Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 3(23). C. 27-35. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-27-35

УДК 517.5

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В ОБОБЩЁННЫХ ГЁЛЬДЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ МОДИФИКАЦИЯХ

М. Р. Голава

Абхасзский государственный университет, Республика Абхазия, г. Сухум, ул.Университетская 1

E-mail: marianagolava@yandex.ru

В статье изучается скорость аппроксимационных свойств средних Валле Пуссена рядов Фурье в обобщенных гёльдеровых пространствах.

Ключевые слова: ряды Фурье, пространства Гёльдера, средние Фейера, средние Валле Пуссена.

MSC 40H05

APPROXIMATION OF FUNCTIONS IN GENERALIZED HOLDER SPACES AND THEIR MODIFICATIONS

M. R. Golava

Abhaszsky state university, Republic Abkhazia, of Sukhum, street University 1

E-mail: marianagolava@yandex.ru

We study rate of approximation of Valle Poussin means of Fourier series in generalized Holder spaces.

Key words: Fourier series, Holder space, Fejer means, Valle Poussin means.

Введение

В 1975 г. известный немецкий математик З. Прёсдорф ([1]) исследовал аппроксимационные свойства средних Фейера тригонометрических рядов Фурье непрерывных 2π-периодических функций в так называемых гёльдеровых пространствах, в которых норма учитывает как максимальные значения, так и гладкостные характеристики элементов этих пространств.

Пусть $C := (0, 2\pi)$ – пространство непрерывных 2π-периодических функций f с нормой

$$\|f\|_C := \max_x |f(x)|,$$

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

– её ряд Фурье,

$$S_n(f) = S_n(f, x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

– частичные суммы порядка n ряда Фурье $S[f]$.

В качестве аппаратов приближения будем рассматривать средние Валле Пуссена

$$\sigma_{n,p}(f) = \sigma_{n,p}(f, x) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p}^{n} S_k(f, x), \ 0 \le p \le n-1.$$

При $n = p$, $\sigma_p(f) = \sigma_{p,p}(f)$ – суммы Фейера, при $0 \le p < \frac{n}{2}$, $\sigma_{n,p}(f)$ – средние, близкие к суммам Фурье, при $\frac{n}{2} \le p \le n-1$, $\sigma_{n,p}(f)$ – средние, близкие к суммам Фейера.

Введём понятие обобщённых гёльдеровых пространств и их модификаций.

Пусть

$$\Delta_h f(x) := f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right), h > 0$$

$$\Delta_h^2 f(x) := \Delta_h(\Delta_h f)(x) = f(x+h) + f(x-h) - 2f(x),$$

– первая и вторая симметрические разности в точке x с шагом h соответственно,

$$|f|_{\omega^*} := \sup_{h>0} \frac{\|\Delta_h f\|_C}{\omega^*(h)}, \ |f|_{\omega^*,2} := \sup_{h>0} \frac{\left\|\Delta_h^2 f\right\|_C}{\omega^*(h)},$$

где $\omega^*(t)$ – некоторая неубывающая и положительная при $t > 0$ функция.

Пусть, далее,

$$H_{\omega^*} := \{f \in C : \ |f|_{\omega^*} < \infty\}, \ H_{\omega^*,2} := \left\{f \in C : \ |f|_{\omega^*,2} < \infty\right\}.$$

Множества H_{ω^*} и $H_{\omega^*,2}$, называются обобщёнными гёльдеровыми и обобщёнными модифицированными гёльдеровыми пространствами, которые являются также банаховыми пространствами относительно норм

$$\|f\|_{\omega^*} := \|f\|_C + |f|_{\omega^*}, \ \|f\|_{\omega^*,2} := \|f\|_C + |f|_{\omega^*,2}$$

соответственно.

В частности, если $\omega^*(t) = t^\beta$, $0 < \beta \le 1$, $H_{\omega^*} := H_\beta$ – пространство Гёльдера с показателем β (при $\beta = 0$ считаем, что $H_0 := C$). В случае $0 < \beta \le 2$, $H_{\omega^*,2} := H_{\beta,2}$ – пространство Зигмунда с показателем β.

