Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 3(23). С. 42-47. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-42-47

ДРОБНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

УДК 517.925.4

К ВОПРОСУ О РАЗРЕШИМОСТИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА*

Ф. Т. Богатырева

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000,
г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А
E-mail: fatima_bogatyreva@bk.ru

Исследован вопрос разрешимости начальной задачи для одного модельного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с операторами Джрбашяна-Нерсесяна. Показано, что размерность ядра рассматриваемого дифференциального оператора зависит от распределения параметров операторов Джрбашяна–Нерсесяна и может в том числе равняться нулю.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, задача Коши, дробная производная, оператор Джрбашяна-Нерсесяна.

FRACTIONAL CALCULUS AND ITS APPLICATION

MSC 34L99

TO THE QUESTION OF SOLVABILITY OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER

F. T. Bogatyreva

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Nalchik,
Shortanova st., 89A, Russia
E-mail: fatima_bogatyreva@bk.ru

We discussed the problem of solvability of initial value problem for one model ordinary differential equation of fractional order. It is shown that the dimension of the kernel depends on the distribution parameters of Dzhrbashyan-Nersesyan operators and also can be trivial.

Key words: ordinary differential equations, Cauchy problem, fractional derivative, Dzhrbashyan-Nersesyan operator.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00462-А)

1. Рассмотрим уравнение

$$Lu(x) \equiv D_{0x}^{\{\alpha,\beta\}}u(x) - \lambda D_{0x}^{\{\gamma,\delta\}}u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

где $D_{0x}^{\{\alpha,\beta\}}, D_{0x}^{\{\gamma,\delta\}}$ – операторы дробного дифференцирования Джрбашяна–Нерсесяна порядков $\mu = \alpha+\beta-1 > 0$, $\nu = \gamma+\delta-1 > 0$ соответственно; $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in (0,1]$. Будем считать, для определенности, что $\mu > \nu$, λ=const, $f(x)$ – заданная действительная функция.

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна-Нерсесяна ассоциированный с последовательностью $\{\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}$, порядка $\alpha = \sum\limits_{k=0}^{n}\gamma_k - 1 > 0$, $\gamma_k \in (0,1]$, определяется соотношением [1]

$$D_{0x}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}}u(x) = D_{0x}^{\gamma_n-1}D_{0x}^{\gamma_{n-1}}\ldots D_{0x}^{\gamma_1}D_{0x}^{\gamma_0}u(x), \tag{2}$$

где D_{0x}^{γ} – оператор дробного интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля [2]

$$D_{0x}^{\gamma}g(x) = \frac{1}{\Gamma(-\gamma)}\int\limits_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^{\gamma+1}}dt, \quad \gamma < 0;$$

$$D_{0x}^{\gamma}g(x) = g(x), \quad \gamma = 0;$$

$$D_{0x}^{\gamma}g(x) = \frac{d^n}{dx^n}D_{0x}^{\gamma-n}g(x), \quad n-1 < \gamma \le n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Известно, что число начальных условий для корректной постановки начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений целого порядка, а так же уравнений содержащих операторы дробного дифференцирования Римана-Лиувилля и Капуто, как правило связано с порядком уравнения. В случае обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка с операторами Джрбашяна-Нерсесяна это правило нарушается.

В данной работе исследован вопрос разрешимости начальной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения (1). Показано, что размерность ядра рассматриваемого дифференциального оператора зависит от распределения параметров $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, и может в том числе равняться нулю.

2. *Регулярным решением* уравнения (1) назовем функцию $u = u(x)$, такую что $D_{0x}^{\sigma-1}u(x) \in AC[0,1], \sigma = \max\{\alpha,\gamma\}$ и удовлетворяет уравнению (1) в интервале]0,1[.

Обозначим

$$v(z) = z^{\mu-1}E_{\mu-\nu,\mu}(\lambda z^{\mu-\nu}),$$

где $E_{\alpha,\mu}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k/\Gamma(\alpha k+\mu)$ – функция Миттаг–Леффлера [3, с. 117].

