Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 3(23). C. 19-26. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-19-26

УДК 517.95

# КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

**Ж. А. Балкизов**

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000,
г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А

E-mail: Giraslan@yandex.ru

В работе исследована краевая задача со смещением для модельного неоднородного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка. Доказаны теоремы единственности и существования регулярного решения исследуемой задачи. В случае, когда коэффициенты задачи являются постоянными действительными числами решение исследуемой задачи выписано в явном виде.

*Ключевые слова: уравнение смешанного типа, задача со смещением, уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, метод Трикоми, метод интегральных уравнений*



MSC 35M12

# A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH DISPLACEMENT FOR A MODEL EQUATION OF A PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE OF THE THIRD ORDER

**Zh. A. Balkizov**

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Nalchik,
Shortanova st., 89A, Russia

E-mail: Giraslan@yandex.ru

In this paper, we study the boundary-value problem with displacement for a model inhomogeneous parabolic-hyperbolic equation of the third order. We prove the uniqueness and existence theorems for a regular solution of the problem under study. In the case when the coefficients of the problem are constant real numbers, the solution of the problem under study is written out in explicit form.

*Key words: mixed type equation, boundary-value problem with displacement, third-order equation with multiple characteristics, Tricomi method, method of integral equations.*

## Введение

В монографии [1] отмечено, что проблема поиска корректных краевых задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях, когда поверхность параболического вырождения является пространственно ориентированной, приводит к краевым задачам со смещением. Определение краевой задачи со смещением было дано в работе [2]. Впервые задача со смещением в гиперболической части области для уравнения Лаврентьева-Бицадзе была исследована в работе [3]. Ряд задач с разными смещениями были исследованы в работе [2]. Частными случаями задач со смещением являются такие задачи, как задача Карлемана, задача Стеклова, задача Франкля, задача Бицадзе-Самарского и т.д. В настоящее время исследованию краевых задач со смещением для различных типов и различных порядков уравнений уделяют внимание много авторов. В первую очередь это связано с применением их при исследовании задач биологической синергетики [4], трансзвуковой газовой динамики [5] – [6]. Достаточно полная библиография научных работ, посвященных исследованиям краевых задач со смещениями приведены в монографиях [1], [7].

В данной работе исследуется краевая задача со смещением для неоднородного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка с волновым оператором в области гиперболичности. Доказаны теоремы существования и единственности регулярного решения исследуемой задачи. В случае, когда коэффициенты, входящие в исследуемую задачу являются постоянными действительными числами, решение выписано в явном виде. Среди работ, близко примыкающих к исследуемой, отметим работы [8] – [9].

## Постановка задачи

.

На евклидовой плоскости точек $(x,y)$ рассмотрим уравнение

$$f=\begin{cases} u_{xx}-u_{yy}, & y<0,\\ u_{xxx}-u_{y}, & y>0,\end{cases} \tag{1}$$

где $f=f(x,y)$ – заданная функция, $u=u(x,y)$ – искомая функция.

Уравнение (1) при $y>0$ является уравнением третьего порядка с кратными характеристиками [10, с. 9] и по классификации, приведенной в монографии [4, с. 69], оно относится к уравнению параболического типа. При $y<0$ уравнение (1) совпадает с неоднородным волновым уравнением.

Уравнение (1) рассматривается в области $\Omega$, ограниченной характеристиками $AC: x+y=0$ и $CB: x-y=r$ этого уравнения при $y<0$, выходящими из точки $C=(r/2,-r/2)$ и проходящими через точки $A=(0,0)$ и $B=(r,0)$ соответственно, а также прямоугольником с вершинами в точках в точках $A$, $B$, $A_0=(0,h)$, $B_0=(r,h)$, $h>0$, при $y>0$. Обозначим: $\Omega_1=\Omega\cap\{y<0\}$, $\Omega_2=\Omega\cap\{y>0\}$, $J=\{(x,0):\ 0<x<r\}$.