2. Постановка задачи

За последние 40 лет появилось большое количество работ, посвящённых исследованию вопросов приближения функций различными линейными средними их рядов Фурье в пространствах H_ω. К их числу относятся работы З. Прёсдорфа [1], Л. Лейндлера [2], П. Чандры [3], Л. Лейндлера, А. Меира, В. Тотика [4], Р. Мохапатры и П. Чандры [5], Т. Сингха [6], Р.А.Ласурия [7,8], В.В. Жука [9], Б. Лэндона [10], Б.Р. Драганова [11], С.А. Теляковского [12] и др. Приведем следующий результат З. Прёсдорфа относительно средних Фейера.

Теорема A. ([1]). *Пусть* $0 \le \beta < \alpha \le 1$. *Тогда* $\forall f \in H_\alpha \subset H_\beta$ *имеют место соотношения*

$$\|f-\sigma_n(f)\|_\beta = \begin{cases} O(1)\ \left(\frac{1}{n^{\alpha-\beta}}\right),\ \alpha<1, \\ O(1)\ \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{1-\beta},\ \alpha=1,\ \beta>0,\ n>1, \end{cases}$$

где $O(1)$ *– величины, равномерно ограниченные по n и, зависящие, вообще говоря от* f, α, β

Р.А. Ласурия ([7,8]) было замечено, что ряд результатов по приближению функций в пространствах H_{ω^*} могут быть уточнены. В частности, имеет место следующий усиленный вариант теоремы Прёсдорфа.

Теорема B ([7, 8]). *Пусть* $0 \le \beta < \alpha \le 1$. *Тогда* $\forall f \in H_\alpha \subset H_\beta$

$$\|f-\sigma_n(f)\|_\beta = \begin{cases} O(1)\ \left(\frac{1}{n^{\alpha-\beta}}\right),\ \alpha-\beta<1, \\ O(1)\ \left(\frac{\ln n}{n}\right),\ \alpha-\beta=1\ (\alpha=1,\beta=0). \end{cases}$$

Откуда видно, что при $\alpha=1,\beta>0$, *имеем порядок приближения* $\frac{1}{n^{1-\beta}}$, *в то время как из теоремы A, в этом случае, следует порядок приближения* $\frac{(\ln n)^{1-\beta}}{n^{1-\beta}}$ *и, значит, множитель* $(\ln n)^{1-\beta}$ *может быть опущен.*

Как хорошо известно, из результатов С.Н. Бернштейна и Г. Алексича следует, что в пространстве C средние Фейера $\sigma_n(f)$ не могут доставлять приближение функциям, отличным от постоянных, по порядку лучше чем $\frac{1}{n}$. Однако, отправляясь от работы Р.А. Ласурия [8], Б.Р. Драгановым [11] было замечено, что переход от пространств H_{ω^*} к пространствам $H_{\omega^*,2}$ позволяет в соответствующих случаях добиться оптимального порядка приближения, нежели в пространствах H_{ω^*}. В связи с этим встаёт актуальность рассмотрения вопросов приближения функций и в обобщённых модифицированных гёльдеровых пространствах $H_{\omega^*,2}$. Ряд результатов в этом направлении получены Р.А. Ласурия [13].

В нашей работе исследуются оценки скорости сходимости средних Валле Пуссена в пространствах $H_{\omega^*,2}$.

3. Основные результаты и следствия

Относительно средних Валле Пуссена, близки к средним Фейера имеют место следующие утверждения.

Теорема. *Пусть* $0 \le \beta < \eta \le 2$, $\frac{n}{2} \le p \le n-1$. *Тогда для* $\forall f \in H_{\omega,2} \subset H_{\omega^*,2}$ *справедливо неравенство*

$$\left\|\sigma_{n,p}(f)-f\right\|_{\omega^*,2} \le \|f\|_{\omega,2}\left(4^{\beta/\eta}+4\sup_{h>0}\frac{(\omega(h))^{\beta/\eta}}{\omega^*(h)}\right)\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{\pi(p+1)}\sum_{k=n-p}^{n}\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{1-\beta/\eta}+O(1)\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1-\beta/\eta}\right\}$$

Следствие. *Пусть* $\omega(t)=t^{\alpha}$, $\omega^*(t)=t^{\beta}$, $0 \le \beta < \alpha \le 2$, $\eta=\alpha$, $\frac{n}{2} \le p \le n-1$. *Тогда для* $\forall f \in H_{\alpha,2}$ *справедливы соотношения*

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{\beta,2}=\begin{cases} O(1)\left(\frac{1}{n^{\alpha-\beta}}\right), \; 0<\alpha-\beta<1, \\ O(1)\left(\frac{1}{p}\ln\frac{n}{n-p}\right), \; \alpha-\beta=1, \\ O(1)\left(\frac{1}{(n-p)^{\alpha-\beta}}\right), \; \alpha-\beta>1. \end{cases}$$

Доказательство теоремы основывается на следующих вспомогательных утверждениях.

