Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 3(23). C. 48-56. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-48-56

УДК 517.91

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ДИСКРЕТНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ *

Л. Х. Гадзова

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000,
г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А
E-mail: macaneeva@mail.ru

Для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределенного дифференцирования исследована начальная задача, получена формула Лагранжа. Решение найдено в явном виде и доказана теорема существования и единственности решения.

Ключевые слова: фундаментальное решение, задача Коши, оператор дробного дифференцирования, производная Капуто

MSC 34L99

CAUCHY PROBLEM FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION WITH DISCRETELY DISTRIBUTED FRACTIONAL DIFFERENTIATION OPERATOR

L. Kh. Gadzova

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Nalchik,
Shortanova st., 89A, Russia
E-mail: macaneeva@mail.ru

We consider an initial value problem for ordinary differential equation with discretely distributed fractional differentiation operator. We give the Lagrange formula, prove the existence and uniqueness theorem and construct an explicit form of solution.

Key words: fundamental solution, Cauchy problem, fractional differentiation operator, Caputo derivative,

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00462-А)

Введение

В интервале $0 < x < 1$ рассмотрим уравнение

$$Lu(x) \equiv \sum_{j=1}^{m} \beta_j \partial_{0x}^{\alpha_j} u(x) + \lambda u(x) = f(x), \tag{1}$$

где $\alpha_1 \in (n-1, n]$, $\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_m$, $\beta_1 > 0$, λ, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $\partial_{0x}^{\gamma} u(x)$ – дробная производная в смысле Капуто [1, с. 11]:

$$\partial_{0x}^{\gamma} u(x) = D_{0x}^{\gamma-n} u^{(n)}(x), \quad n-1 < \gamma \leq n, n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

D_{0x}^{γ}– оператор дробного интегро-дифференцирования порядка γ в смысле Римана-Лиувилля [1, с. 9] по переменной x, определяемый равенством:

$$D_{0x}^{\gamma} u(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\gamma)} \int\limits_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^{\gamma+1}} dt, & \gamma < 0, \\ u(x), & \gamma = 0, \\ \frac{d^n}{dx^n} D_{0x}^{\gamma-n} u(x), & n-1 < \gamma \leq n, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

На сегодня имеется достаточно обширный список работ, посвященных математической теории дробного исчисления [1]-[6]. Подробное описание применения дробного исчисления к различным областям науки и техники на современном этапе изложены в работах [1], [7]-[9]. В частности, дробная производная является удобным инструментом для описания состояния полимеров с резко изменяющимися свойствами в пространстве и во времени [**?**, с. 149], [8].

Одной из первых работ, посвященных обыкновенным дифференциальным уравнениям дробного порядка является работа [10]. К теории дробных дифференциальных уравнений относятся и работы [11]-[13]. Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка исследована в работе [14]. Отметим так же, что в работе [15] для обыкновенных непрерывных дифференциальных уравнений второго порядка получена формула Лагранжа и построены их фундаментальные решения, а в работе [16] исследованы начальная и краевая задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом. Для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дифференцирования Джрбашяна-Нерсесяна была решена начальная задача в работе [17]. Ранее автором для уравнения (1), при $\alpha_j \in]1,2[$, исследованы краевые задачи с условиями первого, второго и третьего рода для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого порядка, так же построена функция Грина краевой задачи с условиями третьего рода [18]-[20].

В данной работе исследована начальная задача для уравнения (1) при произвольных положительных α_j. Получена формула Лагранжа для дифференциального оператора L, доказана теорема существование и единственности решения, решение найдено в явном виде.

Постановка задачи

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x)$, имеющую абсолютно непрерывную производную $n-1$ порядка на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяющую уравнению (1) для всех $x \in]0,1[$.

