Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 3(23). С. 67-75. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-67-75

УДК 517.95

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Р. Х. Макаова

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А
E-mail: makaova.ruzanna@mail.ru

В работе исследуется задача Трикоми для гиперболического уравнения третьего порядка с вырождением порядка внутри смешанной области. Доказана теорема существования и единственности регулярного решения.

Ключевые слова: вырождающееся гиперболическое уравнение, уравнение Аллера, задача Трикоми, оператор дробного интегро-дифференцирования.

MSC 35L25, 35L80

THE TRICOMI PROBLEM FOR A THIRD ORDER HYPERBOLIC EQUATION DEGENERATING INSIDE THE DOMAIN

R. Kh. Makaova

Institute of Applied Mathematics and Automation,
89A Shortanova St., Nalchik, 360000, Russia
E-mail: makaova.ruzanna@mail.ru

In this paper, we study the Tricomi problem for a third-order hyperbolic equation with degeneracy of order inside a mixed domain. The existence and uniqueness theorem for a regular solution is proved.

Key words: degenerate hyperbolic equation, Hallaire equation, Tricomi problem, fractional integro-differentiation operator.

Введение

В евклидовой плоскости точек (x,y) рассмотрим уравнение вида

$$0=\begin{cases} u_y - au_{xx} - bu_{xxy}, & y>0, \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy} - c(-y)^{\frac{m-2}{2}} u_x, & y<0, \end{cases} \tag{1}$$

где a, b, m – заданные положительные числа; $|c| \le m/2$; $u=u(x,y)$ – искомая действительная функция независимых переменных x и y.

Уравнение (1) при $y>0$ совпадает с уравнением Аллера [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right), \tag{2}$$

а при $y<0$ – с вырождающимся гиперболическим уравнением [2, с. 13]:

$$(-y)^m u_{xx} - u_{yy} - c(-y)^{\frac{m-2}{2}} u_x = 0. \tag{3}$$

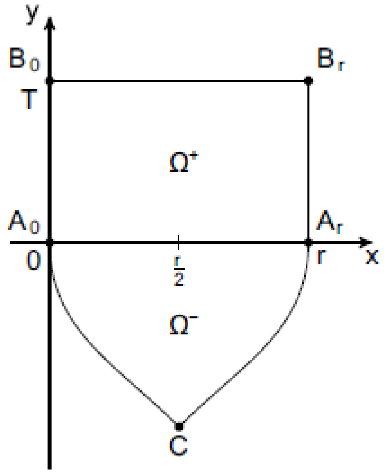
Уравнение (2) так же называют модифицированным уравнением диффузии и относится к уравнениям псевдопараболического типа [3], [4, с. 137]. Известно [5], что при определенных допущениях уравнение (2) описывает движение почвенной влаги и его решение интерпретируется как влажность почвы с коэффициентом диффузии a и коэффициентом влагопроводности b в точке x почвенного слоя $0 \le x \le r$ в момент времени $y \in [0,T]$. Решению различных локальных, нелокальных и смешанных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка, в частности, и для уравнения Аллера посвящены работы [6] - [11].

Уравнение (3) является уравнением гиперболического типа с параболическим вырождением вдоль прямой $y=0$ и при $m=2$ его называют уравнением Бицадзе – Лыкова [12, с. 234]. При $c=0$ уравнение (3) переходит в уравнение Геллерстедта, которое, как отмечено в работе [13, с. 236], находит применение при отыскании оптимальной формы плотины прорези. В работах [14, 15] были изучены первая и вторая задачи Дарбу для уравнения (3), а в работах [16, 17] в явном виде выписаны решения первой краевой задачи и задачи Гурса соответственно. Достаточно полная библиография по исследованию различных краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений имеются в монографиях [2, 18, 19].

Для гиперболического уравнения вида (1) автором были исследованы краевые задачи, для которых доказаны теоремы существования и единственности [20, 21].

Постановка задачи и полученные результаты

Пусть $\Omega^+ = \{(x,y) : 0<x<r, 0<y<T\}$. Через Ω^- обозначим область, ограниченную характеристиками уравнения (3):



$$A_0C : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0,$$

$$A_rC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = r,$$

выходящими из точек $A_0 = (0,0)$, $A_r = (r,0)$ и пересекающимися в точке $C = \left(r/2, -[(m+2)r/4]^{2/(m+2)}\right)$ и $A_0A_r = \{(x,0) : 0 < x < r\}$. Пусть $B_0 = (0,T)$, $B_r = (r,T)$ и $A_0B_0 = \{(0,y) : 0 < y < T\}$, $A_rB_r = \{(r,y) : 0 < y < T\}$; $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup (A_0A_r)$.