Лемма A [15]. *Пусть* $f \in C$. *Тогда при* $\frac{n}{2} \le p \le n-1$ *справедливо равенство*

$$\left|\sigma_{n,p}(f,x)-f(x)\right|=\frac{1}{\pi(p+1)}\int_{1/(n+1)}^{1/(n-p)}\frac{\Delta_t^2 f(x)}{t^2}dt+O\left(\omega_2\left(f,\frac{1}{n}\right)\right). \tag{1}$$

Лемма 1. *Пусть* $f \in C$. *Тогда при* $\frac{n}{2} \le p \le n-1$ *справедливо неравенство*

$$\left\|\sigma_{n,p}(f)-f\right\|_C \le \frac{1}{\pi(p+1)}\sum_{k=n-p}^{n}\omega_2\left(f,\frac{1}{k}\right)+O\left(\omega_2\left(f,\frac{1}{n}\right)\right) \tag{2}$$

Доказательство. В силу равенства (1), с учётом определения модуля гладкости функции f, следует

$$\left\|\sigma_{n,p}(f)-f\right\|_C \le \frac{1}{\pi(p+1)}\int_{1/(n+1)}^{1/(n-p)}\frac{\omega_2(f,t)}{t^2}dt+O\left(\omega_2\left(f,\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi(p+1)}\sum_{k=n-p}^{n}\int_{1/(k+1)}^{1/k}\frac{\omega_2(f,t)}{t^2}dt+O\left(\omega_2\left(f,\frac{1}{n}\right)\right)\le$$

$$\le\frac{1}{\pi(p+1)}\sum_{k=n-p}^{n}\omega_2\left(f,\frac{1}{k}\right)\int_{1/(k+1)}^{1/k}t^{-2}dt+O\left(\omega_2\left(f,\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi(p+1)}\sum_{k=n-p}^{n}\omega_2\left(f,\frac{1}{k}\right)+O\left(\omega_2\left(f,\frac{1}{n}\right)\right).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть* $0 \le \beta < \eta \le 2$, $\frac{n}{2} \le p \le n-1$. *Тогда для* $\forall f \in H_{\omega,2} \subset H_{\omega^*,2}$ *справедливо неравенство*

$$\left|\sigma_{n,p}(f)-f\right|_{\omega^*,2} \le 4|f|_{\omega,2} \sup_{h>0} \frac{\omega^{\beta/\eta}(h)}{\omega^*(h)} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{1}{\pi(p+1)} \sum_{k=n-p}^{n} \left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{1-\beta/\eta} + O(1)\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1-\beta/\eta} \right\}.$$

Доказательство. Оценим полунорму

$$\left|\sigma_{n,p}(f)-f\right|_{\omega^*,2} = \sup_{h>0} \frac{\left\|\Delta_h^2(\sigma_{n,p}(f)-f)\right\|_C}{\omega^*(h)}$$

при условии, что $f \in H_{\omega,2} \subset H_{\omega^*,2}$.

Вследствие неравенств

$$\omega_2(f,t) \le 4\|f\|_C,$$

$$\omega_2(f+g,t) \le \omega_2(f,t)+\omega_2(g,t)$$

будем иметь

$$\omega_2\left(\Delta_h^2 f,t\right) \le 4\left\|\Delta_h^2 f\right\|_C, \tag{3}$$

$$\omega_2\left(\Delta_h^2 f,t\right) \le 4\omega_2(f,t). \tag{4}$$

В силу равенства

$$|f|_{\omega,2} = \sup_{h>0} \frac{\left\|\Delta_h^2 f\right\|_C}{\omega(h)},\ f \in H_{\omega,2},$$