Задача. *Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u^{(l)}(0) = u_l, \quad l = \overline{0, n-1}, \tag{3}$$

где u_l*– заданные действительные числа.*

Формула Лагранжа

Теорема 1. *Пусть* $u(x)$, $v(x)$ *– произвольные функции,* $u^{(n-1)} \in AC[0,1]$ *и* $D_{0x}^{\alpha_1 - n} v \in C^n[0,1]$, $v \in L[0,1]$. *Тогда справедлива формула*

$$(Lu * v)(x) = (u * L^* v)(x) + Q(x), \tag{4}$$

где $(g*h)(x) = \int\limits_0^x g(x-t)h(t)dt$*– свертка Лапласа функций* $g(x)$ *и* $h(x)$,

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \sum_{l=0}^{n-1} u^{(l)}(t) D_{xt}^{\alpha_j - l - 1} v(x-t) \Big|_{t=0}^{t=x},$$

$$L^* v(x) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j D_{0x}^{\alpha_j} v(x) + \lambda v(x). \tag{5}$$

Доказательство. Найдем свертку Лапласа функций $Lu(t)$ и $v(x)$, то есть

$$(Lu * v)(x) = \int\limits_0^x Lu(t) v(x-t) dt = \int\limits_0^x \left[\sum_{j=1}^{m} \beta_j \partial_{0t}^{\alpha_j} u(t) + \lambda u(t) \right] v(x-t) dt. \tag{6}$$

Пользуясь определением дробной производной Капуто (2) из равенства (6), имеем:

$$\int\limits_0^x \left[\sum_{j=1}^{m} \beta_j \partial_{0t}^{\alpha_j} u(t) + \lambda u(t) \right] v(x-t) dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \beta_j \int\limits_0^x D_{0t}^{\alpha_j - n} u^{(n)}(t) v(x-t) dt + \lambda \int\limits_0^x u(t) v(x-t) dt. \tag{7}$$

Далее, с учетом формулы дробного интегрирования по частям [21, с. 15]

$$\int\limits_a^b g(s) D_{as}^{\gamma} h(s) ds = \int\limits_a^b h(s) D_{bs}^{\gamma} g(s) ds, \quad (\gamma \le 0)$$

из соотношения (7) получаем следующее равенство:

$$(Lu * v)(x) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \int\limits_0^x u^{(n)}(t) D_{xt}^{\alpha_j - n} v(x-t) dt + \lambda \int\limits_0^x u(t) v(x-t) dt. \tag{8}$$

Проинтегрируем первое слагаемое в правой части равенства (8) n раз по частям. Подставив полученное выражение в соотношение (8)

$$\sum_{j=1}^{m}\beta_j\sum_{k=1}^{n}u^{(n-k)}(t)D_{xt}^{\alpha_j-n-1+k}v(x-t)\Big|_{t=0}^{t=x}+\int_0^x u(t)\left(\sum_{j=1}^{m}\beta_j D_{xt}^{\alpha_j}v(x-t)+\lambda v(x-t)\right)dt$$

придем к формуле (4). □

Дифференциальное выражение $L^*v(x)$, определенное формулой (5), назовем сопряженным к дифференциальному выражению $Lu(x)$, а соотношение (4) формулой Лагранжа для дифференциальных операторов L и L^* .

Фундаментальное решение

Введем в рассмотрение функцию

$$G_m^{\mu}(x)=G_m^{\mu}(x;\nu_1,...,\nu_m;\gamma_1,...,\gamma_m)\equiv\int_0^{\infty}e^{-t}S_m^{\mu}(x;\nu_1t,...,\nu_mt;\gamma_1,...,\gamma_m)dt, \tag{9}$$

где

$$\nu_1=-\frac{\lambda}{\beta_1},\quad \nu_j=-\frac{\beta_j}{\beta_1},\quad \gamma_1=\alpha_1,\quad \gamma_j=\alpha_1-\alpha_j,\quad j=\overline{2,m}$$

$$S_m^{\mu}(x;z_1,...,z_m;\gamma_1,...,\gamma_m)=(h_1*h_2*...*h_m)(x),$$

$$h_j=h_j(x)\equiv x^{\mu_j-1}\phi(\gamma_j,\mu_j;z_jx^{\gamma_j}),\quad \phi(\rho,\zeta;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\Gamma(\rho k+\zeta)}$$

- функция Райта [22];

$$x>0,\quad z_j\in\mathbb{R},\quad \gamma_j>0,\quad \mu_j>0,\quad \mu=\sum_{j=1}^{m}\mu_j.$$

Заметим, что функция $S_m^{\mu}(x;z_1,...,z_m;\gamma_1,...,\gamma_m)$ не зависит от распределения чисел $\mu_j>0$, а лишь от их суммы μ [14].

