DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-76-82

УДК 517.95

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

М. О. Мамчуев

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

E-mail: mamchuev@rambler.ru

Для системы уравнений первого порядка с частными производными дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля дана корректная постановка задачи Коши в случае, когда матричный коэффициент в главной части имеет только положительные собственные значения.

Ключевые слова: система уравнений в частных производных, дробные производные, задача Коши, корректность, фундаментальное решение, функция Райта матричного аргумента

MSC 35N05

CAUCHY PROBLEM FOR THE SYSTEM OF EQUATIONS WITH PARTIAL DERIVATIVES OF FRACTIONAL ORDER

M. O. Mamchuev

Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS, 360000, Nal'chik, Shortanov., 89 A, Russia

E-mail: mamchuev@rambler.ru

For a system of first-order equations with partial derivatives of fractional order in the Riemann-Liouville sense, we give a correct statement of the Cauchy problem in the case when the matrix coefficient in the main part has only positive eigenvalues.

Key words: system of partial differential equations, fractional derivatives, Cauchy problem, well-posedness, fundamental solution, Wright's function of the matrix argument.

Введение

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$u_x(x,y)+AD_{0y}^{\beta}u(x,y)=Bu(x,y)+f(x,y), \quad 0<\beta<1, \tag{1}$$

где $f(x,y) = ||f_1(x,y),...,f_n(x,y)||$ – заданная, и $u(x,y)=||u_1(x,y),...,u_n(x,y)||$ – искомая n-мерные вектор-функции, A и B – заданные постоянные квадратные матрицы порядка n, D_{0y}^{ν} – оператор дробного интегродифференцирования в смысле Римана-Лиувилля [1, с. 9].

Следует отметить, что, в зависимости от знакоопределенности или знаконеопределенности собственных значений матричного коэффициента в главной части системы, такие системы существенно отличаются постановками начальных и краевых задач. В работах [2] – [5] исследованы задача Коши и смешанные задачи для системы с собственными значаниями разных знаков. В работах [6] – [8] исследованы краевые задачи в прямоугольных областях для систем уравнений с частными производными порядка меньше единицы со знакоопределенными собственными значениями. Обзор результатов связанных со скалярным случаем можно найти в работе [8].

Кочубей А.Н. в работе [9] описал класс систем с постоянными коэффициентами для которых разрешима задачи Коши, и существуют фундаментальные решения, экспоненциально растущие вне множества $\{|x|t^{-\beta}\leq 1\}$. Такие системы были названы дробными гиперболическими системами. Система (1) также относится к этому классу систем.

Здесь мы рассмотрим следующую задачу Коши для системы уравнений (1) в случае, когда все собственные значения матрицы A положительны.

Задача 1. *В области $\Omega=\{(x,y):\ -\infty<x<a,\ 0<y<b\}$ найти решение $u(x,y)$ системы (1), удовлетворяющее условияю*

$$\lim_{y\to 0}D_{0y}^{\beta-1}u=\psi(x), \quad -\infty<x<a, \tag{2}$$

где $\psi(x)$ – заданная n-мерная вектор-функция.

Регулярным решением системы (1) в области Ω называется вектор-функция $u(x,y)$ удовлетворяющая во всех точках $(x,y)\in\Omega$ системе (1), такая, что $u_x, D_{0y}^{\beta}u\in$ $\in C(\Omega)$, $y^{1-\beta}u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$.

1. Вспомогательные утверждения

Здесь мы приведем результаты относящиеся к исследованию краевой задачи в прямоугольной области для системы (1).

Задача 2. *В области $\Omega_0=\{(x,y):\ a_1<x<a_2,\ 0<y<b\}$, найти решение $u(x,y)$ системы (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(a_1,y)=\varphi(y), \quad 0<y<b,$$

$$\lim_{y\to 0}D_{0y}^{\beta-1}u=\psi(x), \quad a_1<x<a_2,$$

где $\varphi(y)$, $\psi(x)$ – заданные n-мерные вектор-функции.

Заметим, что с помощью замены переменных $\xi = x - a_1$, $\eta = y$, и искомой функции

$$u(x,y) = u(\xi + a_1, \eta) = v(\xi, \eta),$$

задача 2 эквивалентно редуцируется к частному случаю (при $\alpha = 1$) задачи рассмотренной в работе [8].

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Фундаментальное решение системы (1) при $AB = BA$ имеет вид*

$$G(x,y) = \exp(Bx)\frac{1}{y}\phi(-\beta, 0; -Axy^{-\beta}),$$

где $\phi(-\beta, 0; A)$ – функция Райта матричного аргумента [8].

