Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 3(23). C. 57-66. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-57-66

УДК 517.95

ЗАДАЧА В ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ ПО ВРЕМЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ *

Л. Л. Карашева

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А

E-mail: k.liana86@mail.ru

В данной работе для параболического уравнения высокого порядка с дробной производной по временной переменной в полуполосе построено представление решения и доказана единственность решения в классе функций быстрого роста.

Ключевые слова: дробная производная Римана-Лиувилля, параболическое уравнение, задача в полуполосе.

© Карашева Л. Л., 2018

MSC 35K25

A PROBLEM IN THE HALF-STRIP FOR HIGHER ORDER PARABOLIC EQUATION WITH TIME FRACTIONAL RIEMANN-LIOUVILLE DERIVATIVE

L. L. Karasheva

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89A, Russia

E-mail: k.liana86@mail.ru

We construct a representation of the solution for higher order parabolic equation with time fractional derivative in the half-strip and prove uniqueness theorem in the class of fast-growing functions.

Key words: Riemann-Liouville fractional derivative, higher order parabolic equation, problem in the half-strip.

© Karasheva L. L., 2018

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00462-А)

Введение

Рассмотрим в области $D=\{(x,t):0<x<\infty, 0<t<T\}$ уравнение

$$Lu(x,t)=D^{\alpha}_{0t}u(x,t)+(-1)^n\frac{\partial^{2n}u(x,t)}{\partial x^{2n}}=f(x,t), \tag{1}$$

где $n\in\mathbb{N}$, D^{α}_{0t} – оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегродифференцирования порядка α, $0<\alpha\leq 1$, определяемый соотношением [1, с. 9]

$$D^{\alpha}_{0x}\varphi(t)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int\limits_0^x\frac{\varphi(t)dt}{|x-t|^{\alpha+1}}, & \alpha<0,\\ \varphi(x), & \alpha=0,\\ \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial x^{[\alpha]+1}}D^{\alpha-[\alpha]-1}_{0x}\varphi(t), & \alpha>0,\end{cases}$$

где $[\alpha]$ – целая часть числа $\alpha\in\mathbb{R}$, которая удовлетворяет неравенству $[\alpha]\leq\alpha\leq[\alpha]+1$.

При $\alpha=1$ в работе [2] для уравнения (1) найдено решение задачи Коши в классе неограниченных функций. В работе [3] в виде несобственных интегралов найдено фундаментальное решение параболического уравнения порядка $2n$ и построена теория потенциалов. Уравнение (1) при $n=1$ широко исследовано. В частности для него в работе [4] решена задача Коши для уравнения диффузиии дробного порядка с регуляризованной дробной производной. В работе [5] построено фундаментальное решение, дано решение задачи Коши и доказана теорема единственности в классе функций, удовлетворяющих аналогу условия А.Н. Тихонова. С помощью интегральных преобразований в работе [6] найдено решение диффузионно-волнового уравнения четвертого порядка с регуляризованной дробной производной по времени. В полубесконечной области в работе [9] исследована краевая задача для однородного уравнения (1) при $n=1$. В работе [10] для уравнения диффузии дробного порядка с постоянными коэффициентами при младших членах решена задача в полуполосе. Наиболее полную библиографию можно найти в работах [5], [7], [8], [11]. В работе [12] построено фундаментальное решение для уравнения (1), исследованы его свойства и доказаны теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

В данной работе для уравнения (1) построено представление решения в полуполосе и доказана единственность решения в классе функций быстрого роста.

Постановка задачи

Регулярным решением уравнения (1) в области D назовем функцию $u=u(x,t)$ имеющую непрерывные производные по переменной x до порядка $2n$ такую, что $t^{1-\alpha}u(x,t)\in C(\overline{D})$, $\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}\in C(D\cup J)$, $J=\{(x,t):x=0, 0<t\leq T\}$, $(m=0,1,...,n-1)$, $\frac{\partial^{2n}u}{\partial x^{2n}}, D^{\alpha}_{0t}u\in C(D)$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x,t)\in D$.