Для функции $G_m^{\mu}(x)$ справедливы равенства [14]:

$$G_m^{\mu}(x)=O(x^{\mu-1}),\quad \text{при}\quad x\to 0, \tag{10}$$

$$D_{0x}^{\nu}G_m^{\mu}(x)=G_m^{\mu-\nu}(x),\quad \text{если}\quad \mu>\nu, \tag{11}$$

$$G_m^{\mu}(x)-\sum_{j=1}^{m}\nu_jD_{0x}^{-\gamma_j}G_m^{\mu}(x)=\frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}. \tag{12}$$

Лемма 1. *Функция $G_m^{\alpha_1}(x)$ обладает следующими свойствами: является решением уравнения*

$$\sum_{j=1}^{m}\nu_jD_{0x}^{\alpha_j}G_m^{\alpha_1}(x)+\lambda G_m^{\alpha_1}(x)=0, \tag{13}$$

и удовлетворяет условиям

$$\lim_{x\to 0}\sum_{j=1}^{m}\nu_j D_{0x}^{\alpha_j-1}G_m^{\alpha_1}(x)=1, \tag{14}$$

$$\lim_{x\to 0}\sum_{j=1}^{m}\nu_j D_{0x}^{\alpha_j-l-1}G_m^{\alpha_1}(x)=0, \quad l=\overline{1,n-1}. \tag{15}$$

Доказательство. В силу формул (10)-(12) имеем

$$\lim_{x\to 0}\sum_{j=1}^{m}\nu_j D_{0x}^{\alpha_j-1}G_m^{\alpha_1}(x)=\lim_{x\to 0}\sum_{j=1}^{m}\nu_j G_m^{\alpha_1-\alpha_j+1}(x)=1.$$

В частности, из равенств (11) и (12) следует формула [20]

$$\sum_{j=1}^{m}\beta_j G_m^{\mu-\alpha_j}(x)+\lambda G_m^{\mu}(x)=\frac{\beta_1 x^{\mu-\alpha_1-1}}{\Gamma(\mu-\alpha_1)}, \quad \mu>\alpha_1. \tag{16}$$

С учетом последнего выражения и свойств (10)-(12) получаем:

$$\lim_{x\to 0}\sum_{j=1}^{m}\nu_j G_m^{\alpha_1-\alpha_j+l+1}(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\lambda}{\beta_1}G_m^{\alpha_1+l+1}(x)+\frac{x^l}{\Gamma(l+1)}\right)=0, \quad l=\overline{1,n-1}.$$

Из формулы (16) так же следует справедливость равенства (13). □

Функция $G_m^{\alpha_1}(x)$ удовлетворяющая свойствам (13)-(15) является фундаментальным решением уравнения (1).

Пользуясь формулой Лагранжа (4), заменяя $v(x)$ на функцию $G_m^{\alpha_1}(x)$, получаем общее представление решения в виде:

$$\left(u*L^*\frac{1}{\beta_1}G_m^{\alpha_1}\right)(x)+Q(x)=\left(\frac{1}{\beta_1}G_m^{\alpha_1}*f\right)(x)$$

и учитывая формулы (13)-(15) приходим к равенству

$$u(x)=\frac{1}{\beta_1}\int_0^x f(t)G_m^{\alpha_1}(x-t)dt+\sum_{l=0}^{n-1}u_l W_l(x), \tag{17}$$

где

$$W_l(x)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j}{\beta_1}G_m^{\alpha_1-\alpha_j+l+1}(x).$$

Воспользовавшись формулой (16) получаем, что

$$W_l(x)=\left[\frac{x^l}{\Gamma(l+1)}-\lambda G_m^{\alpha_1+l+1}(x)\right].$$

Основные результаты

Перед тем как перейти к основным результатам работы рассмотрим следующую вспомогательную лемму.

