Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 3(23). C. 36-41. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-36-41

УДК 517.956.6

О РЕШЕНИИ АНАЛОГА ЗАДАЧИ А. А. ДЕЗИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ФУНКЦИИ ГРИНА

Р. А. Киржинов

Институт прикладной матетматики и информатики КБНЦ РАН, 360000, Кабардино—Балкарская республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, д. 89 А
E-mail: Kirzhinov.R@mail.ru

Для неоднородного уравнения параболо—гиперболического типа второго порядка рассматривается аналог задачи А. А. Дезина. В работе доказана единственность решения исследуемой задачи. Представление решения выписано методом функции Грина.

Ключевые слова: аналог задачи Дезина, уравнение параболо—гиперболического типа, нелокальные краевые условия.

MSC 35M10

ON THE SOLVING OF THE A. A. DEZIN PROBLEM ANALOGUE FOR A SECOND–ORDER MIXED–TYPE EQUATION BY THE GREEN'S FUNCTION METHOD

R. A. Kirzhinov

Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin–Balkar Scientific Centre of RAS, 360000, Kabardino–Balkar Republic, Nalchik, Shortanova st., 89 A, Russia
E-mail: Kirzhinov.R@mail.ru

In this paper the A. A. Dezin problem analogue is considered for inhomogeneous parabolic–hyperbolic type equation of the second order. We proved the solution uniqueness of the solution to the problem under investigation. The solution representation is written out by the Green's function method.

Key words: Dezin problem analogue, parabolic–hyperbolic type equation, nonlocal boundary conditions.

Введение

В 1963 г. А. А. Дезин сформулировал задачу [1] для уравнения с оператором Лаврентьева—Бицадзе

$$\left(\operatorname{sgn} t \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,t) = f(x,t),$$

в прямоугольной области $\{(x,t) : 0 < x < 2\pi,\ |t| < 1\}$ с условием 2π-периодичности по x, а по переменной t задаются: условия сопряжения

$$u(x,+0) = u(x,-0), \quad u_t(x,+0) = u_t(x,-0), \qquad 0 < x < 2\pi,$$

локальное условие $u(x,1) = 0$ и нелокальное условие

$$u(x,0) + \lambda u_t(x,-1) = 0, \qquad 0 < x < 2\pi,$$

где $\lambda = \mathrm{const}$.

В своей монографии А. М. Нахушев [2, с. 18] приводит формулировки нелокальных краевых условий по терминологии А. А. Дезина [3].

Упомянутая задача оставалась долгие годы не исследованной. Лишь в 2009 г. появилась работа З. А. Нахушевой [4], посвящённая задаче А. А. Дезина для уравнения Лаврентьева—Бицадзе

$$(\operatorname{sgn} y)\, u_{yy}(x,y) + u_{xx}(x,y) = f(x,y) H(y),$$

где $H(y)$ — функция Хевисайда. В специальной прямоугольной области доказаны принцип экстремума, теоремы единственности и существования решения нелокальной задачи, сформулированной А. А. Дезиным.

Дальнейшие исследования задачи Дезина для уравнения с оператором Лаврентьева—Бицадзе продолжились в работах К. Б. Сабитова, В. А. Гущиной (Новиковой) [5, 6, 7].

Аналог задачи А. А. Дезина для уравнения смешанного параболо—гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^{1+H(-y)} u(x,y)}{\partial y^{1+H(-y)}} = f(x,y) H(y)$$

был сформулирован в монографии З. А. Нахушевой [8, с. 174]. Доказана однозначная разрешимость аналога задачи А. А. Дезина в области $\{(x,y) : 0 < x < r,\ -r < y < \beta\}$. Там же исследован вопрос о спектре однородной задачи.

В работах [9, 10] различными методами исследован аналог задачи А. А. Дезина для неоднородного уравнения смешанного параболо—гиперболического типа второго порядка в прямоугольной области $\{(x,y) : 0 < x < r,\ -\alpha < y < \beta\}$, где r, $\alpha = n_0 r$, β — вещественные положительные числа, n_0 — фиксированное натуральное число. Доказана единственность и выписано представление решения исследуемой задачи.