Регулярным в области Ω *решением уравнения* (1) *назовем функцию* $u = u(x,y)$ *такую, что* $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega^-)$ *и* $u_{xxy} \in C(\Omega^+)$, *удовлетворяющую уравнению* (1).

Исследуется следующая

Задача. *Найти регулярное в области* Ω *решение уравнения* (1) *из класса* $u_x(x,0)$, $u_y(x,0) \in C[0,r]$ *и удовлетворяющее следующим условиям:*

$$u(0,y) = u(r,y) = 0, \quad 0 \le y \le T, \tag{4}$$

$$u|_{A_0C} = h(x), \quad 0 \le x \le r, \tag{5}$$

где $h(x) \in C^3[0,r]$.

Положим

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le r, \tag{6}$$

$$u_y(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le r. \tag{7}$$

Из (2), переходя к пределу при $y \to +0$ с учетом (6) и (7), находим функциональное соотношение между функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принесенное из области Ω^+ на линию $y = 0$ в виде

$$\psi(x) - a\varphi''(x) - b\psi''(x) = 0, \quad 0 < x < r. \tag{8}$$

Решение задачи Коши (6), (7) для уравнения (3) имеет вид [2, с. 14]:

$$u(x,y) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int\limits_0^1 \varphi\left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right] t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}dt +$$

$$+ \frac{y}{B(1-\alpha,1-\beta)} \int\limits_0^1 \psi\left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right] t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}dt, \quad |c| < \frac{m}{2}, \tag{9}$$

$$u(x,y) = \varphi\left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right] +$$

$$+ \frac{2y}{m+2} \int\limits_0^1 \psi\left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right](1-t)^{-\beta}dt, \quad c = \frac{m}{2}, \tag{10}$$

$$u(x,y)=\varphi\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right]+$$

$$+\frac{2y}{m+2}\int\limits_0^1\psi\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2t)\right](1-t)^{-\frac{m}{m+2}}dt,\quad c=-\frac{m}{2},\tag{11}$$

$$\alpha=\frac{m-2c}{2(m+2)},\qquad \beta=\frac{m+2c}{2(m+2)},$$

где $B(z_1,z_2)$ – бета функция.

Учитывая условие (5), перепишем (9)–(11) следующим образом:

$$h\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{x^{1-\alpha-\beta}\Gamma(\alpha)}{B(\alpha,\beta)}D_{0x}^{-\alpha}\left[\xi^{\beta-1}\varphi(\xi)\right]-$$

$$-\frac{\Gamma(1-\beta)}{B(1-\alpha,1-\beta)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}D_{0x}^{\beta-1}\left[\xi^{-\alpha}\psi(\xi)\right],\quad |c|<\frac{m}{2},\tag{12}$$

$$h\left(\frac{x}{2}\right)=\varphi(x)-\frac{\Gamma(1-\beta)}{2}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{-\beta}D_{0x}^{\beta-1}\psi(\xi),\quad c=\frac{m}{2},\tag{13}$$

$$h\left(\frac{x}{2}\right)=\varphi(0)-\frac{1}{2}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{-\alpha}D_{0x}^{-1}\left[\xi^{-\alpha}\psi(\xi)\right],\quad c=-\frac{m}{2}.\tag{14}$$

Здесь D_{0x}^{γ} – оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана – Лиувилля по переменной x порядка γ с началом в точке 0 и с концом в точке x, определяемый следующим образом [13, с. 9]:

$$D_{0x}^{\gamma}v(\xi)=\frac{1}{\Gamma(-\gamma)}\int\limits_0^x\frac{v(\xi)d\xi}{|x-\xi|^{\gamma+1}},\quad \gamma<0;$$

$$D_{0x}^{\gamma}v(\xi)=\frac{\partial^n}{\partial x^n}D_{0x}^{\gamma-n}v(\xi),\quad n-1<\gamma\le n,\quad n=1,2,...;$$

$$D_{0x}^{\gamma}v(\xi)=v(x),\quad \gamma=0,$$

$\Gamma(z)$ – гамма функция Эйлера.