имеем

$$\left\|\Delta_h^2 f\right\|_C \le |f|_{\omega,2}\,\omega(h). \tag{5}$$

Принимая во внимание равенство

$$\Delta_h^2(\sigma_{n,p}(f)-f) = \sigma_{n,p}\left(\Delta_h^2 f\right) - \Delta_h^2 f,$$

с учётом неравенств (3)-(5) и (2), получаем

$$\left\|\Delta_h^2(\sigma_{n,p}(f)-f)\right\|_C = \left\|\sigma_{n,p}\left(\Delta_h^2 f\right)-\Delta_h^2 f\right\|_C \le$$

$$\le \frac{1}{\pi(p+1)} \sum_{k=n-p}^{n} \omega_2\left(\Delta_h^2 f, \frac{1}{k}\right) + O\left(\omega_2\left(\Delta_h^2 f, \frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi(p+1)} \sum_{k=n-p}^{n} \omega_2^{\beta/\eta}\left(\Delta_h^2 f, \frac{1}{k}\right) \cdot \omega_2^{1-\beta/\eta}\left(\Delta_h^2 f, \frac{1}{k}\right) +$$

$$+O(1)\,\omega_2^{\beta/\eta}\left(\Delta_h^2 f, \frac{1}{n}\right)\omega_2^{1-\beta/\eta}\left(\Delta_h^2 f, \frac{1}{n}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\pi(p+1)} \sum_{k=n-p}^{n} \left(4\left\|\Delta_h^2 f\right\|_C\right)^{\beta/\eta} \left(4\omega_2\left(f, \frac{1}{k}\right)\right)^{1-\beta/\eta} +$$

$$+O(1)\left(4\left\|\Delta_h^2 f\right\|_C\right)^{\beta/\eta}\left(4\omega_2\left(f,\frac{1}{n}\right)\right)^{1-\beta/\eta}=$$

$$=\left(4\left\|\Delta_h^2 f\right\|_C\right)^{\beta/\eta}\frac{1}{\pi(p+1)}\sum_{k=n-p}^{n}4^{1-\beta/\eta}\omega_2^{1-\beta/\eta}\left(f,\frac{1}{k}\right)+$$

$$+O(1)\left(4\left\|\Delta_h^2 f\right\|_C\right)^{\beta/\eta}4^{1-\beta/\eta}\omega_2^{1-\beta/\eta}\left(f,\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\left(4\left\|\Delta_h^2 f\right\|_C\right)^{\beta/\eta}\left\{\frac{1}{\pi(p+1)}\sum_{k=n-p}^{n}4^{1-\beta/\eta}\omega_2^{1-\beta/\eta}\left(f,\frac{1}{k}\right)+O(1)\,4^{1-\beta/\eta}\omega_2^{1-\beta/\eta}\left(f,\frac{1}{n}\right)\right\}=$$

$$=4\left\|\Delta_h^2 f\right\|_C^{\beta/\eta}\left\{\frac{1}{\pi(p+1)}\sum_{k=n-p}^{n}\omega_2^{1-\beta/\eta}\left(f,\frac{1}{k}\right)+O(1)\,\omega_2^{1-\beta/\eta}\left(f,\frac{1}{n}\right)\right\}\leq$$

$$\leq 4\,|f|_{\omega,2}^{\beta/\eta}\,\omega^{\beta/\eta}(h)\left\{\frac{1}{\pi(p+1)}\sum_{k=n-p}^{n}|f|_{\omega,2}^{1-\beta/\eta}\,\omega^{1-\beta/\eta}\left(\frac{1}{k}\right)+O(1)\,|f|_{\omega,2}^{1-\beta/\eta}\,\omega^{1-\beta/\eta}\left(\frac{1}{n}\right)\right\}=$$

$$=4|f|_{\omega,2}\omega^{\beta/\eta}(h)\left\{\frac{1}{\pi(p+1)}\sum_{k=n-p}^{n}\omega^{1-\beta/\eta}\left(\frac{1}{k}\right)+O(1)\,\omega^{1-\beta/\eta}\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

Отсюда заключаем

$$\left|\sigma_{n,p}(f)-f\right|_{\omega^*,2}\leq\sup_{h>0}\frac{4|f|_{\omega,2}\omega^{\beta/\eta}(h)}{\omega^*(h)}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{\pi(p+1)}\sum_{k=n-p}^{n}\omega^{1-\beta/\eta}\left(\frac{1}{k}\right)+O(1)\,\omega^{1-\beta/\eta}\left(\frac{1}{n}\right)\right\}=$$

$$=4|f|_{\omega,2}\sup_{h>0}\frac{\omega^{\beta/\eta}(h)}{\omega^*(h)}\cdot\left\{\frac{1}{\pi(p+1)}\sum_{k=n-p}^{n}\omega^{1-\beta/\eta}\left(\frac{1}{k}\right)+O(1)\,\omega^{1-\beta/\eta}\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Лемма 2 доказана.