*Регулярным в области $\Omega$ решением* уравнения (1) назовем функцию $u=u(x,y)$ из класса $u(x,y)\in C(\bar{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C_x^3(\Omega_1)\cap C^2(\Omega_2)$, $u_x,\ u_y\in L_1(J)$, при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

В работе исследована краевая задача со смещением для уравнения (1) в следующей постановке.

**Задача 1**. *Найти регулярное в области $\Omega$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(0,y)=\varphi_1(y)\,,\ u_x(0,y)=\varphi_2(y)\,,\ u(r,y)=\varphi_3(y)\,,\quad 0\le y<h, \tag{2}$$

$$\alpha(x)\,u[\theta_0(x)]+\beta(x)\,u[\theta_r(x)]=\psi(x)\,,\quad 0\le x\le r, \tag{3}$$

*где* $\theta_0(x)=\left(\frac{x}{2};-\frac{x}{2}\right)$, $\theta_r(x)=\left(\frac{r+x}{2};\frac{r-x}{2}\right)$ *– аффиксы точек пересечения характеристик уравнения* (1)*, выходящих из точки* $(x,0)$ *с характеристиками* $AC$ *и* $BC$ *соответственно;* $\alpha(x)\,,\beta(x)\,,\psi(x)\in C^1(\bar{J})\cap C^2(J)$*;* $\varphi_1(y)$*,* $\varphi_2(y)$*,* $\varphi_3(y)\in C[0,h]$ *– заданные функции.*

## Теорема единственности

Справедлива следующая

**Теорема 1**. *Пусть относительно коэффициентов* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *условия* (3) *выполнены следующие условия:*

$$\alpha(x)\,\beta(x)\neq 0,\ \alpha(x)\neq\beta(x)\,,\ \left[\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right]'>0,\quad \forall\, x\in\bar{J}. \tag{4}$$

*Тогда решение задачи 1 в области* $\Omega$ *единственно.*

*Доказательство*. Введем обозначения

$$u(x,0)=\tau(x)\,,\ (0\le x\le r)\,,\quad u_y(x,0)=\nu(x)\ \ (0<x<r)\,. \tag{5}$$

Переходя в уравнении (1) к пределу при $y\to+0$, с учетом обозначений (5) получим первое фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из параболической части $\Omega_2$ области $\Omega$ на линию $y=0$:

$$\nu(x)=\tau'''(x)+f(x,0)\,,\quad 0<x<r, \tag{6}$$

а из граничных условий (2) получим

$$\tau(0)=\varphi_1(0)\,,\ \tau'(0)=\varphi_2(0)\,,\ \tau(r)=\varphi_3(0)\,. \tag{7}$$

Найдем теперь фундаментальное соотношение между искомыми функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из гиперболической части $\Omega_1$ области $\Omega$ на линию $y=0$. Опираясь на известные свойства характеристического четырехугольника с вершинами в точках $(x,0)$, $(x/2,-x/2)$, $(r/2,-r/2)$, $\left(\frac{x+r}{2},\frac{x-r}{2}\right)$ с учетом условия (3) приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно $u[\theta_0(x)]$ и $u[\theta_r(x)]$:

$$\begin{cases} \alpha(x)\,u[\theta_0(x)]+\beta(x)\,u[\theta_r(x)]=\psi(x)\,,\\ u[\theta_0(x)]+u[\theta_r(x)]=u\left(\frac{r}{2},-\frac{r}{2}\right)+\tau(x)\,. \end{cases} \tag{8}$$

Из системы (8) находим, что

$$u[\theta_0(x)]=\frac{\beta(0)\,\psi(x)-\beta(0)\,\beta(x)\,\tau(x)-\beta(x)\,\psi(0)+\alpha(0)\,\varphi_1(0)\,\beta(x)}{\beta(0)\,[\alpha(x)-\beta(x)]}, \tag{9}$$