Для любой функции $v(x)\in L_1[0,r]$ справедливы следующие свойства дробного интегро-дифференцирования с одинаковыми началами [13, с. 11, с. 18]:

$$D_{0x}^{\alpha}D_{0\xi}^{-\beta}v(s)=D_{0x}^{\alpha-\beta}v(\xi),\quad 0<\alpha\le\beta;$$

$$D_{0x}^{\alpha}\xi^{\alpha+\beta}D_{0\xi}^{\beta}v(s)=x^{\beta}D_{0x}^{\alpha+\beta}\xi^{\alpha}v(\xi),\quad \beta<0,\quad 0\le\alpha<1,$$

с учетом которых, из (12)–(14) находим функциональное соотношение между функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принесенное из области Ω^- на линию $y=0$:

$$\varphi(x)=\frac{c_1}{c_2}D_{0x}^{\alpha+\beta-1}\psi(\xi)+\frac{x^{1-\beta}}{c_2}D_{0x}^{\alpha}\xi^{\alpha+\beta-1}h\left(\frac{\xi}{2}\right),\quad |c|<\frac{m}{2},\tag{15}$$

$$\varphi(x) = c_3 D_{0x}^{\beta-1}\psi(\xi) + h\left(\frac{x}{2}\right), \quad c = \frac{m}{2}, \tag{16}$$

$$\varphi(0) = c_4 D_{0x}^{-1}\xi^{-\alpha}\psi(\xi) + h\left(\frac{x}{2}\right), \quad c = -\frac{m}{2}, \tag{17}$$

$$c_1 = \left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}} \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}, \qquad c_2 = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)},$$

$$c_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{-\beta}\Gamma(1-\beta), \qquad c_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{-\alpha}.$$

Из (8) и соотношений (15)–(17), исключая функцию $\varphi(x)$, относительно функции $\psi(x)$ получим следующие равенства

$$\psi''(x) + \frac{ac_1}{bc_2} D_{0x}^{1+\alpha+\beta}\psi(\xi) - \frac{1}{b}\psi(x) = f_\alpha(x), \quad |c| < \frac{m}{2}, \tag{18}$$

$$\psi''(x) + \frac{ac_1}{bc_2} D_{0x}^{1+\beta}\psi(\xi) - \frac{1}{b}\psi(x) = f_0(x), \quad c = \frac{m}{2}, \tag{19}$$

$$\psi(x) = -\frac{x^\alpha}{2c_4} h'\left(\frac{x}{2}\right), \quad c = -\frac{m}{2}, \tag{20}$$

где

$$f_\alpha(x) = -\frac{a}{bc_2} x^{1-\beta} D_{0x}^{\alpha} \xi^{\alpha+\beta-1} h\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Заметим, что (19) получается из (18) при $\alpha = 0$, поэтому найдем решение уравнения (18). Воспользовавшись результатами приведенными в работе [22], решение уравнения (18) запишем в виде:

$$\psi(x) = \int\limits_0^x f_\alpha(t) G_2^2\left(x-t; -\frac{ac_1}{bc_2}, \frac{1}{b}; 1-\alpha-\beta, 2\right) dt +$$

$$+ a_1 G_2^2\left(x; -\frac{ac_1}{bc_2}, \frac{1}{b}; 1-\alpha-\beta, 2\right) + a_2 G_2^1\left(x; -\frac{ac_1}{bc_2}, \frac{1}{b}; 1-\alpha-\beta, 2\right), \tag{21}$$

где

$$\lim_{x\to 0}\left[\psi'(x) + \frac{ac_1}{bc_2} D_{0x}^{\alpha+\beta}\psi(\xi)\right] = a_1, \quad \lim_{x\to 0}\psi(x) = a_2.$$

Здесь

$$G_n^k(x;\lambda_1,\ldots,\lambda_n;\gamma_1,\ldots,\gamma_n) = \int\limits_0^\infty e^{-t} S_n^k(x;\lambda_1 t,\ldots,\lambda_n t;\gamma_1,\ldots,\gamma_n) dt,$$

$$S_n^k(x;\lambda_1 t,\ldots,\lambda_n t;\gamma_1,\ldots,\gamma_n) = (h_1 * h_2 * \ldots * h_n)(x),$$

где

$$(\varphi * \psi)(x) = \int\limits_0^x \varphi(x-\xi)\psi(\xi) d\xi$$

– свертка Лапласа функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$,

$$h_i = h_i(x) = x^{k_i-1}\phi(\gamma_i,k_i;\lambda_i t x^{\gamma_i}),\quad i=\overline{1,n};\quad k=\sum_{i=1}^{n}k_i,\quad \gamma_i>0,\quad k_i>0,$$

$\phi(\gamma,k;z)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\dfrac{z^j}{j!\Gamma(j\gamma+k)}$ – есть функция Райта.