Переходим к доказательству теоремы. Пользуясь неравенством (2) леммы 1, с учетом неравенства $\omega_2(f,t)\leq 4\|f\|_C$, для любой функции $f\in H_{\omega,2}\subset H_{\omega^*,2}$ будем иметь

$$\left\|\sigma_{n,p}(f)-f\right\|_C\leq\frac{1}{\pi(p+1)}\sum_{k=n-p}^{n}\omega_2\left(f,\frac{1}{k}\right)+O\left(\omega_2\left(f,\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi(p+1)}\sum_{k=n-p}^{n}\omega_2^{1-\beta/\eta}\left(f,\frac{1}{k}\right)\omega_2^{\beta/\eta}\left(f,\frac{1}{k}\right)+O\left(\omega_2^{1-\beta/\eta}\left(f,\frac{1}{n}\right)\right)\omega_2^{\beta/\eta}\left(f,\frac{1}{n}\right)\leq$$

$$\leq\frac{1}{\pi(p+1)}\sum_{k=n-p}^{n}\omega_2^{1-\beta/\eta}\left(f,\frac{1}{k}\right)(4\|f\|_C)^{\beta/\eta}+O(1)\,\omega_2^{1-\beta/\eta}\left(f,\frac{1}{n}\right)(4\|f\|_C)^{\beta/\eta}=$$

$$= 4^{\beta/\eta} \|f\|_C^{\beta/\eta} \left\{ \frac{1}{\pi(p+1)} \sum_{k=n-p}^{n} \omega_2^{1-\beta/\eta}\left(f, \frac{1}{k}\right) + O(1)\, \omega_2^{1-\beta/\eta}\left(f, \frac{1}{n}\right) \right\} \leq$$

$$\leq 4^{\beta/\eta} \|f\|_C^{\beta/\eta} \left\{ \frac{1}{\pi(p+1)} \sum_{k=n-p}^{n} |f|_{\omega,2}^{1-\beta/\eta}\, \omega^{1-\beta/\eta}\left(\frac{1}{k}\right) + O(1)\, |f|_{\omega,2}^{1-\beta/\eta}\, \omega^{1-\beta/\eta}\left(\frac{1}{n}\right) \right\} =$$

$$\leq 4^{\beta/\eta} \|f\|_{\omega,2} \left\{ \frac{1}{\pi(p+1)} \sum_{k=n-p}^{n} \omega^{1-\beta/\eta}\left(\frac{1}{k}\right) + O(1)\, \omega^{1-\beta/\eta}\left(\frac{1}{n}\right) \right\}.$$

В силу полученного соотношения и леммы 2 находим

$$\left\|\sigma_{n,p}(f) - f\right\|_{\omega^*_,2} = \left\|\sigma_{n,p}(f) - f\right\|_C + \left|\sigma_{n,p}(f) - f\right|_{\omega^*_,2} \leq$$

$$\leq 4^{\beta/\eta} \|f\|_{\omega,2} \left\{ \frac{1}{\pi(p+1)} \sum_{k=n-p}^{n} \omega^{1-\beta/\eta}\left(\frac{1}{k}\right) + O(1)\, \omega^{1-\beta/\eta}\left(\frac{1}{n}\right) \right\} +$$

$$+4|f|_{\omega,2} \sup_{h>0} \frac{\omega^{\beta/\eta}(h)}{\omega^*(h)} \cdot \left\{ \frac{1}{\pi(p+1)} \sum_{k=n-p}^{n} \left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{1-\beta/\eta} + O(1) \left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1-\beta/\eta} \right\} =$$