Лемма. *Пусть функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = D_{0x}^{-\varepsilon}g(x), g(x) \in L[0,1]$, $\varepsilon > \sigma-\mu$. Тогда функция*

$$u_f(x) = \int\limits_0^x f(t)v(x-t)dt$$

– регулярное в интервале]0,1[решение уравнения (1) и справедливо равенство

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\sigma-1}u_f(x) = 0. \tag{3}$$

Доказательство. В силу определения оператора Джрбашяна–Нерсесяна и учитывая формулу дробного интегро-дифференцирования функции Миттаг–Леффлера [4, с. 15]

$$D_{ax}^{\alpha}|x-a|^{\mu-1}E_{1/\beta}(\lambda|x-a|^{\beta};\mu)=|x-a|^{\mu-\alpha-1}E_{1/\beta}(\lambda|x-a|^{\beta};\mu-\alpha), \tag{4}$$

получим

$$D_{0x}^{\{\alpha,\beta\}}u_f(x)=D_{0x}^{\beta-1}D_{0x}^{\alpha}f(x)*x^{\mu-1}E_{\mu-\nu,\mu}(\lambda x^{\mu-\nu})=D_{0x}^{\beta-1}D_{0x}^{\alpha-\varepsilon}g(x)*x^{\mu-1}E_{\mu-\nu,\mu}(\lambda x^{\mu-\nu})=$$

$$=D_{0x}^{\beta-1}g(x)*x^{\beta+\varepsilon-2}E_{\mu-\nu,\beta+\varepsilon-1}(\lambda x^{\mu-\nu})=f(x)*x^{\varepsilon-1}E_{\mu-\nu,\varepsilon}(\lambda x^{\mu-\nu}), \tag{5}$$

где $f(x)*g(x)=\int\limits_0^x f(t)g(x-t)dt$ – свертка Лапласа функций $f(x)$ и $g(x)$.

Из равенства (5), применяя формулу автотрансформации функции Миттаг-Леффлера [4, с. 13]

$$E_{\alpha,\mu}(z)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}+zE_{\alpha,\mu+\alpha}(z), \tag{6}$$

окончательно имеем, что

$$D_{0x}^{\{\alpha,\beta\}}u_f(x)=f(x)+\lambda f(x)*x^{\mu-\nu-1}E_{\mu-\nu,\mu-\nu}(\lambda x^{\mu-\nu}). \tag{7}$$

Рассуждая аналогично получим равенство

$$D_{0x}^{\{\gamma,\delta\}}u_f(x)=f(x)*x^{\mu-\nu-1}E_{\mu-\nu,\mu-\nu}(\lambda x^{\mu-\nu}). \tag{8}$$

Подставляя полученные выражения (7) и (8) в уравнение (1) получаем верное тождество.

Справедливость равенства (3) очевидно следует из условия леммы и формулы (4). □

3. В силу линейности уравнения (1) решение будем искать в виде

$$u(x)=u_f(x)+u_0(x), \tag{9}$$

где $u_0(x)$ – решение однородного уравнения (1)

$$D_{0x}^{\{\alpha,\beta\}}u_0(x)-\lambda D_{0x}^{\{\gamma,\delta\}}u_0(x)=0,\quad 0<x<1. \tag{10}$$

Теорема. *Любое регулярное решение уравнения* (10) *будет иметь вид*
1) при $\alpha>\gamma$

$$u_0(x)=x^{\alpha-1}E_{\mu-\nu,\alpha}(\lambda x^{\mu-\nu})\left[D_{0x}^{\alpha-1}u_0(x)\right]_{x=0}; \tag{11}$$

2) при $\alpha=\gamma$

$$u_0(x)=\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[D_{0x}^{\alpha-1}u_0(x)\right]_{x=0}; \tag{12}$$

3) при $\alpha<\gamma$

$$u_0(x)=0. \tag{13}$$

Доказательство. Непосредственной подстановкой нетрудно заметить, что функция $v(x-t)$ является решением уравнения

$$L^{*}v(x-t) \equiv D_{xt}^{\{\beta,\alpha\}}v(x-t) - \lambda D_{xt}^{\{\delta,\gamma\}}v(x-t) = 1, \tag{14}$$