Найти регулярное решение уравнения (1) в области D, удовлетворяющее начальному условию

$$\lim_{t\to 0}D^{\alpha-1}_{0t}u(x,t)=\tau(x), \qquad x>0 \tag{2}$$

и краевым условиям

$$\left.\frac{\partial^{2m}u(x,t)}{\partial x^{2m}}\right|_{x=0}=\varphi_m(t),\qquad 0<t\leq T,\quad m=0,1,2,...,n-1, \tag{3}$$

где $\tau(x)$ и $\varphi_m(t)$ - заданные функции.

В силу линейности задачи (1)-(3), решение можно представить в виде

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t), \tag{4}$$

где $u_1(x,t)$ является решением задачи Коши в области $\Omega=\{(x,t):-\infty<x<\infty,0<t<T\}$

$$Lu_1(x,t)=D_{0t}^{\alpha}u(x,t)+(-1)^n\frac{\partial^{2n}u(x,t)}{\partial x^{2n}}=\widetilde{f}(x,t), \tag{5}$$

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-1}u_1(x,t)=\widetilde{\tau}(x), \tag{6}$$

функции $\widetilde{f}(x,t)$ и $\widetilde{\tau}(x)$ можно определить так, что $\widetilde{f}(x,t)=f(x,t)$, $\widetilde{\tau}(x)=\tau(x)$ при $x>0$ и продолжаем при $x<0$ так, чтобы выполнялись условия существования решения задачи Коши [12, Теорема 1], в частности

$$\lim_{|x|\to\infty}\widetilde{\tau}(x)\exp\left(-k|x|^{\frac{2n}{2n-\alpha}}\right)=0,$$

$$\lim_{|x|\to\infty}t^{1-\alpha}\widetilde{f}(x,t)\exp\left(-k|x|^{\frac{2n}{2n-\alpha}}\right)=0.$$

Определив функцию $u_1(x,t)$ [12], находим, что функция $u_2(x,t)$ является решением однородного уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-1}u_2(x,t)=0,$$

$$\left.\frac{\partial^{2m}u_2(x,t)}{\partial x^{2m}}\right|_{x=0}=\varphi_m(t)-\left.\frac{\partial^{2m}u_1(x,t)}{\partial x^{2m}}\right|_{x=0},\qquad m=0,1,2,...,n-1.$$

Поэтому далее будем рассматривать следующую задачу: найти регулярное решение уравнения

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)+(-1)^n\frac{\partial^{2n}u(x,t)}{\partial x^{2n}}=0, \tag{7}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t)=0,\qquad x>0 \tag{8}$$

и краевым условиям

$$\left.\frac{\partial^{2m}u(x,t)}{\partial x^{2m}}\right|_{x=0}=\varphi_m(t),\qquad 0<t\leq T,\quad m=0,1,2,...,n-1. \tag{9}$$

Вспомогательные утверждения

Рассмотрим функцию [12]

$$\Gamma(x,t)=\frac{t^{\alpha-\frac{\alpha}{2n}-1}}{2n}\Theta_{n,1}\left(-|x|t^{-\frac{\alpha}{2n}};-\frac{\alpha}{2n},\alpha-\frac{\alpha}{2n}\right), \tag{10}$$

где

$$\Theta_{n,m}(z;\beta,\mu)=\sum_{k=0}^{n-1}e^{im\frac{(2k-n+1)\pi}{2n}}\phi\left(\beta,\mu;ze^{i\frac{(2k-n+1)\pi}{2n}}\right),\ \beta>-1,\mu\in\mathbb{C},$$

$\phi(\beta,\mu;z)=\sum\limits_{p=0}^{\infty}\frac{z^p}{p!\Gamma(\beta p+\mu)}$ – функция Райта [13]. Функция $\Gamma(x,t)$ является фундаментальным решением уравнения (1), для нее справедливы следующие выражения [12]:

$$\frac{d^q}{dz^q}\Theta_{n,m}(z;\beta,\mu)=\Theta_{n,m+q}(z;\beta,\mu+q\beta)\quad (q\in\mathbb{N},\ z\in\mathbb{C}); \tag{11}$$

$$\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\Theta_{n,m}(z;\beta,\mu)=(-1)^{n+1}\Theta_{n,m}(z;\beta,\mu+2n\beta); \tag{12}$$

$$D_{0y}^{\gamma}y^{\mu-1}\Theta_{n,m}\left(zy^{\beta};\beta,\mu\right)=y^{\mu-\gamma-1}\Theta_{n,m}\left(zy^{\beta};\beta,\mu-\gamma\right), \tag{13}$$