В данной работе выписано представление решение аналога задачи А. А. Дезина для неоднородного уравнения смешанного параболо—гиперболического типа второго порядка с использованием метода функцию Грина. Из представления следует единственность найденного решения задачи.

Постановка задачи

Пусть $\Omega = \{(x,y)\colon 0 < x < r, -\alpha < y < \beta\}$ — область евклидовой плоскости точек (x,y), $\Omega^+ = \Omega \cap \{y\colon y > 0\}$, $\Omega^- = \Omega \cap \{y\colon y < 0\}$, где r, $\alpha = n_0 r$, β — вещественные положительные числа, n_0 — фиксированное натуральное число.

В области Ω рассмотрим уравнение

$$f = Lu \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial y}, & y > 0, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $u = u(x,y)$ — пока неизвестная функция, $f = f(x,y)$ — заданная, непрерывная в замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω вещественная функция.

Регулярным решением уравнения (1) будем называть функцию $u = u(x,y)$, которая обладает непрерывными производными, входящими в это уравнение, и при подстановке обращает его в тождество.

Задача 1. *Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения* (1) *из класса $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ обладающее непрерывными частными производными по x до второго порядка включительно на интервале $\{(x,y)\colon 0 < x < r, y = 0\}$, удовлетворяющее условиям*

$$u(x,y)|_{x=0} = u(x,y)|_{x=r}, \quad \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right|_{x=r}, \quad -\alpha < y < \beta, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{y=-\alpha} = \lambda\, u(x,y)|_{y=0}, \quad 0 < x < r. \tag{3}$$

Определение функции Грина и представление решения задачи

Пусть

$$u(x,y)|_{y=0} = \tau(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant r. \tag{4}$$

Введём в рассмотрение функцию $G = G(\xi,\eta;x,y)$, представимую в виде

$$G(\xi,\eta;x,y) = \begin{cases} G_1 = G_1(\xi,\eta;x,y), & -\alpha \leqslant y \leqslant \eta < 0, \\ G_2 = G_2(\xi,\eta;x,y), & -\alpha < \eta \leqslant y \leqslant 0, \\ G_3 = G_3(\xi,\eta;x,y), & 0 \leqslant y \leqslant \eta \leqslant \beta, \end{cases} \tag{5}$$

где (ξ,η) — произвольная фиксированная точка замыкания $\overline{\Omega}$ области Ω, обладающую свойствами:

$$L^* G \equiv 0, \tag{6}$$

$$G|_{x=0} = G|_{x=r}, \quad \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=r}, \quad -\alpha < y < \eta, \tag{7}$$

$$G_2|_{y=0} \equiv 0, \quad \left.\frac{\partial G_1}{\partial y}\right|_{y=-\alpha} \equiv 0, \quad 0 < x < r, \tag{8}$$

$$(G_2-G_1)|_{y=\eta}\equiv 0, \quad \left(\frac{\partial G_2}{\partial y}-\frac{\partial G_1}{\partial y}\right)\bigg|_{y=\eta}=\delta\,(x-\xi)\,, \qquad 0<x<r, \tag{9}$$

$$G_3|_{y=\eta}=\delta\,(x-\xi)\,, \quad 0<x<r, \tag{10}$$

где

$$L^*\equiv\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial y}, & y>0,\\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}, & y<0\end{cases}$$

— оператор, сопряжённый по Лагранжу с оператором L, $\delta\,(x)$ — δ-функция Дирака.

Имеет место тождество

$$GLu-uL^*G=\frac{\partial}{\partial x}\left(G\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial G}{\partial x}\right)-\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial y}\,(uG)\,, & y>0,\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(G\dfrac{\partial u}{\partial y}-u\dfrac{\partial G}{\partial y}\right), & y<0.\end{cases}$$

Проинтегрировав данное тождество по области $\Omega_\eta=\{(x,y):0<x<r,\ -\alpha<y<\eta\}$, где $\eta\in(0,\beta]$, получим

$$\iint\limits_{\Omega_\eta}(GLu-uL^*G)\,dx\,dy=(G,Lu)_0-(u,L^*G)_0\,,$$

где $(\cdot,\cdot)_0$ — скалярное произведение в пространстве $L_2\,(\Omega_\eta)$.