и удовлетворяет условию

$$\left[D_{xt}^{\varsigma-1}v(x-t)\right]_{t=x} = 0, \ \varsigma = \max\{\beta,\delta\}. \tag{15}$$

Домножим уравнение (10) на функцию $v(x-t)$ и проинтегрируем от 0 до x по переменной t, предварительно поменяв переменную x на t. Пользуясь формулой дробного интегрирования по частям [2, с. 34]

$$\int\limits_a^b u_0(x)D_{ax}^{\alpha}v(x)dx = \int\limits_a^b v(x)D_{bx}^{\alpha}u_0(x)dx, \ \alpha \le 0,$$

получим

$$\int\limits_0^x v(x-t)Lu(t)dt = \int\limits_0^x u(t)L^{*}v(x-t)dt - D_{0x}^{\beta-1}v(x)\left[D_{0t}^{\alpha-1}u_0(t)\right]_{t=0} +$$

$$+\lambda D_{0x}^{\delta-1}v(x)\left[D_{0t}^{\gamma-1}u_0(t)\right]_{t=0} + \left[D_{xt}^{\beta-1}v(x-t)\right]_{t=x}D_{0x}^{\alpha-1}u_0(x) -$$

$$-\lambda\left[D_{xt}^{\delta-1}v(x-t)\right]_{t=x}D_{0x}^{\gamma-1}u_0(x). \tag{16}$$

С учетом соотношений (14) и (15) из (16) будем иметь

$$\int\limits_0^x u(t)dt = D_{0x}^{\beta-1}v(x)\left[D_{0x}^{\alpha-1}u_0(x)\right]_{x=0} - \lambda D_{0x}^{\delta-1}v(x)\left[D_{0x}^{\gamma-1}u_0(x)\right]_{x=0}. \tag{17}$$

Дифференцируя равенство (17) по переменной x получаем решение уравнения (10)

$$u_0(x) = Ax^{\alpha-1}E_{\mu-\nu,\alpha}(\lambda x^{\mu-\nu}) - \lambda Bx^{\mu-\delta}E_{\mu-\nu,\mu-\delta+1}(\lambda x^{\mu-\nu}), \tag{18}$$

где $A = \left[D_{0x}^{\alpha-1}u_0(x)\right]_{x=0}$, $B = \left[D_{0x}^{\gamma-1}u_0(x)\right]_{x=0}$.

1) Рассмотрим случай $\alpha > \gamma$. Пусть $u_0(x)$ – регулярное решение уравнения (1), тогда из представления $D_{0x}^{\gamma-1}u_0(x) = D_{0x}^{\gamma-\alpha}D_{0x}^{\alpha-1}u_0(x)$ следует, что $\lim\limits_{x\to 0}D_{0x}^{\gamma-1}u_0(x) = 0$. С учетом этого из соотношения (18) приходим к равенству (11).

2) В случае $\alpha = \gamma$ из равенства (18) получаем

$$u_0(x) = A\left[x^{\alpha-1}E_{\beta-\delta,\alpha}(\lambda x^{\beta-\delta}) - \lambda x^{\mu-\delta}E_{\beta-\delta,\mu-\delta+1}(\lambda x^{\beta-\delta})\right]. \tag{19}$$

Из формулы автотрансформации функции Миттаг-Леффлера (6) следует, что

$$x^{\alpha-1}E_{\beta-\delta,\alpha}(\lambda x^{\beta-\delta}) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \lambda x^{\mu-\delta}E_{\beta-\delta,\mu-\delta+1}(\lambda x^{\beta-\delta}).$$

С учетом чего из формулы (19) приходим к соотношению (12).