Из (21), с учетом условия согласования $\psi(0)=0$ и второго условия из (4), получаем, что $a_2=0$, а значение a_1 однозначно можно найти следующим образом

$$a_1=-\frac{1}{G_2^2\left(r;-\frac{ac_1}{bc_2},\frac{1}{b};1-\alpha-\beta,2\right)}\int\limits_0^r f_\alpha(t)G_2^2\left(r-t;-\frac{ac_1}{bc_2},\frac{1}{b};1-\alpha-\beta,2\right)dt,$$

если выполнено условие

$$G_2^2\left(r;-\frac{ac_1}{bc_2},\frac{1}{b};1-\alpha-\beta,2\right)\neq 0. \tag{22}$$

Тогда решения (18) и (19) запишутся соответственно в виде:

$$\psi(x)=\int\limits_0^x f_\alpha(t)G_2^2\left(x-t;-\frac{ac_1}{bc_2},\frac{1}{b};1-\alpha-\beta,2\right)dt-$$

$$-\frac{G_2^2\left(x;-\frac{ac_1}{bc_2},\frac{1}{b};1-\alpha-\beta,2\right)}{G_2^2\left(r;-\frac{ac_1}{bc_2},\frac{1}{b};1-\alpha-\beta,2\right)}\int\limits_0^r f_\alpha(t)G_2^2\left(r-t;-\frac{ac_1}{bc_2},\frac{1}{b};1-\alpha-\beta,2\right)dt,\quad |c|<\frac{m}{2}, \tag{23}$$

$$\psi(x)=\int\limits_0^x f_0(t)G_2^2\left(x-t;-\frac{a}{b}c_3,\frac{1}{b};1-\beta,2\right)dt-$$

$$-\frac{G_2^2\left(x;-\frac{a}{b}c_3,\frac{1}{b};1-\beta,2\right)}{G_2^2\left(r;-\frac{a}{b}c_3,\frac{1}{b};1-\beta,2\right)}\int\limits_0^r f_0(t)G_2^2\left(r-t;-\frac{a}{b}c_3,\frac{1}{b};1-\beta,2\right)dt,\quad c=\frac{m}{2}. \tag{24}$$

По найденному значению $\psi(x)$ соответствующими равенствами (20), (23) и (24) значение функции $\varphi(x)$ можно найти из фундаментальных соотношений (8) и (15), (16). После того как функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ найдены, решение задачи (4), (6) для уравнения (2) в области Ω^+ выписывается по формуле [23]:

$$u(x,y)=\int\limits_0^r G(x,y;\xi,0)[\varphi(\xi)-b\varphi''(\xi)]d\xi,$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{2}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+b\mu_n}e^{-\frac{a\mu_n}{1+b\mu_n}(y-\eta)}\sin(\sqrt{\mu_n}\xi)\sin(\sqrt{\mu_n}x),\quad \mu_n=\left(\frac{\pi n}{r}\right)^2.$$

А в области Ω^- решение задачи Коши (6), (7) для уравнения (3) выписывается по одной из формул (9)-(11).

Заключение

Результатом данной работы является следующая

Теорема. *Пусть выполнено условие* (22). *Тогда существует единственное регулярное решение задачи* (4)*,* (5) *для уравнения* (1).

Список литературы

[1] Hallaire M., "L'eau et la productions vegetable", *Institut National de la Recherche Agronomique*, **9** (1964).

[2] Смирнов М. М., *Вырождающиеся гиперболические уравнения*, Вышэйшая школа, Минск, 1977, 150 с. [Smirnov M. M., *Vyrozhdayushchiesya giperbolicheskie uravneniya*, Vyshehjshaya shkola, Minsk, 1977, 150 pp.]

[3] Showalter R.E., Ting T.W., "Pseudoparabolic partial differential equations", *SIAM J. Math. Anal.*, **1**:1 (1970), 1-26.