при $\beta\in\left(-\frac{1}{n},0\right)$, $\left(1-\frac{1+n\beta}{2n}\right)\pi<|\arg z|$, $-\pi<\arg z\leq\pi$, $\mu\in\mathbb{R}$, $\gamma\in\mathbb{R}$;

$$\left|\frac{\partial^q}{\partial x^q}D_{0t}^{\gamma}\Gamma(x,t)\right|\leq C|x|^{-\theta}t^{\alpha\left(1-\frac{1+q-\theta}{2n}\right)-\gamma-1}\exp\left(-\sigma|x|^{\frac{2n}{2n-\alpha}}t^{-\frac{\alpha}{2n-\alpha}}\right), \tag{14}$$

где $\sigma<\sigma_0=\left(1-\frac{\alpha}{2n}\right)\left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\frac{\alpha}{2n-\alpha}}\cos\frac{1-n}{2n-\alpha}\pi$, $0<\alpha<2$, $\gamma\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\theta\geq0$, C – некоторая положительная постоянная, не зависящая от x и t;

$$\frac{\partial^q}{\partial x^q}D_{0t}^{\gamma}\Gamma(0+,t)-\frac{\partial^q}{\partial x^q}D_{0t}^{\gamma}\Gamma(0-,t)=\begin{cases}0, & \text{при } q=\overline{0,2n-2},\\ \frac{(-1)^n t^{-\gamma-1}}{\Gamma(-\gamma)}, & \text{при } q=2n-1,\end{cases} \tag{15}$$

где $q\in\mathbb{N}$, $\gamma\in\mathbb{R}$.

Лемма. *Для любой функции $h(t)\in C(0,T)$ выполняется соотношение*

$$\lim_{x\to0+}\int_0^t\frac{\partial^q}{\partial x^q}\Gamma(x,t-\eta)h(\eta)d\eta=\begin{cases}0, & \text{при } q\neq(2n-1)\pmod{2n},\\ \frac{(-1)^n}{2}h(t), & \text{при } q=(2n-1)\pmod{2n}.\end{cases} \tag{16}$$

Доказательство. Из (14) при $q\neq(2n-1)\pmod{2n}$ и $t\neq\eta$ видно, что

$$\lim_{x\to0+}\int_0^t\frac{\partial^q}{\partial x^q}\Gamma(x,t-\eta)h(\eta)d\eta=0.$$

Далее при $q=(2n-1)\pmod{2n}$ рассмотрим равенство

$$\int_0^t\frac{\partial^q}{\partial x^q}\Gamma(x,t-\eta)h(\eta)d\eta=\int_0^t\frac{\partial^q}{\partial x^q}\Gamma(x,t-\eta)[h(\eta)-h(t)]d\eta+h(t)\int_0^t\frac{\partial^q}{\partial x^q}\Gamma(x,t-\eta)d\eta=$$

$$= \left(\int\limits_{0}^{t-\varepsilon} + \int\limits_{t-\varepsilon}^{t} \right) \frac{\partial^q}{\partial x^q}\Gamma(x,t-\eta)[h(\eta)-h(t)]d\eta + h(t)\int\limits_{0}^{t} \frac{\partial^q}{\partial x^q}\Gamma(x,t-\eta)d\eta.$$

Из (14) при $t \neq \eta$ следует, что

$$\lim_{x\to 0+}\left(\int\limits_{0}^{t-\varepsilon} + \int\limits_{t-\varepsilon}^{t} \right)\frac{\partial^q}{\partial x^q}\Gamma(x,t-\eta)[h(\eta)-h(t)]d\eta = \lim_{x\to 0+}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t} \frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^{2n-1}}\Gamma(x,t-\eta)[h(\eta)-h(t)]d\eta \leq$$

$$\leq \omega(\varepsilon)\lim_{x\to 0+}\int\limits_{t-\varepsilon}^{t} \frac{\partial^q}{\partial x^q}\Gamma(x,t-\eta)d\eta \leq C\omega(\varepsilon),$$

где

$$\omega(\varepsilon) = \sup_{\eta\in(t-\varepsilon,t)} |h(\eta)-h(t)|,\ \varepsilon > 0.$$