С другой стороны, пользуясь представлением решения задачи (5) для уравнения (1) в области $\Omega_1$ [11, с. 59], находим:

$$u\left[\theta_0(x)\right] = u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) = \frac{\tau(x)+\tau(0)}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^x \nu(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_{-x/2}^{0}\int\limits_{-t}^{x+t} f(s,t)\,ds\,dt. \qquad (10)$$

Подставляя значение $u\left[\theta_0(x)\right]$ из (10) в (9), а затем дифференцируя обе части полученного равенства, будем иметь

$$\nu(x) = \frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\tau'(x) + \left(\frac{2\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)'\tau(x) - \left(\frac{2\psi(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)' +$$

$$+\frac{\psi(0)-\alpha(0)\,\varphi_1(0)}{\beta(0)}\left(\frac{2\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)' + \int\limits_{-x/2}^{0} f(x+t,t)\,dt. \qquad (11)$$

Соотношение (11) есть второе фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из гиперболической части $\Omega_1$ области $\Omega$ на линию $y=0$.

**Лемма 1**. *Для соответствующей задаче 1 однородной задачи из* (6)-(7) *вытекает неравенство*:

$$J^* = \int\limits_0^r \tau(x)\,\nu(x)\,dx \le 0. \qquad (12)$$

*Действительно*, из соответствующего уравнению (6) однородного уравнения $(f(x,0)=0)$ при однородных граничных условиях $\left(\varphi_i(0)=0,\ i=\overline{1,3}\right)$, имеем:

$$J^* = \int\limits_0^r \tau(x)\,\nu(x)\,dx = \int\limits_0^r \tau(x)\,\tau'''(x)\,dx = -\frac{\tau'^2(r)}{2} \le 0.$$

**Лемма 2**. *Для соответствующей задаче 1 однородной задачи из соотношения* (11) *при условии* (4) *имеет место неравенство*:

$$J^* = \int\limits_0^r \tau(x)\,\nu(x)\,dx \ge 0. \qquad (13)$$

*Действительно*, при $f(x,y)\equiv 0$ и $\varphi_i(y)=\psi(x)\equiv 0,\ i=\overline{1,3}$ из (11) приходим к соотношению

$$\nu(x) = \frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\tau'(x) + \left(\frac{2\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)'\tau(x) \qquad (14)$$

откуда

$$J^* = \int\limits_0^r \tau(x)\,\nu(x)\,dx = \int\limits_0^r \left[\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right]^2 \left(\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right)'\tau^2(x)\,dx.$$

Из последнего равенства, при условии, что относительно коэффициентов $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ выполнено (4), следует неравенство (13).

Из неравенств (12) и (13) вытекает равенство

$$J^* = \int_0^r \left[\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right]^2 \left(\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right)' \tau^2(x)\,dx = 0,$$

которое при условии (4) может иметь место в том и только в том случае, когда $\tau(x) \equiv 0$. При этом из (11) следует что и $\nu(x) \equiv 0$. Тогда из формулы Даламбера [11, с. 59] следует, что $u(x,y) \equiv 0$ в области $\Omega_1$ как решение однородной задачи Коши (5) для однородного волнового уравнения. А в области $\Omega_2$ приходим к задаче нахождения решения однородного уравнения $u_{xxx} - u_y = 0$, удовлетворяющего однородному начальному условию $u(x,0) = 0$ и однородным граничным условиям $u(0,y) = 0, \quad u_x(0,y) = 0, \quad u(r,y) = 0$, которая, как показано в [10, с. 144], имеет только тривиальное решение $u(x,y) = 0 \ \forall \ (x,y) \in \overline{\Omega}_2$. Таким образом, решение $u(x,y)$ однородной задачи 1 тождественно равна нулю во всей области $\overline{\Omega}$. Теорема 1 доказана.

## Теорема существования

.