Лемма 2. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{x\to 0}\frac{d^k}{dx^k}W_l(x)=\begin{cases}1, \, l=k,\\ 0, \, l\neq k,\end{cases}\qquad l,k=0,1,...,n-1.$$

Доказательство. Если $l=k$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{d^k}{dx^k}W_l(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^{l-k}}{\Gamma(l-k+1)}-\lambda G_m^{\alpha_1+l-k+1}(x)\right]=1,\quad n-1<\alpha_1\leqslant n,\quad k=\overline{0,n-1}.$$

При $l\neq k$ получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{d^k}{dx^k}W_l(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^{l-k}}{\Gamma(l-k+1)}-\lambda G_m^{\alpha_1+l-k+1}(x)\right]=0,\quad \alpha_1+l-k+1>1.$$

□

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям*

$$x^{1-\mu}f(x)\in C]0,1[,\quad f(x)=D_{0x}^{\alpha_1-n}g(x),\quad g(x)\in L[0,1],\quad \mu>0.$$

Тогда единственное регулярное решение задачи (1), (3) существует и имеет вид (17).

Доказательство. Для упрощения вычислений примем следующие обозначения

$$u_f(x)=\frac{1}{\beta_1}\left(f*G_m^{\alpha_1}\right)(x)\,dt,\quad u_n(x)=\sum_{l=0}^{n-1}u_lW_l(x). \tag{18}$$

Тогда учитывая обозначения (18) выражение $Lu(x)$ запишется в виде

$$Lu(x)=Lu_f(x)+Lu_n(x).$$

Из равенств $Lu_f(x)=f(x)$, $Lu_n(x)=0$ будет следовать, что $Lu(x)=f(x)$. Покажем, что это действительно так. Имея в виду соотношение (10) и

$$\sum_{j=2}^{m}\nu_jG_m^{\alpha_j+\mu}(x)=G_m^{\mu}(x)-\nu_1G_m^{\alpha_1+\mu}(x)-\frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)},$$

(см. (12) и (16)), а также закон композиции операторов дробного интегро-дифференцирования [1, с. 87], будем иметь

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j}{\beta_1}\partial_{0x}^{\alpha_j}\int_0^x G_m^{\alpha_1}(x-t)f(t)dt=\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j}{\beta_1}D_{0x}^{\alpha_j-n}\frac{d^n}{dx^n}\left(f*G_m^{\alpha_1}\right)=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(g*\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j}{\beta_1}D_{0x}^{\alpha_j-n-1}G_m^{\alpha_1-\alpha_1+n-n}\right)=\frac{d}{dx}\left[D_{0x}^{\alpha_1-n}g*\left(\frac{-\lambda}{\beta_1}G_m^{\alpha_1+1}+1\right)\right]=$$

$$=\frac{d}{dx}\left[f*\left(\frac{-\lambda}{\beta_1}G_m^{\alpha_1+1}+1\right)\right]=\frac{-\lambda}{\beta_1}\int_0^x f(t)G_m^{\alpha_1}(x-t)dt+f(x).$$

Нетрудно заметить, что отсюда следует справедливость равенства $Lu_f(x)=f(x)$. Далее, воспользовавшись леммой 1 и 2, после простых преобразований получаем, что $Lu_n(x)=0$. □

Список литературы

[1] Нахушев А.М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с. [Nahushev A.M., *Drobnoe ischislenie i ego primenenie*, Fizmatlit, M., 2003, 272 pp.]

[2] Oldham K.B., Spanier J., "The fractional calculus", 1974.

[3] Джрбашян М.М., *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, Наука, М., 1966, 672 с. [Dzhrbashyan M.M., *Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funkcij v kompleksnoj oblasti*, Nauka, M., 1966, 672 pp.]