Таким образом, учитывая произвольность выбора ε и непрерывность функции $h(t)$, получим

$$\lim_{x\to 0+}\int\limits_{0}^{t} \frac{\partial^q}{\partial x^q}\Gamma(x,t-\eta)[h(\eta)-h(t)]d\eta = 0.$$

Тогда с учетом последнего равенства имеем

$$\lim_{x\to 0}\int\limits_{0}^{t} \frac{\partial^q}{\partial x^q}\Gamma(x,t-\eta)h(\eta)d\eta = h(t)\lim_{x\to 0+}\int\limits_{0}^{t} \frac{\partial^q}{\partial x^q}\Gamma(x,t-\eta)d\eta. \tag{17}$$

Так как

$$\lim_{x\to 0+}\int\limits_{0}^{t} \frac{\partial^q}{\partial x^q}\Gamma(x,t-\eta)d\eta = -\frac{1}{2n}\lim_{x\to 0+}\Theta_{n,2n}\left(-|x|t^{-\frac{\alpha}{2n}}; -\frac{\alpha}{2n}, 1\right) =$$

$$= -\frac{1}{2n}\lim_{x\to 0+}\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k-n+1)\pi}\phi\left(-\frac{\alpha}{2n}; 1; -|x|t^{-\frac{\alpha}{2n}}e^{i\frac{2k-n+1}{2n}\pi}\right) = \frac{(-1)^n}{2},$$

из (17) получим

$$\lim_{x\to 0+}\int\limits_{0}^{t} \frac{\partial^q}{\partial x^q}\Gamma(x,t-\eta)h(\eta)d\eta = \frac{(-1)^n}{2}h(t).$$

□

Теорема существования

Теорема 1. *Пусть функции* $t^{1-\alpha}\varphi_m(t) \in C(\bar{J})$, *тогда решение задачи* (7)-(9) *представимо в виде*

$$u(x,t) = 2(-1)^n\sum_{j=0}^{n-1}\int\limits_{0}^{t} \varphi_{n-1-j}(\eta)\frac{\partial^{2j+1}}{\partial x^{2j+1}}\Gamma(x,t-\eta)d\eta. \tag{18}$$

Доказательство. Проверим действительно ли функция (18) является решением задачи (7)-(9).

Непосредственной подстановкой функции (18) в уравнение (7) с учетом (12), (13) и (14) можно показать, что функция (18) удовлетворяет уравнению (7). Из (13) и (14) очевидно, что функция (18) удовлетворяет однородному условию (8). Используя формулу дифференцирования (11), неравенство (14) и лемму легко показать, что функция вида (18) удовлетворяет условиям (9). □

Теорема единственности

Теорема 2. *В классе функций, удовлетворяющих условию*

$$\lim_{x\to+\infty} t^{1-\alpha}u(x,t)\exp\left(-\rho|x|^{\frac{2n}{2n-\alpha}}\right)=0, \tag{19}$$

где ρ — положительная постоянная, существует не более одного решение задачи (7)-(9).

Доказательство. Пусть $h_r(x)$ функция вида

$$h_r(x)=\begin{cases}1, & x\le r,\\ 0, & x\ge r+1,\end{cases} \tag{20}$$

удовлетворяющая следующим свойствам

$$0\le h_r(x)\le 1, \quad \left|h_r^{(j)}(x)\right|\le \mathrm{const},$$

$$h_r^{(j)}(x)=0 \text{ при } x\notin(r,r+1), \tag{21}$$

где $j=\overline{1,2n}$, const - постоянная, не зависящая от x и r.