Лемма 2. *Пусть $AB = BA$, тогда любое регулярное в области Ω_0 решение $u(x,y)$ задачи 2 представимо в виде*

$$u(x,y) = \int\limits_{a_1}^{x} G(x-t,y)A\psi(t)dt + \int\limits_{0}^{y} G(x-a_1, y-s)\varphi(s)ds +$$

$$+\int\limits_{0}^{y}\int\limits_{a_1}^{x} G(x-t, y-s)f(t,s)dtds. \qquad (3)$$

Лемма 3. *Пусть $AB = BA$, $\psi(x) \in [a_1, a_2]$, $y^{1-\beta}\varphi(x) \in [a_1, a_2]$, $y^{1-\beta}f(x,y) \in C(\overline{\Omega_0})$, и функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Гельдера по одной из переменных. Тогда каждое слагаемое в правой части (3) является решением системы (1), таким, что $\frac{\partial}{\partial x}u, D_{0y}^{\beta}u \in C(\Omega_0)$.*

Лемма 4. *Пусть $\psi(x) \in C[a_1, a_2]$, тогда существует равномерный на любом замкнутом подмножестве интервала $(a_1; a_2)$ предел*

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\beta-1}\int\limits_{a_1}^{x} G(x-t,y)A\psi(t)dt = \psi(x), \quad x > \varepsilon > a_1.$$

Лемма 5. *Справедливы следующие оценки*

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}D_{0y}^{\nu}G(x,y)\right|_* \leq Cx^{-\theta}y^{\beta\theta-\nu-\beta m-1}, \quad \theta \in [\theta_1, 2),$$

где $\theta_1 = -1$ при $m = \nu = 0$, и $\theta_1 = 0$ при $m^2 + \nu^2 \neq 0$, C – положительная постоянная.

Лемма 6. *Для любого $x \neq 0$ справедливо неравенство*

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}D_{0y}^{\nu}G(x,y)\right|_* \leq C\exp(-\rho(y)|x|^{\varepsilon}), \quad m = 0, 1, ..., \quad \nu \in \mathbb{R},$$

где $\rho(y) = \sigma y^{\varepsilon}$, $\varepsilon = \frac{1}{1-\beta}$, $\sigma < (1-\beta)\beta^{\beta\varepsilon}\lambda_0^{\varepsilon}$, $\lambda_0 = \min\{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$, λ_i $i = 1, ..., p$, – собственные значения матрицы A.

Лемма 7. *Пусть $\delta > 0$, тогда интеграл*

$$S(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x-\delta} \exp[-\rho(y)(x-t)^{\varepsilon} + \gamma|t|^{\varepsilon}]dt$$

сходится для всех y, таких, что $\rho(y) > \gamma$.

Доказательство. Действительно, с помощью замены $\xi = x-t$, получим

$$S(x,y) = \int\limits_{\delta}^{\infty} \exp\left[-\rho(y)|\xi|^{\varepsilon} + \gamma|x-\xi|^{\varepsilon}\right] d\xi.$$

Пусть число ρ_1 таково, что $\gamma < \rho_1 < \rho(y)$. Функция $g(t) = -\rho_1|\xi|^{\varepsilon} + \gamma|x-\xi|^{\varepsilon}$ при $\delta < \xi < \infty$ имеет единственный максимум

$$\max g(\xi) = g(\xi_0) = \mu|x|^{\varepsilon}$$

в точке $\xi_0 = -x\gamma^{\nu}(\rho_1^{\nu} - \gamma^{\nu})$, где $\nu = \frac{1}{\varepsilon-1}$, $\mu = \gamma\rho_1(\rho_1^{\nu} - \gamma^{\nu})^{-1/\nu}$. Таким образом,

$$|S(x,y)| \leq \frac{\rho(y)-\rho_1}{\varepsilon}\delta^{1-\varepsilon}\exp\left[-(\rho(y)-\rho_1)\delta^{\varepsilon}\right]\exp\left[\mu|x|^{\varepsilon}\right].$$

□

Замечание 1. Из лемм 5 и 7 следует, что при определенных ограничения на рост функций $\psi(x)$ и $f(x,y)$ при больших значениях x, леммы 3 и 4 справедливы и в случае, когда величины a_1 и a_2 или одна из них бесконечны.

2. Формулировка результата

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $AB = BA$, все собственные значения матрицы A положительны, $\beta \in (0;1)$, $\psi(x) \in C(-\infty,a]$, $y^{1-\beta}f(x,y) \in C(\overline{\Omega})$, функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Гельдера по одной из переменных, и при $x \to -\infty$ выполняются соотношения*

$$y^{1-\beta}f(x,y) = O\left(\exp\left(\sigma|x|^{\varepsilon}\right)\right), \quad \psi(x) = O\left(\exp\left(\sigma|x|^{\varepsilon}\right)\right),$$

где $\varepsilon = 1/(1-\beta)$, $\sigma < \rho(b)$. Тогда функция

$$u(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} AG(x-t,y)\psi(t)dt + \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{0}^{y} G(x-t,y-s)f(t,s)dsdt \tag{4}$$

является регулярным решением задачи 1.

