu dxdy = \int_{0}^{b}\{u_x(a,y)D^{\alpha-1}_{0y}u(a,y) - u_x(-a,y)D^{\alpha-1}_{0y}u(-a,y)\}dy+ \tag{26}$$

$$\int_{-a}^{a}\{[D^{\alpha-1}_{0y}uD^{\alpha-1}_{0y}D^{\alpha}_{0y}u]_{y=b} - [D^{\alpha-1}_{0y}uD^{\alpha-1}_{0y}D^{\alpha}_{0y}u]_{y=0}\}dx - \int_{-a}^{a}\int_{0}^{b}\{u_x D^{\alpha-1}_{0y}u_x + D^{\alpha}_{0y}u \cdot D^{\alpha-1}_{0y}D^{\alpha}_{0y}u\}\,dxdy.$$

С учетом условий (25) из (26) получаем $\lim\limits_{a\to\infty}\lim\limits_{b\to\infty}\int_{-a}^{a}\int_{0}^{b}\{u_x D^{\alpha-1}_{0y}u_x + D^{\alpha}_{0y}u \cdot D^{\alpha-1}_{0y}D^{\alpha}_{0y}u\}dxdy = 0$. Отсюда, в силу положительности оператора дробного интегрирования [8], получаем $u_x = 0, D^{\alpha}_{0y}u = 0$ или $u(x,y) = u(y) + c$, т. е. $u(x,y) = C\frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, C- некоторая постоянная. $\square$

Список литературы

[1] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение свободные произведения*, Физматлит, М., 2003, 272 с. [Nahushev A. M., *Drobnoe ischislenie i ego primenenie svobodnye proizvedeniya*, Fizmatlit, M., 2003, 272 pp.]

[2] Псху А. В., "Аналог формулы Шварца для системы Коши–Римана дробного порядка", *Современные методы в теории краевых задач*, Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения — XIII", 2002, С. 127. [Pskhu A. V., "Analog formuly SHvarca dlya sistemy Koshi–Rimana drobnogo poryadka", *Sovremennye metody v teorii kraevyh zadach*, Materialy Voronezhskoj vesennej matematicheskoj shkoly "Pontryaginskie chteniya — XIII", 2002, S. 127].

[3] Масаева О. Х., "Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с дробной производной", *Челябинский физико-математический журнал*, **2**:3 (2017), 312–322. [Masaeva O. H., "Zadacha Dirihle dlya obobshchennogo uravneniya Laplasa s drobnoj proizvodnoj", *CHelyabinskij fiziko-matematicheskij zhurnal*, **2**:3 (2017), 312–322].

[4] Масаева О. Х., "Единственность решения задачи Дирихле для уравнения с фрактальным оператором Лапласа в главной части", *Известия КБНЦ РАН*, **(68)-2**:6 (2015), 127–130. [Masaeva O. H., "Edinstvennost' resheniya zadachi Dirihle dlya uravneniya s fraktal'nym operatorom Laplasa v glavnoj chasti", *Izvestiya KBNC RAN*, **(68)-2**:6 (2015), 127–130].

[5] Wright E. M., "On the coefficients of power series having exponential singularities", *J. London Math. Soc.*, **8**:29 (1933.), 71–79.

[6] Псху А. В., *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005, 199 с. [Pskhu A. V., *Uravneniya v chastnyh proizvodnyh drobnogo poryadka*, Nauka, M., 2005, 199 pp.]

[7] Джрбашян М. М., *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, Наука, М., 1966, 672 с. [Dzhrbashyan M. M., *Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funkcij v kompleksnoj oblasti*, Nauka, M., 1966, 672 pp.]

[8] Нахушев А. М., "О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа", *Дифференц. уравнения*, **34**:1 (1998), 101–109. [Nahushev A. M., "O polozhitel'nosti operatorov nepreryvnogo i diskretnogo differencirovaniya i integrirovaniya ves'ma vazhnyh v drobnom ischislenii i v teorii uravnenij smeshannogo tipa", *Differenc. uravneniya*, **34**:1 (1998), 101–109].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение свободные произведения. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

[2] Псху А. В. Аналог формулы Шварца для системы Коши–Римана дробного порядка // Современные методы в теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения — XIII 2002. С. 127.

[3] Масаева О. Х. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с дробной производной // Челябинский физико-математический журнал. 2017. Т. 2. № 3. С. 312–322.

[4] Масаева О. Х. Единственность решения задачи Дирихле для уравнения с фрактальным оператором Лапласа в главной части // Известия КБНЦ РАН. 2015. Т. (68)-2. №6. С. 127–130.

[5] Wright E. M. On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc. 1933. vol. 8. no. 29. pp. 71–79.

[6] Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199

[7] Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

[8] Нахушев А. М. О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 1. С. 101–109.

Для цитирования: Масаева О. Х. Задача Неймана для обобщенного уравнения Лапласа // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2018. № 3(23). C. 83-90. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-83-90

For citation: Masaeva O. Kh. The Neumann problem for the generalized Laplace equation, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2018, **23**: 3, 83-90. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-83-90

Поступила в редакцию / Original article submitted: 08.06.2018