[4] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И., *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука, Минск, 1987, 688 с. [Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I., *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ih prilozheniya*, Nauka, Minsk, 1987, 688 pp.]

[5] Podlubny I., "Fractional Differential Equations", **198** (1999).

[6] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J., *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Math. Stud., Elsevier, Amsterdam, 2006, 204 с.

[7] Bagley R.L., Torvik P.J., "Fractional Calculus in the Transient Analysis of Viscoelastically Damped Structures", *AIAA Journal*, **23**:6 (1985), 918–925.

[8] Нахушев А.М., Тхакахов Р.Б., "О континуальных аналогах реологических уравнений состояния и логистическом законе изменения вязкоупругих свойств полимера", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **1**:2 (1995), 6–11. [Nahushev A.M., Thakahov R.B., "O kontinual'nyh analogah reologicheskih uravnenij sostoyaniya i logisticheskom zakone izmeneniya vyazkouprugih svojstv polimera", *Doklady Adygskoj (CHerkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk*, **1**:2 (1995), 6–11].

[9] Учайкин В.В., *Метод дробных производных*, Артишок, Ульяновск, 2008. [Uchajkin V.V., *Metod drobnyh proizvodnyh*, Artishok, Ul'yanovsk, 2008].

[10] Barrett J.H., "Differential equations of non-integer order", *Canadian J.Math.*, **6**:4 (1954), 529–541.

[11] Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б., "Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка", *Изв. АН Армянской ССР. Матем.*, **3**:1 (1968), 3–28. [Dzhrbashyan M.M., Nersesyan A.B., "Drobnye proizvodnye i zadacha Koshi dlya differencial'nyh uravnenij drobnogo poryadka", *Izv. AN Armyanskoj SSR. Matem.*, **3**:1 (1968), 3–28].

[12] Джрбашян М.М., "Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма-Лиувилля", *Изв. АН Армянской ССР.*, **5**:2 (1970), 71–96. [Dzhrbashyan M.M., "Kraevaya zadacha dlya differencial'nogo operatora drobnogo poryadka tipa SHturma-Liuvillya", *Izv. AN Armyanskoj SSR.*, **5**:2 (1970), 71–96].

[13] Ozturk I., "On the theory of fractional differential equation", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук.*, **3**:2 (1998), 35–39. [Ozturk I., "On the theory of fractional differential equation", *Doklady Adygskoj (CHerkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk.*, **3**:2 (1998), 35–39].

[14] Псху А.В., "Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка", *Мат. сборник.*, **202**:4 (2011), 111–122. [Pskhu A.V., "Nachal'naya zadacha dlya linejnogo obyknovennogo differencial'nogo uravneniya drobnogo poryadka", *Mat. sbornik.*, **202**:4 (2011), 111–122].

[15] Эфендиев Б.И., "Формула Лагранжа для обыкновенных непрерывных дифференциальных уравнений второго порядка", *Дифференциальные уравнения*, **53**:6 (2017), 741–749. [Efendiev B.I., "Formula Lagranzha dlya obyknovennyh nepreryvnyh differencial'nyh uravnenij vtorogo poryadka", *Differencial'nye uravneniya*, **53**:6 (2017), 741–749].

[16] Мажгихова М.Г., "Начальная и краевая задачи для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка", *Челябинский физико-математический журнал*, **3**:1 (2018), 27–37. [Mazhgihova M.G., "Nachal'naya i kraevaya zadachi dlya obyknovennogo differencial'nogo uravneniya drobnogo poryadka", *CHelyabinskij fiziko-matematicheskij zhurnal*, **3**:1 (2018), 27–37].

[17] Богатырева Ф.Т., "Начальная задачи для уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами", *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.*, **4-1(16)** (2016), 21–26. [Bogatyreva F.T., "Nachal'naya zadachi dlya uravneniya drobnogo poryadka s postoyannymi koehfficientami", *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.*, **4-1(16)** (2016), 21–26].