Рассмотрим функцию

$$v(x,t,\xi,\eta)=h_r(\xi)D_{t\eta}^{-\chi}G(x,t,\xi,\eta), \quad \chi>0,$$

где

$$G(x,t,\xi,\eta)=\left[\Gamma(x+\xi,t-\eta)-\Gamma(x-\xi,t-\eta)\right].$$

Заметим, что

$$\frac{\partial^{2k}G(x,t,\xi,\eta)}{\partial\xi^{2k}}\Big|_{\xi=0}=0, \qquad k=0,1,2,...,n-1. \tag{22}$$

Пусть $u(x,t)$ - решение однородной задачи (7)-(9), т.е

$$\frac{\partial^{2m}u(x,t)}{\partial x^{2m}}\Big|_{x=0}=0, \qquad m=0,1,2,...,n-1. \tag{23}$$

Домножим уравнение (7) на функцию $v(x,t,\xi,\eta)$ и проинтегрируем

$$\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^{x-\varepsilon}+\int\limits_{x+\varepsilon}^{\infty}\right)v(x,t,\xi,\eta)Lu(\xi,\eta)d\xi d\eta=$$

$$= \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^{x-\varepsilon} + \int\limits_{x+\varepsilon}^{\infty} \right) v(x,t,\xi,\eta) D_{0\eta}^{\alpha} u(\xi,\eta) d\xi d\eta +$$

$$+(-1)^n \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^{x-\varepsilon} + \int\limits_{x+\varepsilon}^{\infty} \right) v(x,t,\xi,\eta) \frac{\partial^{2n} u(\xi,\eta)}{\partial \xi^{2n}} d\xi d\eta.$$

Из формулы дробного интегрирования по частям [8, с.15]

$$\int\limits_a^b g(s) D_{as}^{\mu} h(s) ds = \int\limits_a^b h(s) D_{bs}^{\mu} g(s) ds \quad (\mu \leq 0),$$

и в силу (21),а также равенств

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial \xi^{2n}} h_r(\xi) D_{t\eta}^{-\chi} G(x,t,\xi,\eta) =$$

$$= \sum_{j=0}^{2n-1} \frac{(2n)!}{j!(2n-j)!} \frac{d^{(2n-j)}}{d\xi^{(2n-j)}} h_r(\xi) \frac{\partial^j}{\partial \xi^j} D_{t\eta}^{-\chi} G(x,t,\xi,\eta) + h_r(\xi) \frac{\partial^{2n}}{\partial \xi^{2n}} D_{t\eta}^{-\chi} G(x,t,\xi,\eta),$$

и (см. (22), (23))

$$\sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \frac{\partial^j \left(D_{t\eta}^{-\chi} G(x,t,\xi,\eta) \right)}{\partial \xi^j} \frac{\partial^{2n-1-j} u(\xi,\eta)}{\partial \xi^{2n-1-j}} \Big|_{\xi=0} = 0,$$

получим

$$0 = \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^{x-\varepsilon} + \int\limits_{x+\varepsilon}^{\infty} \right) v(x,t,\xi,\eta) \left[D_{0\eta}^{\alpha} + (-1)^n \frac{\partial^{2n}}{\partial \xi^{2n}} \right] u(\xi,\eta) d\xi d\eta =$$

$$= \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^{x-\varepsilon} + \int\limits_{x+\varepsilon}^{\infty} \right) u(\xi,\eta) h_r(\xi) \left[D_{t\eta}^{\alpha} + (-1)^n \frac{\partial^{2n}}{\partial \xi^{2n}} \right] D_{t\eta}^{-\chi} G(x,t,\xi,\eta) d\xi d\eta +$$

$$+(-1)^n \int\limits_0^t \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \frac{\partial^j \left(D_{t\eta}^{-\chi} G(x,t,\xi,\eta) \right)}{\partial \xi^j} \frac{\partial^{2n-1-j} u(\xi,\eta)}{\partial \xi^{2n-1-j}} \Big|_{x+\varepsilon}^{x-\varepsilon} d\eta +$$

$$+(-1)^n \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^{x-\varepsilon} + \int\limits_{x+\varepsilon}^{\infty} \right) u(\xi,\eta) \sum_{j=0}^{2n-1} \frac{(2n)!}{j!(2n-j)!} \frac{d^{(2n-j)}}{d\xi^{(2n-j)}} h_r(\xi) \frac{\partial^j}{\partial \xi^j} D_{t\eta}^{-\chi} G(x,t,\xi,\eta) d\xi d\eta.$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ в последнем равенстве и в силу того, что $u(x,t)$ является решением однородной задачи (7)-(9), и так как

$$\left(D_{t\eta}^{\alpha} + (-1)^n \frac{\partial^{2n}}{\partial \xi^{2n}} \right) D_{t\eta}^{-\gamma} G(x,t,\xi,\eta) = 0,$$