Применив формулу Грина и вычисляя последний интеграл с учётом условий задачи 1 и (4)–(10), находим представление решение задачи 1 в следующем виде

$$u\,(x,y)=\int\limits_0^r\tau\,(\xi)\,M\,[G\,(x,y;\xi,\eta)]\,d\xi-\int\limits_{-\alpha}^{y}d\eta\int\limits_0^r f\,(\xi,\eta)\,G\,(x,y;\xi,\eta)\,d\xi, \tag{11}$$

где

$$M\,[G\,(x,y;\xi,\eta)]=\begin{cases}\dfrac{\partial G\,(x,y;\xi,\eta)}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=0}+\lambda\,G\,(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=-\alpha}\,, & y\leqslant 0,\\ G\,(x,y;\xi,\eta)|_{\eta=0}\,, & y\geqslant 0,\end{cases}$$

$$\tau\,(x)=\int\limits_0^r\left(f\,(s,0)-\int\limits_{-\alpha}^0 d\eta\int\limits_0^r f\,(\xi,\eta)\,\frac{\partial G\,(s,y;\xi,\eta)}{\partial y}\bigg|_{y=0}d\xi\right)g\,(x,s)\,ds,$$

$$g\,(x,s)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,(x-s-r)-\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,(x-s)}{2\sqrt{\lambda}\left(\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}r-1\right)}, & 0\leqslant s\leqslant x<r,\\ \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,(x-s)-\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,(x-s+r)}{2\sqrt{\lambda}\left(\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}r-1\right)}, & 0<x\leqslant s\leqslant r,\end{cases}$$

Определение. Функцией Грина $G(x,y;\xi,\eta)$ задачи 1 будем называть решение уравнения (6) представимое в виде (5), обладающее в области $\Omega'=\{(x,y,\xi,\eta)\colon 0<$

$x, \xi < r,\ -\alpha < y, \eta < \beta\}$ производными входящими в это уравнение, непрерывно—дифференцируемое в замыкании $\overline{\Omega}'$, удовлетворяющее условиям (7)–(10).

Замечание. Функция $g(x,s)$ при $\lambda = -\left(\frac{2\pi k}{r}\right)^2$ $(k \in \mathbb{Z})$ не существует.

Таким образом, формула (11) позволяет в явном виде записать решение задачи 1, если известна функция Грина $G(x,y;\xi,\eta)$, и имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\lambda \neq -\left(\frac{2\pi k}{r}\right)^2$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ *и известна функция Грина* $G(x,y;\xi,\eta)$ *задачи 1. Тогда задача 1 однозначно разрешима, причём решение в явном виде даётся равенством* (11).

Список литературы

[1] A. A. Dezin, "On the solvable extensions of partial differential operators", Outlines of Join Soviet–American Symposium on Partial Differential Equations. (Novosibirsk, 1963), 1963, 65–66.

[2] А. М. Нахушев, *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*, Наука, М., 2006, 287 с. [A. M. Nakhushev, *Zadachi so smeshcheniem dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh*, Nauka, Moskva, 2006, 287 pp.]

[3] А. А. Дезин, "Простейшие разрешимые расширения для ультрагиперболического и псевдопараболического операторов", *Докл. АН СССР*, **148**:5 (1963), 1013–1016. [A. A. Dezin, "The simplest solvable extensions of ultrahyperbolic and pseudoparabolic operators", *Sov. Math., Dokl.*, **4** (1963), 208–211].

[4] З. А. Нахушева, "Об одной нелокальной задаче А. А. Дезина для уравнения Лаврентьева—Бицадзе", *Дифференц. уравнения*, **45**:8 (2009), 1199–2003. [Z. A. Nakhusheva, "On a nonlocal problem of A. A. Dezin for the Lavrent'ev–Bitsadze equation", *Differential Equations*, **45**:8 (2009), 1223–1228].

[5] К. Б. Сабитов, В. А. Новикова, "Нелокальная задача А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева—Бицадзе", *Изв. вузов. Матем.*, 2016, №6, 61–72. [K. B. Sabitov, V. A. Novikova, "Nonlocal Dezin's problem for Lavrent'ev–Bitsadze equation", *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **60**:6 (2016), 52–62].