Существует не более одного регулярного решения $u(x,y)$ задачи 1 в классе функций, удовлетворяющих для некоторого $k > 0$ условию

$$y^{1-\beta}u(x,y) = O(\exp(k|x|^{\varepsilon})), \quad x \to -\infty.$$

Доказательство. Докажем, что функция (4) является решением задачи 1. Обозначим $u_0(x,y)$ и $u_f(x,y)$ соответственно первое и второе слагаемые в правой части (4). Из леммы 3 и замечания 1 следует, что $u(x,y)$ является решением системы (1), таким, что $\frac{\partial}{\partial x}u, D_{0y}^{\beta}u \in C(\Omega)$.

В силу леммы 5 и условий теоремы 1 на функции $\psi(x)$ и $f(x,y)$, справедливы оценки

$$|u_0(x,y)|_* \leq Cy^{\beta\theta-1}. \tag{5}$$

$$|u_f(x,y)|_* \leq Cy^{\beta+\beta\theta-1}, \tag{6}$$

Из (6) следует

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\beta-1} u_f(x,y) = 0.$$

Из последнего, с учетом леммы 4 и замечания 1 следует, выполнение условия (2).

Из оценок (5) и (6) следует, что $y^{1-\beta}u_f(x,y) \in C(\overline{\Omega})$ и $y^{1-\beta}u_0(x,y) \in C(\overline{\Omega} \setminus \{y=0\})$.

Покажем непрерывность функции $y^{1-\beta}u_0(x,y)$ при $y=0$. Изменяя переменную интегрирования по формуле $t = x - y^{\beta}\xi$, и затем, переходя к пределу при $y \to 0$, с учетом равенства [8]

$$\int_0^{\infty} \phi(-\beta,\mu;-Az)dz = \frac{1}{\Gamma(\mu+\beta)}A^{-1},$$

получим

$$\lim_{y\to 0} y^{1-\beta}u_0(x,y) = \lim_{y\to 0} A\int_0^{\infty} \phi(-\beta,0;-A\xi)\exp(By^{\beta}\xi)\psi(x-y^{\beta}\xi)d\xi = \frac{\psi(x)}{\Gamma(\beta)}.$$

Таким образом, доказано, что $u(x,y)$ – регулярное решение задачи 1.

Докажем единственность решения задачи 1. Пусть $u(x,y)$ – регулярное решение однородной задачи Коши для системы (1), тогда в силу леммы 2, это решение в любой прямоугольной области

$$\Omega_r = \{(x,y) : r < x < a, 0 < y < b\},$$

удовлетворяет соотношению

$$u(x,y) = \int_0^y G(x-r,y-s)u(r,y)ds.$$

Из леммы 6 и условий теоремы 1 имеем

$$|G(x,y)|_* \leq C\exp\left(-\rho(y)|x|^{\varepsilon}\right), |u(x,y)|_* \leq Cy^{\beta-1}\exp\left(k|x|^{\varepsilon}\right).$$

Из последних неравенств получим

$$|u(x,y)|_* \leq C\int_0^y (y-s)^{\beta-1}\exp\left[-\rho(s)|x-r|^{\varepsilon} + k|r|^{\varepsilon}\right]ds. \tag{7}$$

При $y < b_0 = \beta[(1-\beta)/k]^{(1-\beta)/\beta}\lambda_0^{1/\beta}$ интеграл в правой части неравенства (7) стремится к нулю при $r \to -\infty$. Таким образом, $u(x,y) \equiv 0$ в области

$$\Omega_1 = \{(x,y) : -\infty < x < a,\, 0 < y < b_0\}.$$

Докажем, что $u(x,y) \equiv 0$ в области $\Omega_2 = \{(x,y) : -\infty < x < a, b_0 < y \leq 2b_0\}$. Рассмотрим функцию $v(x,z) = u(x,b_0+z)$, где $z = y-b_0$. Поскольку $u(x,y) \equiv 0$ в Ω_1, то

$$D^{\nu}_{0y}u(x,y) = D^{\nu}_{b_0y}u(x,y) = D^{\nu}_{0z}v(x,z).$$

Отсюда следует, что для любых $(x,z) \in \Omega_1$, функция $v(x,z)$ является решением однородной задачи 1. Поэтому, из доказанного выше, следует, что $v(x,z) \equiv 0$ для всех $(x,z) \in \Omega_1$. Следовательно, $u(x,y) \equiv 0$ для всех $(x,y) \in \Omega_2$.

Точно так же доказывается, что $u(x,y) \equiv 0$ в

$$\Omega_3 = \{(x,y) : -\infty < x < a, 2b_0 < y \leq 3b_0\}$$

и т.д. □

Список литературы

[1] Нахушев А.М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с. [Nahushev A.M., *Drobnoe ischislenie i ego primenenie*, Fizmatlit, M., 2003].