3) В силу определения оператора Джрбашяна–Нерсесяна запишем уравнение (10) в виде

$$D_{0x}^{\beta-1}D_{0x}^{\alpha}u_0(x)-\lambda D_{0x}^{\delta-1}D_{0x}^{\gamma}u_0(x)=0$$

и подействуем на него оператором $D_{0x}^{1-\beta}$, получим

$$D_{0x}^{\alpha}u_0(x)-\lambda D_{0x}^{\delta-\beta}D_{0x}^{\gamma}u_0(x)=0. \quad (20)$$

Воспользовавшись обобщенной формулой Ньютона-Лейбница [2, с. 11] и подействовав оператором D_{0x}^{-1} из равенства (20) имеем

$$D_{0x}^{\alpha-1}u_0(x)-\lambda D_{0x}^{\nu-\beta}u_0(x)+\lambda\frac{x^{\beta-\delta}}{\Gamma(\beta-\delta+1)}B=C, \quad (21)$$

C – постоянная интегрирования. Устремив в соотношении (21) x к нулю, с учетом того, что $\lim\limits_{x\to 0}D_{0x}^{\alpha-\gamma}D_{0x}^{\gamma-1}u_0(x)=0,\ \nu-\beta<0,\ \beta>\delta$, получим, что левая часть равенства (21) равна нулю, то есть

$$D_{0x}^{\alpha-1}u_0(x)-\lambda D_{0x}^{\nu-\beta}u_0(x)+\lambda\frac{x^{\beta-\delta}}{\Gamma(\beta-\delta+1)}B=0. \quad (22)$$

Далее подействовав на равенство (22) композицией операторов $D_{0x}^{\gamma-1}D_{0x}^{1-\alpha}$ и переходя к пределу при x стремящемся к нулю, получим

$$B-\lambda\lim_{x\to 0}D_{0x}^{\nu+\gamma-\beta}u_0(x)+\lambda B\lim_{x\to 0}\frac{x^{\mu-\nu}}{\Gamma(\mu-\nu+1)}=0,$$

отсюда следует, что $B=0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}D_{0x}^{\nu+\gamma-\beta}u_0(x)=0$, поскольку $\nu+\gamma-\beta<0$, и $\lim\limits_{x\to 0}x^{\mu-\nu}=0$. Из последнего вытекает справедливость равенства (13). □

4. Таким образом, из доказанной теоремы и равенства (9), следует что всякое решение уравнения (1) представимо в виде

$$u(x)=\int\limits_0^x f(t)v(x-t)dt+u_0(x),$$

где $u_0(x)$, в зависимости от соотношения между параметрами α и γ, определяется одним из равенств (11)–(13). В частности в случае $\alpha<\gamma$ ядро оператора L пусто и однозначное обращение уравнения $Lu(x)=f(x)$ не требует дополнительных условий.

Список литературы

[1] Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б., “Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка”, *Изв. АН АрмССР. Матем.*, **3**:1 (1968), 3-28. [Dzhrbashyan M.M., Nersesyan A.B., “Drobnye proizvodnye i zadacha Koshi dlya differencial’nyh uravnenij drobnogo poryadka”, *Izv. AN ArmSSR. Matem.*, **3**:1 (1968), 3-28].

[2] Нахушев А.М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с. [Nakhushev A.M., *Drobnoe ischislenie i ego primenenie*, Fizmatlit, M., 2003, 272 pp.]

[3] Джрбашян М.М., *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, Наука, М., 1966, 672 с. [Dzhrbashyan M.M., *Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funkcij v kompleksnoj oblasti*, Nauka, M., 1966, 672 pp.]

[4] Псху А.В., *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005, 199 с. [Pskhu A.V., *Uravneniya v chastnyh proizvodnyh drobnogo poryadka*, Nauka, M., 2005, 199 pp.]

Список литературы (ГОСТ)

[1] Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Матем. 1968. Т. 3. № 1. С. 3-28.

[2] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит. 2003. 272 с.

[3] Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

[4] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

Для цитирования: Богатырева Ф.Т. К вопросу о разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2018. № 3(23). C. 42-47. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-42-47

For citation: Bogatyreva F.T.. To the question of solvability of ordinary differential equations of fractional order, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2018, **23**: 3, 42-47. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-42-47

Поступила в редакцию / Original article submitted: 08.06.2018