**Теорема 2**. *При условиях* (4) *на коэффициенты* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *решение задачи 1 существует*.

*Доказательство*. Исключая из полученных выше фундаментальных соотношений (6) и (11) функцию $\nu(x)$, относительно функции $\tau(x)$ приходим к задаче нахождения решения уравнения

$$\tau'''(x) - \frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\tau'(x) - \left(\frac{2\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)'\tau(x) = -f(x,0) +$$

$$+\frac{\psi(0)-\alpha(0)\varphi_1(0)}{\beta(0)}\left(\frac{2\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)' - \left(\frac{2\psi(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)' + \int_{-x/2}^{0} f(x+t,t)\,dt, \qquad (15)$$

удовлетворяющего условиям (7).

Решение задачи (7) для уравнения (15) эквивалентно решению интегрального уравнения вида

$$\tau(x) + \int_0^r K(x,t)\,\tau(t)\,dt = F(x). \qquad (16)$$

Здесь

$$K(x,t) = \frac{1}{r^2}\begin{cases} x^2(r-t)\,p(t), & 0 \le x \le t, \\ \left(x^2(r-t) - r^2(x-t)\right)\,p(t), & t \le x \le r, \end{cases} \qquad p(x) = \frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)},$$

$$F(x) = \left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\varphi_1(0) + \frac{x(r-x)}{2}\varphi_2(0) + \frac{x^2}{r^2}\varphi_3(0) - \frac{x^2}{2r^2}\int_0^r (r-t)^2 \int_{-t/2}^{0} f(t+s,s)\,ds dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 \int_{-t/2}^{0} f(t+s,s)\,ds dt + \frac{x^2}{2r^2}\int_0^r (r-t)^2 f(t,0)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t,0)\,dt +$$

$$+\frac{2x^2}{r^2\beta(0)}\int\limits_0^r \frac{\beta(0)\psi(t)-\beta(t)\psi(0)+\beta(t)\alpha(0)\varphi_1(0)}{\alpha(t)-\beta(t)}(r-t)\,dt-$$

$$-\frac{2}{\beta(0)}\int\limits_0^x \frac{\beta(0)\psi(t)-\beta(t)\psi(0)+\beta(t)\alpha(0)\varphi_1(0)}{\alpha(t)-\beta(t)}(x-t)\,dt.$$

На основании свойств (4) заданных коэффициентов $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, а также свойств заданных функций $\varphi_i(y)$, $i=\overline{1,3}$, $\psi(x)$ заключаем, что уравнение (16) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода с ядром $K(x,t)\in C([0,r]\times[0,r])$ и с правой частью из класса $C^1[0,r]$. Однозначная и безусловная разрешимость уравнения (16) вытекает из единственности решения задачи 1, причем решение $\tau=\tau(x)$ уравнения (16) будет принадлежать классу $\tau(x)\in C[0,r]\cap C^3]0,r[$. По найденному значению $\tau=\tau(x)$ из фундаментальных соотношений (6) или (11) можно найти и функцию $\nu(x)$.

В случае когда коэффициенты $\alpha(x)=\alpha=const$, $\beta(x)=\beta=const$ являются постоянными действительными числами относительно искомой функции $\tau=\tau(x)$ приходим к задаче:

$$\tau'''(x)-\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\tau'(x)=\int\limits_{-x/2}^{0} f(x+s,s)\,ds-f(x,0)-\frac{2\psi'(x)}{\alpha-\beta},\quad 0<x<r, \tag{17}$$

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\ \tau'(0)=\varphi_2(0),\ \tau(r)=\varphi_3(0), \tag{18}$$