[2] Мамчуев М.О., "Фундаментальное решение системы уравнений с частными производными дробного порядка", *Дифференциальные уравнения*, **46**:8 (2010), 1113-1124. [Mamchuev M.O., "Fundamental'noe reshenie sistemy uravnenij s chastnymi proizvodnymi drobnogo poryadka", *Differencial'nye uravneniya*, **46**:8 (2010), 1113-1124].

[3] Мамчуев М.О., "Задача Коши в нелокальной постановке для системы уравнений с частными производными дробного порядка", *Дифференциальные уравнения*, **48**:3 (2012), 351-358. [Mamchuev M.O., "Zadacha Koshi v nelokal'noj postanovke dlya sistemy uravnenij s chastnymi proizvodnymi drobnogo poryadka", *Differencial'nye uravneniya*, **48**:3 (2012), 351-358].

[4] Мамчуев М.О., "Смешанная задача для нагруженной системы уравнений с производными Римана-Лиувилля", *Математические заметки*, **97**:3 (2015), 428-439. [Mamchuev M.O., "Smeshannaya zadacha dlya nagruzhennoj sistemy uravnenij s proizvodnymi Rimana-Liuvillya", *Matematicheskie zametki*, **97**:3 (2015), 428-439].

[5] Мамчуев М.О., "Смешанная задача для системы уравнений с частными производными дробного порядка", *Дифференциальные уравнения*, **52**:1 (2016), 132-137. [Mamchuev M.O., "Smeshannaya zadacha dlya sistemy uravnenij s chastnymi proizvodnymi drobnogo poryadka", *Differencial'nye uravneniya*, **52**:1 (2016), 132-137].

[6] Мамчуев М.О., "Краевая задача для системы уравнений с частными производными дробного порядка", *Дифференциальные уравнения*, **44**:12 (2008), 1674-1686. [Mamchuev M.O., "Kraevaya zadacha dlya sistemy uravnenij s chastnymi proizvodnymi drobnogo poryadka", *Differencial'nye uravneniya*, **44**:12 (2008), 1674-1686].

[7] Мамчуев М.О., "Краевая задача для системы многомерных дифференциальных уравнений дробного порядка", *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия.*, **8/2**:67 (2008), 164-175. [Mamchuev M.O., "Kraevaya zadacha dlya sistemy mnogomernyh differencial'nyh uravnenij drobnogo poryadka", *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya.*, **8/2**:67 (2008), 164-175].

[8] Мамчуев М.О., "Краевая задача для линейной системы уравнений с частными производными дробного порядка", *Челябинский физико-математический журнал*, **2**:3 (2017), 295-311. [Mamchuev M.O., "Kraevaya zadacha dlya linejnoj sistemy uravnenij s chastnymi proizvodnymi drobnogo poryadka", *CHelyabinskij fiziko-matematicheskij zhurnal*, **2**:3 (2017), 295-311].

[9] Kochubei A.N., "Fractional-hiperbolic systems", *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **16**:4 (2013), 860-873.

Список литературы (ГОСТ)

[1] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит. 2003. 272 с.

[2] Мамчуев М.О. Фундаментальное решение системы уравнений с частными производными дробного порядка // Дифференциальные уравнение. 2010. Т. 46. №8. С. 1113-1124.

[3] Мамчуев М.О. Задача Коши в нелокальной постановке для системы уравнений с частными производными дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 3. С. 351-358.

[4] Мамчуев М.О. Смешанная задача для нагруженной системы уравнений с производными Римана-Лиувилля // Математические заметки. 2015. Т. 97. №3. С. 428-439.

[5] Мамчуев М.О. Смешанная задача для системы уравнений с частными производными дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. №1. С. 132-137.

[6] Мамчуев М.О. Краевая задача для системы уравнений с частными производными дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 12. С. 1674-1686.

[7] Мамчуев М.О. Краевая задача для системы многомерных дифференциальных уравнений дробного порядка // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2008. Т. 67. №8/2. С. 164-175.

[8] Мамчуев М.О. Краевая задача для линейной системы уравнений с частными производными дробного порядка // Челябинский физико-математический журнал. 2017. Т. 2. №3. С. 295-311.

[9] Kochubei A.N. Fractional-hiperbolic systems // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2013. vol. 16. №4. pp. 860-873.

Для цитирования: Мамчуев М. О. Задача Коши для системы уравнний с частными производными дробного поррядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 3(23). С. 76-82. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-76-82

For citation: Mamchuev M. O. Cauchy problem for the system of equations with partial derivatives of fractional order, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2018, **23**: 3, 76-82. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-76-82

Поступила в редакцию / Original article submitted: 08.06.2018