с учетом равенства (20) и (15) следует, что при $x < r$

$$D_{0t}^{-\chi} u(x,t) = (-1)^{n-1} \int\limits_0^t \int\limits_{r<\xi<r+1} u(\xi,\eta) \sum_{j=0}^{2n-1} \frac{(2n)!}{j!(2n-j)} \frac{d^{(2n-j)}}{d\xi^{(2n-j)}} h_r(x) \frac{\partial^j}{\partial \xi^j} G(x,t,\xi,\eta) d\xi d\eta.$$

Из вида функции $G(x,t,\xi,\eta)$ и (14) получим, что

$$|D_{0t}^{-\chi}u(x,t)| \leq C\int\limits_0^t \int\limits_{r<\xi<r+1} |u(\xi,\eta)| \exp\left(-\sigma\frac{(x-\xi)^{\frac{2n}{2n-\alpha}}}{(t-\eta)^{\frac{\alpha}{2n-\alpha}}}\right) d\xi d\eta, \quad (24)$$

где $\sigma < \sigma_0 = \left(1-\frac{\alpha}{2n}\right)\left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\frac{\alpha}{2n-\alpha}} \cos\frac{1-n}{2n-\alpha}\pi$. Из (19) следует, что при $t < t_0 = \left(\frac{\sigma_0}{\rho}\right)^{\frac{2n-\alpha}{\alpha}}$ интеграл в правой части (24) при $r \to \infty$ стремится к нулю. Таким образом $u(x,t) \equiv 0$ для $x \in (0,+\infty)$ и $t < t_0$.

Далее покажем, что $u(x,t) = 0$ для любого $t > 0$. Предположим, что $u(x,t) \not\equiv 0$ при $t > 0$. Обозначим через $t_1 = \inf\{t : u(x,t) \neq 0\}$. Таким образом, из доказанного следует, что $t_1 \geq t_0$. Рассмотрим функцию $p(x,t) = u(x,t_1+t)$. Учитывая сделанное предположение и определение t_1 для любого $\varepsilon > 0$ найдется значение x такое, что

$$p(x,\varepsilon) \neq 0. \quad (25)$$

Так как $u(x,t) \equiv 0$ при $0 < t < t_1$, то

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t) = D_{t_1t}^{\alpha}u(x,t) = D_{0t}^{\alpha}p(x,t).$$

Отсюда следует, что $p(x,t)$ является решением уравнения (7), удовлетворяет начальному условию

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}p(x,t) = 0, \; 0 < t < t_0$$

и условию (19). Таким образом из доказанного выше следует, что $p(x,t) \equiv 0$, по крайней мере для $0 < t < t_1$, а это противоречит (25). Следовательно предположение не верно и $u(x,t) \equiv 0$ для любого $t > 0$.

□

Список литературы

[1] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2003, 272 с. [Nahushev A. M., *Drobnoe ischislenie i ego primenenie*, FIZMATLIT, M., 2003, 272 pp.]

[2] Ладыженская О. А., “О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения”, *Математический сборник*, **27(69)**:2 (1950), 175–184. [Ladyzhenskaya O. A., “O edinstvennosti resheniya zadachi Koshi dlya linejnogo parabolicheskogo uravneniya”, *Matematicheskij sbornik*, **27(69)**:2 (1950), 175–184].

[3] Cattabriga L., “Problemi al contorno per equazioni paraboliche di ordine 2n”, *Rend. Semin. Mat. Univ. Padov*, **28** (1958), 376–401.

[4] Кочубей А. Н., “Диффузия дробного порядка”, *Дифференциальные уравнения*, **26**:4 (1990), 660–670. [Kochubej A. N., “Diffuziya drobnogo poryadka”, *Differencial’nye uravneniya*, **26**:4 (1990), 660–670].

[5] Псху А. В., “Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка”, *Изв. РАН Сер. матем.*, **73**:2 (2009), 141–182. [Pskhu A. V., “Fundamental’noe reshenie diffuzionno-volnovogo uravneniya drobnogo poryadka”, *Izv. RAN Ser. matem.*, **73**:2 (2009), 141–182].

[6] Agrawal O. P., “A general solution for a fourth-order fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain”, *Computers and Structures*, **79** (2001), 1497–1501.