[4] Чудновский А.Ф., *Теплофизика почв*, Наука, М., 1976, 352 с. [CHudnovskij A.F., *Teplofizika pochv*, Nauka, M., 1976, 352 pp.]

[5] Нахушев А.М., "Об одном классе нагруженных уравнений в частных производных дробного порядка", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **14**:1 (2012), 51–57. [Nahushev A.M., "Ob odnom klasse nagruzhennyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh drobnogo poryadka", *Doklady Adygskoj (CHerkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk*, **14**:1 (2012), 51–57].

[6] Coleman B. D., Duffin R. J., Mizel V. J., "Instability, Uniqueness, and Nonexistence Theorems for the Equation on a Strip", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **19** (1965), 100–116.

[7] Colton D., "Pseudoparabolic Equations in One Space Variable", *Journal of Differ. Equations*, **12**:3 (1972), 559–565.

[8] Шхануков М. Х., "О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах", *Дифференциальные уравнения*, **18**:4 (1982), 689–699. [Shkhanukov M. Kh., "Some boundary value problems for a third-order equation that arise in the modeling of the filtration of a fluid in porous media", *Differential Equations*, **18**:4 (1982), 689–699].

[9] Yangarber V.A., "The mixed problem for a modified moisture-transfer equation", *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.*, **8**:1 (1967), 62–64.

[10] Kozhanov A. I., "On a Nonlocal Boundary Value Problem with Variable Coefficients for the Heat Equation and the Aller Equation", *Differential Equations*, **40**:6 (2004), 815–826.

[11] Макаова Р.Х., "Вторая краевая задача для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана–Лиувилля", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **17**:3 (2015), 35–38. [Makaova R.H., "Vtoraya kraevaya zadacha dlya obobshchennogo uravneniya Allera s drobnoj proizvodnoj Rimana–Liuvillya", *Doklady Adygskoj (CHerkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk*, **17**:3 (2015), 35–38].

[12] Нахушев А. М., *Уравнения математической биологии*, Высшая школа, М., 1995, 301 с. [Nahushev A. M., *Uravneniya matematicheskoj biologii*, Vysshaya shkola, M., 1995, 301 pp.]

[13] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с. [Nahushev A. M., *Drobnoe ischislenie i ego primenenie*, Fizmatlit, M., 2003, 272 pp.]

[14] Kal'menov T. Sh., "A criterion for the uniqueness of the solution of the Darboux problem for a certain degenerate hyperbolic equation", *Differential Equations*, **7**:1 (1971), 178–181.

[15] Kal'menov T. Sh., "The Darboux problem for a certain degenerate equation", *Differential Equations*, **10**:1 (1974), 59–68.

[16] Балкизов Ж.А., "Первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения", *Владикавказский математический журнал*, **18**:2 (2016), 19–30. [Balkizov Zh. A., "The first boundary value problem for a degenerate hyperbolic equation", *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, **18**:2 (2016), 19–30].

[17] Балкизов Ж.А., “Краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения”, *Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки.*, **1**:189 (2016), 5–10. [Balkizov ZH.A., “Kraevaya zadacha dlya vyrozhdayushchegosya vnutri oblasti giperbolicheskogo uravneniya”, *Izvestiya VUZov. Severo-Kavkazskij region. Seriya: Estestvennye nauki.*, **1**:189 (2016), 5–10].

[18] Репин О. А., *Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов.*, издательство Саратовского университета, Саратов, 1992, 161 с. [Repin O. A., *Kraevye zadachi so smeshcheniem dlya uravnenij giperbolicheskogo i smeshannogo tipov.*, izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, Saratov, 1992, 161 pp.]

[19] Нахушев А. М., *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*, Наука, М., 2006, 287 с. [Nahushev A. M., *Zadachi so smeshcheniem dlya uravnenij v chastnyh proizvodnyh*, Nauka, M., 2006, 287 pp.]

[20] Макаова Р.Х., “Краевая задача для гиперболического уравнения третьего порядка с вырождением порядка внутри области”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **21**:4 (2017), 651–664. [Makaova R. Kh., “A boundary value problem for a third order hyperbolic equation with degeneration of order inside the domain”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, **21**:4 (2017), 651–664].