$$= \left(4^{\beta/\eta} \|f\|_{\omega,2} + 4|f|_{\omega,2} \sup_{h>0} \frac{\omega^{\beta/\eta}(h)}{\omega^*(h)}\right) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{1}{\pi(p+1)} \sum_{k=n-p}^{n} \left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{1-\beta/\eta} + O(1) \left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1-\beta/\eta} \right\} =$$

$$= \left(4^{\beta/\eta} \|f\|_{\omega,2} + 4\|f\|_{\omega,2} \sup_{h>0} \frac{\omega^{\beta/\eta}(h)}{\omega^*(h)}\right) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{1}{\pi(p+1)} \sum_{k=n-p}^{n} \left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{1-\beta/\eta} + O(1) \left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1-\beta/\eta} \right\} =$$

$$= \|f\|_{\omega,2} \left(4^{\beta/\eta} + 4 \sup_{h>0} \frac{\omega^{\beta/\eta}(h)}{\omega^*(h)}\right) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{1}{\pi(p+1)} \sum_{k=n-p}^{n} \left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{1-\beta/\eta} + O(1) \left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1-\beta/\eta} \right\}.$$

Теорема полностью доказана.

Аналогичные оценки для средних Фейера были установлены в работе [14].

Список литературы

[1] Prössdorf S., "Zur Konvergens der Fourierreihen Hölder stetiger", *Math. Nachr*, **69** (1975), 7-14.

[2] Leindler L., "Generalizations of Prössdorfs theorems", *Stud. Math. Hung.*, **14** (1979), 431-439.

[3] Chandra P., "On the generalized Fejer means in the metric of the Hölder space", *Math. Nachr.*, **109** (1982), 39-45.

[4] Leindler L., Meir A., Totik V., “On approximations of continuous functions in Lipchitz norms”, *Acta Math. Hung.*, **45**:3-4 (1985), 441-443.

[5] Mohapatra R.N., Chandra P., “Degree of approximation of functions in the Hölder metric”, *Acta Math. Hung.*, **41**:1-2 (1983), 67-76.

[6] Singh U., “The approximation of continuous functions in the Hölder metric”, *Mat. april.*, **43**:3-4 (1991), 111-118.

[7] Ласурия Р.А., “О приближении периодических функций линейными средними сумм Фурье в обобщённой гёльдеровой метрике”, *Докл. АМАН*, **5**:1 (2000), 24-39.

[8] Ласурия Р.А., “О приближении функций, заданных на всей действительной оси, операторами типа Фейера в обобщенной гёльдеровой метрике”, *Мат. заметки*, **81**:4 (2007), 574-552. [Lasuriya P.A., “O priblizhenii funkcij, zadannyh na vsej dejstvitel’noj osi, operatorami tipa Fejera v obobshchennoj gyol’derovoj metrike”, *Mat. zametki*, **81**:4 (2007), 574-552].

[9] Жук В.В., “Приближение периодических функций в метриках типа Гёльдера суммами Фурье и средними Рисса”, *Зап. науч. Сем. ПОМи*, **350** (2007), 70-87. [ZHuk V.V., “Priblizhenie periodicheskih funkcij v metrikah tipa Gyol’dera summami Fur’e i srednimi Pissa”, *Zap. nauch. Sem. POMi*, **350** (2007)].

[10] Landon B.A., *Degree of approximation of Hölder continuous functions*, A dissert. For the degree of D-r of Phil. in Math. in the Depart. Of Vath. at the Un-ty of Central Florida, Orlando (USA)., 2008, 76 pp.

[11] Draganov B.R., “Simultaneous approximation of functions by Fejer-type operators in a generalized Hölder norm”, *East J. Approx.*, **14** (2008), 439-449.

[12] Теляковский С.А., “О скорости приближения функций в липшицевых нормах”, *Труды ин-та мат-ки и мех-ки УрО РАН.*, **16**:4 (2010), 297-299. [Telyakovskij S.A., “O skorosti priblizheniya funkcij v lipshicevyh normah”, *Trudy in-ta mat-ki i mekh-ki UrO PAN.*, **16**:4 (2010), 297-299].