[7] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. T. 204, Elsevier Science, 2006, 540 с.

[8] Псху А. В., *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005, 199 с. [Pskhu A. V., *Uravneniya v chastnyh proizvodnyh drobnogo poryadka*, Nauka, M., 2005, 199 pp.]

[9] Геккиева С. Х., "Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной в полубесконечной области", *Известия КБНЦ РАН*, 2002, № 1(8), 6–8. [Gekkieva S. H., "Kraevaya zadacha dlya obobshchennogo uravneniya perenosa s drobnoj proizvodnoj v polubeskonechnoj oblasti", *Izvestiya KBNC RAN*, 2002, № 1(8), 6–8].

[10] Мамчуев М. О., "Краевые задачи для уравнения диффузии дробного порядка с постоянными коэффициентами", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **7**:2 (2005), 37–44. [Mamchuev M. O., "Kraevye zadachi dlya uravneniya diffuzii drobnogo poryadka s postoyannymi koehfficientami", *Doklady Adygskoj (CHerkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk*, **7**:2 (2005), 37–44].

[11] Мамчуев М. О., *Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка*, Изд-во КБНЦ РАН, Нальчик, 2013, 200 с. [Mamchuev M. O., *Kraevye zadachi dlya uravnenij i sistem uravnenij s chastnymi proizvodnymi drobnogo poryadka*, Izd-vo KBNC RAN, Nal'chik, 2013, 200 pp.]

[12] Карашева Л. Л., "Задача Коши для параболического уравнения высокого четного порядка с дробной производной по временной переменной", *Сибирские электронные математические известия*, **15** (2018), 696–706. [Karasheva L. L., "Zadacha Koshi dlya parabolicheskogo uravneniya vysokogo chetnogo poryadka s drobnoj proizvodnoj po vremennoj peremennoj", *Sibirskie ehlektronnye matematicheskie izvestiya*, **15** (2018), 696–706].

[13] Wright E. M., "On the coefficients of power series having exponential singularities", *J. London Math. Soc.*, **8**:29 (1933), 71–79.

[14] Wright E. M., "The generalized Bessel function of order greater than one", *Quart. J. Math.*, **11** (1940), 36–48.

Список литературы (ГОСТ)

[1] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.

[2] Ладыженская О. А. О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения // Математический сборник. 1950. Т. 27(69). № 2. С. 175–184.

[3] Cattabriga L. Problemi al contorno per equazioni paraboliche di ordine 2n // Rend. Semin. Mat. Univ. Padov. 1958. vol. 28. pp. 376–401.

[4] Кочубей А. Н. Диффузия дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. №4. С. 660–670.

[5] Псху А. В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Изв. РАН Сер. матем. 2009. Т. 73. № 2. С. 141–182.

[6] Agrawal O. P. A general solution for a fourth-order fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain // Computers and Structures. 2001. vol. 79. pp. 1497–1501.

[7] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Vol. 204 : Elsevier Science, 2006. 540 p.

[8] Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

[9] Геккиева С. Х. Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной в полубесконечной области // Известия КБНЦ РАН. 2002. №1(8). С. 6–8.

[10] Мамчуев М. О. Краевые задачи для уравнения диффузии дробного порядка с постоянными коэффициентами // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2005. Т. 7. № 2. С. 37–44.

[11] Мамчуев М. О. Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2013. 200 с.

[12] Карашева Л. Л. Задача Коши для параболического уравнения высокого четного порядка с дробной производной по временной переменной // Сибирские электронные математические известия. 2018. № 15. С. 696–706.

[13] Wright E. M. On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc. 1933. vol. 8. no. 29. pp. 71–79.
[14] Wright E. M. The generalized Bessel function of order greater than one // Quart. J. Math. 1940. vol. 11. pp. 36–48.

Для цитирования: Карашева Л. Л. Задача в полуполосе для параболического уравнения высокого порядка с оператором Римана-Лиувилля по временной переменной // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2018. № 3(23). C. 57-66. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-57-66

For citation: Karasheva L. L. A problem in the half-strip for higher order parabolic equation with time fractional Riemann-Liouville derivative, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2018, **23**: 3, 57-66. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-57-66

Поступила в редакцию / Original article submitted: 08.06.2018