[18] Гадзова Л.Х., "Задачи Дирихле и Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами", *Дифференциальные уравнения*, **51**:12 (2015), 1580–1586. [Gadzova L.H., "Zadachi Dirihle i Nejmana dlya obyknovennogo differencial'nogo uravneniya drobnogo poryadka s postoyannymi koehfficientami", *Differencial'nye uravneniya*, **51**:12 (2015), 1580–1586].

[19] Гадзова Л.Х., "Задача Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка", *Владикавк. мат. журн.*, **18**:вып. 3 (2016), 22–30. [Gadzova L.H., "Zadacha Nejmana dlya obyknovennogo differencial'nogo uravneniya drobnogo poryadka", *Vladikavk. mat. zhurn.*, **18**:vyp. 3 (2016), 22–30].

[20] Гадзова Л.Х., "Краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования", *Дифференциальные уравнения*, **54**:2 (2018), 180–186. [Gadzova L.H., "Kraevaya zadacha dlya linejnogo obyknovennogo differencial'nogo uravneniya s operatorom drobnogo diskretno raspredelyonnogo differencirovaniya", *Differencial'nye uravneniya*, **54**:2 (2018), 180–186].

[21] Псху А.В., *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005. [Pskhu A.V., *Uravneniya v chastnyh proizvodnyh drobnogo poryadka*, Nauka, M., 2005].

[22] Wright E.M., "On the coefficients of power series having exponential singularities", *J.London Math. Soc.*, **8**:29 (1933), 71–79.

Список литературы (ГОСТ)

[1] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

[2] Oldham K.B., Spanier J. The fractional calculus. N.-Y.; L.: Acad. press, 1974.

[3] Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

[4] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука, 1987. 688 р.

[5] Podlubny I. Fractional Differential Equations: ACADEMIC PRESS, 1999. 198 p.

[6] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam. Vol. 204: Elsevier, North-Holland Math. Stud. 2006.

[7] Bagley R.L., Torvik P.J. Fractional Calculus in the Transient Analysis of Viscoelastically Damped Structures // AIAA Journal. 1985. vol. 23. no. 6. pp. 918–925.

[8] Нахушев А.М., Тхакахов Р.Б. О континуальных аналогах реологических уравнений состояния и логистическом законе изменения вязкоупругих свойств полимера // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 1995. Т. 1. № 2. С. 6–11.

[9] Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008.

[10] Barrett J.H. Differential equations of non-integer order // Canadian J.Math. 1954. vol. 6. no. 4. pp. 529–541.

[11] Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН Армянской ССР. Матем. 1968. Т. 3. №1. С. 3–28.

[12] Джрбашян М.М. Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма-Лиувилля // Изв. АН Армянской ССР. 1970. Т. 5. №. 2. С. 71–96.

[13] Ozturk I. On the theory of fractional differential equation // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 1998. Т. 3. № 2. С. 35–39.

[14] Псху А.В. Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Мат. сборник. 2011. Т. 202. № 4. С. 111–122.

[15] Эфендиев Б.И. Формула Лагранжа для обыкновенных непрерывных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. №6. С. 741–749.

[16] Мажгихова М.Г. Начальная и краевая задачи для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Челябинский физико-математический журнал. 2018. Т. 3. № 1. С. 27–37.
[17] Богатырева Ф.Т. Начальная задачи для уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. №4-1(16). С. 21–26.
[18] Гадзова Л.Х. Задачи Дирихле и Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 12. С. 1580–1586.
[19] Гадзова Л.Х. Задача Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Владикавк. мат. журн. 2016. Т. 18. вып. 3. С. 22–30.
[20] Гадзова Л.Х. Краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. №2. С. 180–186
[21] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005
[22] Wright E.M. On the coefficients of power series having exponential singularities // J.London Math. Soc. 1933. vol. 8. no. 29. pp. 71–79.

Для цитирования: Гадзова Л. Х. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределенного дифференцирования // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 3(23). С. 48-56. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-48-56

For citation: Gadzova L. Kh. Cauchy problem for ordinary differential equation with discretely distributed fractional differentiation operator, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018, **23**: 3, 48-56. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-48-56

Поступила в редакцию / Original article submitted: 08.06.2018