[13] Ласурия Р.А., “Аппроксимация и группы отклонений рядов Фурье в обобщённых гёльдеровых пространствах”, *Ряды Фурье и их приложения*, Материалы IX межд. симп. Ф.Н. и обр. Ю.ФУ., 2016, 9-20. [Lasuriya P.A., “Approksimaciya i gruppy otklonenij ryadov Fur’e v obobshchyonnyh gyol’derovyh prostranstvah”, *Pyady Fur’e i ih prilozheniya*, Materialy IX mezhd. simp. F.N. i obr. YU.FU., 2016, 9-20].

[14] Ласурия Р.А., Голава М.Р., “Средние Фейера в обобщённом гёльдеровом пространстве”, *Труды АГУ. РО АГУ.*, 2015, 5-11. [Lasuriya P.A., Golava M.P., “Srednie Fejera v obobshchyonnom gyol’derovom prostranstve”, *Trudy AGU. PO AGU.*, 2015, 5-11].

[15] Ефимов А.В., “О приближении периодических функций суммами Валле Пуссена”, *изв. АН СССР (сер. матем)*, **23**:5 (1959), 737-770. [Efimov A.V., “O priblizhenii periodicheskih funkcij summami Valle Pussena”, *izv. AN SSSP (ser. matem)*, **23**:5 (1959), 737-770].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Prössdorf S. Zur Konvergens der Fourierreihen Hölder stetiger // Math. Nachr. 1975. vol. 69. pp. 7-14.

[2] Leindler L. Generalizations of Prössdorfs theorems // Stud. Math. Hung. 1979. vol. 14. pp. 431-439.

[3] Chandra P. On the generalized Fejer means in the metric of the Hölder space // Math. Nachr. 1982. vol. 109. pp. 39-45.

[4] Leindler L., Meir A., Totik V. On approximations of continuous functions in Lipchitz norms // Acta Math. Hung. 1985. vol. 45. no. 3-4. pp. 441-443.

[5] Mohapatra R.N., Chandra P. Degree of approximation of functions in the Hölder metric // Acta Math. Hung. 1983. vol. 41. no. 1-2. pp. 67-76.

[6] Singh U. The approximation of continuous functions in the Hölder metric // Mat. april. 1991. vol. 4. no. 3-4. pp. 111-118.

[7] Ласурия Р.А. О приближении периодических функций линейными средними сумм Фурье в обобщённой гёльдеровой метрике // Докл. АМАН. 2000. Т. 5. №. 1. С. 24-39.

[8] Ласурия Р.А. О приближении функций, заданных на всей действительной оси, операторами типа Фейера в обобщенной гёльдеровой метрике // Мат. заметки. 2007. Т. 81. № 4. С. 574-552.

[9] Жук В.В. Приближение периодических функций в метриках типа Гёльдера суммами Фурье и средними Рисса // Зап. науч. Сем. ПОМи. 2007. Т. 350. С. 70-87.

[10] Landon B.A. Degree of approximation of Hölder continuous functions. A dissert. For the degree of D-r of Phil. in Math. in the Depart. Of Vath. at the Un-ty of Central Florida, Orlando (USA). 2008. 76 p.

[11] Draganov B.R. Simultaneous approximation of functions by Fejer-type operators in a generalized Hölder norm // East J. Approx. 2008. vol. 14. pp. 439-449.

[12] Теляковский С.А. О скорости приближения функций в липшицевых нормах // Труды ин-та мат-ки и мех-ки УрО РАН. 2010. Т. 16. no. 4. С. 297-299.

[13] Ласурия Р.А. Аппроксимация и группы отклонений рядов Фурье в обобщённых гёльдеровых пространствах. Ряды Фурье и их приложения. Материалы IX межд. симп. Ф.Н. и обр. Ю.ФУ. 2016. С. 9-20.

[14] Ласурия Р.А., Голава М.Р. Средние Фейера в обобщённом гёльдеровом пространстве // Труды АГУ. РО АГУ. 2015. С. 5-11.

[15] Ефимов А.В. О приближении периодических функций суммами Валле Пуссена // изв. АН СССР (сер. матем). 1959. Т. 23. №5. С. 737-770.

Для цитирования: Голава М. Р. Приближение функций в обобщённых гёльдеровых пространствах и их модификациях // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 3(23). С. 27-35. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-27-35

For citation: Golava M. P. Approximation of functions in generalized Holder spaces and their modifications, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018, **23**: 3, 27-35. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-27-35

Поступила в редакцию / Original article submitted: 10.06.2018