[21] Макаова Р.Х., “Краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения третьего порядка с оператором Аллера в главной части”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, **149**:211 (2018), 64–71. [Makaova R.H., “Kraevaya zadacha dlya vyrozhdayushchegosya vnutri oblasti giperbolicheskogo uravneniya tret'ego poryadka s operatorom Allera v glavnoj chasti”, *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril. Temat. obz.*, **149**:211 (2018), 64–71].

[22] Псху А.В., “Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка”, *Математический сборник*, **202**:4 (2011), 111–122. [Pskhu A. V., “Initial-value problem for a linear ordinary differential equation of noninteger order”, *Mat. Sb.*, **202**:4 (2011), 111–122].

[23] Макаова Р.Х., “Первая краевая задача в нелокальной постановке для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана - Лиувилля”, *Вестник АГУ. Серия 4: Естественно-математические и технические науки*, **4**:211 (2017), 36–41. [Makaova R.H., “Pervaya kraevaya zadacha v nelokal'noj postanovke dlya obobshchennogo uravneniya Allera s drobnoj proizvodnoj Rimana - Liuvillya”, *Vestnik AGU. Seriya 4: Estestvenno-matematicheskie i tekhnicheskie nauki*, **4**:211 (2017), 36–41].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Hallaire M. L'eau et la productions vegetable // Institut National de la Recherche Agronomique. 1964. vol. 9.

[2] Смирнов М. М. Вырождающиеся гиперболические уравнения. Минск: Вышэйшая школа. 1977. 150 с.

[3] Showalter R.E., Ting T.W. Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM J. Math. Anal. 1970. vol. 1. №. 1. pp. 1-26.

[4] Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976. 352 с.

[5] Нахушев А.М. Об одном классе нагруженных уравнений в частных производных дробного порядка // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2012. Т. 14. №1. С. 51–57.

[6] Coleman B. D., Duffin R. J., Mizel V. J. Instability, Uniqueness, and Nonexistence Theorems for the Equation on a Strip // Arch. Rat. Mech. Anal. 1965. vol. 19. pp. 100–116.

[7] Colton D. Pseudoparabolic Equations in One Space Variable // Journal of Differ. Equations. 1972. vol. 12. №3. pp. 559–565.

[8] Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференциальные уравнения. 1982. vol. 18. № 4. С. 689–699.

[9] Yangarber V.A. The mixed problem for a modified moisture-transfer equation // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1967. vol. 8. №1. pp. 62–64.

[10] Kozhanov A. I. On a Nonlocal Boundary Value Problem with Variable Coefficients for the Heat Equation and the Aller Equation // Differential Equations. 2004. vol. 40. no. 6. pp. 815–826.
[11] Макаова Р.Х. Вторая краевая задача для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана–Лиувилля // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17. №3. С. 35–38.
[12] Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа. 1995. 301 с.
[13] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
[14] Kal'menov T. Sh. A criterion for the uniqueness of the solution of the Darboux problem for a certain degenerate hyperbolic equation // Differential Equations. 1971. vol. 7. no. 1. pp. 178–181.
[15] Kal'menov T. Sh. The Darboux problem for a certain degenerate equation // Differential Equations. 1974 vol. 10. no 1. pp. 59–68.
[16] Балкизов Ж.А. Первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Владикавказский математический журнал. 2016. Т. 18. №2. С. 19–30.
[17] Балкизов Ж.А. Краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2016. Т. 189. №1. С. 5–10.
[18] Репин О. А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Саратов: Издательство Саратовского университета, 1992. 161 с.
[19] Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
[20] Макаова Р.Х. Краевая задача для гиперболического уравнения третьего порядка с вырождением порядка внутри области // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21. №4. С. 651–664.
[21] Макаова Р.Х. Краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения третьего порядка с оператором Аллера в главной части // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2018. Т. 149. № 211. С. 64–71.
[22] Псху А.В. Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Математический сборник. 2011. Т. 202. №4. С. 111–122.
[23] Макаова Р.Х. Первая краевая задача в нелокальной постановке для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана - Лиувилля // Вестник АГУ. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. 2017. Т. 4. №211. С. 36–41.

Для цитирования: Макаова Р. Х. Задача Трикоми для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения третьего порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 3(23). C. 67-75. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-67-75

For citation: Makaova R. Kh. The Tricomi problem for a third order hyperbolic equation degenerating inside the domain, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018, **23**: 3, 67-75. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-67-75

Поступила в редакцию / Original article submitted: 08.06.2018