[6] К. Б. Сабитов, В. А. Гущина (Новикова), "Задача А.А. Дезина для неоднородного уравнения Лаврентьева—Бицадзе", *Изв. вузов. Матем.*, 2017, №3, 37–50. [K. B. Sabitov, V. A. Gushchina, "A. A. Dezin's problem for inhomogeneous Lavrent'ev–Bitsadze equation", *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **61**:3 (2017), 31–43].

[7] В. А. Гущина, "Нелокальная задача А. А. Дезина для уравнения смешанного эллиптико—гиперболического типа", *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **20**:1 (2016), 22–32. [V. A. Gushchina, "Nelokal'naya zadacha A. A. Dezina dlya uravneniya smeshannogo ehlliptiko—giperbolicheskogo tipa", *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*, **20**:1 (2016), 22–32].

[8] З. А. Нахушева, *Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений*, Изд-во КБНЦ РАН, Нальчик, 2012, 196 с. [Z. A. Nakhusheva, *Nelokal'nye kraevye zadachi dlya osnovnykh i smeshannogo tipov differentsial'nykh uravnenii*, KBNTs RAN, Nalchik, 2012, 196 pp.]

[9] Р. А. Киржинов, "Аналога задачи А. А. Дезина для уравнения смешанного параболо—гиперболического типа", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **16**:2 (2014), 41–46. [R. A. Kirzhinov, "Analoga zadachi A. A. Dezina dlya uravneniya smeshannogo parabolo—giperbolicheskogo tipa", *Doklady Adygskoj (CHerkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk*, **16**:2 (2014), 41–46].

[10] Р. А. Киржинов, "О единственности решения аналога задачи А. А. Дезина для уравнения смешанного параболо—гиперболического типа", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **17**:3 (2015), 28–30. [R. A. Kirzhinov, "O edinstvennosti resheniya analoga zadachi A. A. Dezina dlya uravneniya smeshannogo parabolo—giperbolicheskogo tipa", *Doklady Adygskoj (CHerkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk*, **17**:3 (2015), 28–30].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Dezin A. A. On the solvable extensions of partial differential operators // Outlines of Join Soviet–American Symposium on Partial Differential Equations. 1963. Novosibirsk, 1963. pp. 65–66.

[2] Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.

[3] Дезин А. А.Простейшие разрешимые расширения для ультрагиперболического и псевдопараболического операторов // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. № 5. С. 1013–1016.

[4] Нахушева З./,А. Об одной нелокальной задаче А. А. Дезина для уравнения Лаврентьева—Бицадзе // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. №. 8. С. 1199–2003.

[5] Сабитов К. Б., Новикова В. А. Нелокальная задача А. А. Дезина для уравнения Лаврентьева—Бицадзе // Изв. вузов. Матем. 2016. № 6. С. 61–72.

[6] Сабитов К. Б., Гущина В. А. Задача А. А. Дезина для неоднородного уравнения Лаврентьева—Бицадзе // Изв. вузов. Матем. 2017. № 3. С. 37–50.

[7] Гущина В. А. Нелокальная задача А. А. Дезина для уравнения смешанного эллиптико—гиперболического типа // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20. №1. С. 22–32.

[8] Нахушева З. А. Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2012. 196 с.

[9] Киржинов Р. А. Аналога задачи А. А. Дезина для уравнения смешанного параболо—гиперболического типа // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т. 16. № 2. С. 41–46.

[10] Киржинов Р. А. О единственности решения аналога задачи А. А. Дезина для уравнения смешанного параболо—гиперболического типа // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17. №3. С. 28–30.

Для цитирования: Киржинов Р. А. О решении аналога задачи А. А. Дезина для уравнения смешанного типа второго порядка методом функции Грина // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2018. № 3(23). C. 36-41. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-36-41

For citation: Kirzhinov R. A. On the solving of the A. A. Dezin problem analogue for a second–order mixed–type equation by the Green's function method, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2018, **23**: 3, 36-41. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-36-41

Поступила в редакцию / Original article submitted: 08.06.2018