решение которого выписывается в явном виде по формуле:

$$\tau(x)=\int\limits_0^r G(x,t)\int\limits_{-t/2}^{0} f(t+s,s)\,ds\,dt-\int\limits_0^r G(x,t)f(t,0)\,dt-\frac{2}{\alpha-\beta}\int\limits_0^r G(x,t)\psi'(t)\,dt-$$

$$-\frac{\alpha+\beta}{r^2(\alpha-\beta)}\left[2\varphi_1(0)\int\limits_0^r tG(x,t)\,dt-\varphi_2(0)r\int\limits_0^r(r-2t)G(x,t)\,dt-2\varphi_3(0)\int\limits_0^r tG(x,t)\,dt\right]+$$

$$+\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\varphi_1(0)+\frac{x(r-x)}{r}\varphi_2(0)+\frac{x^2}{r^2}\varphi_3(0),$$

где $G(x,t)$ есть функция Грина задачи (17)-(18), значение которого определяется по формуле:

$$G(x,t)=\frac{1}{\kappa^2}\begin{cases} b(1-\cos(\kappa x)), & 0\le x\le t,\\ b(1-\cos(\kappa x))-\cos(\kappa x-\kappa t)-1, & t\le x\le r,\end{cases}$$

$$\kappa=\sqrt{\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}}\neq\frac{2\pi n}{r},\ n\in N,\quad b=-\frac{1-\cos(\kappa r-\kappa t)}{1-\cos(\kappa r)}.$$

После того как функции $\tau=\tau(x)$ и $\nu=\nu(x)$ найдены, решение *задачи 1* в области $\Omega_1$ определяется как решение задачи Коши (5) для уравнения (1) и выписывается по формуле Даламбера [11, с. 59], а в области $\Omega_2$ приходим к задаче нахождения регулярного решения уравнения (1), удовлетворяющего граничным условиям (2) и начальному условию $u(x,0)=\tau(x)$, решение которой выписано в [10, с. 132].

## Список литературы


[1] Нахушев А.М., *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*, «Наука», М., 2006, 287 с. [Nahushev A.M., *Zadachi so smeshcheniem dlya uravnenij v chastnyh proizvodnyh*, «Nauka», M., 2006, 287 pp.]

[2] Нахушев А.М., “О некоторых новых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа”, *Дифференц. уравнения*, **5**:1 (1969), 44–59. [Nahushev A.M., “O nekotoryh novyh kraevyh zadachah dlya giperbolicheskih uravnenij i uravnenij smeshannogo tipa”, *Differencial'nye uravneniya*, **5**:1 (1969), 44–59].

[3] Жегалов В.И., “Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии”, *Ученые записки Казанского государственного университета*, **122**:3 (1962), 3–16. [ZHegalov V.I., “Kraevaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo tipa s granichnymi usloviyami na obeih harakteristikah i s razryvami na perekhodnoj linii”, *Uchenye zapiski Kazanskogo gosudarstvennogo universiteta*, **122**:3 (1962), 3–16].

[4] Нахушев А.М., *Уравнения математической биологии*, «Высшая школа», М., 1995, 301 с. [Nahushev A.M., *Uravneniya matematicheskoj biologii*, «Vysshaya shkola», M., 1995, 301 pp.]

[5] Берс Л., *Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики*, «Иностранная литература», М., 1961, 208 с. [Bers L., *Matematicheskie voprosy dozvukovoj i okolozvukovoj gazovoj dinamiki*, «Inostrannaya literatura», M., 1961, 208 pp.]

[6] Франкль Ф.И., “Два газодинамических приложения краевой задачи Лаврентьева-Бицадзе”, *Вестник ЛГУ. Серия математика, механика и астрономия*, **6**:11 (1951), 3–7. [Frankl' F.I., “Dva gazodinamicheskih prilozheniya kraevoj zadachi Lavrent'eva-Bicadze”, *Vestnik LGU. Seriya matematika, mekhanika i astronomiya*, **6**:11 (1951), 3–7].

[7] Репин О.А., *Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов*, Издательство Самарского филиала Саратовского государственного университета, Самара, 1992, 161 с. [Repin O.A., *Kraevye zadachi so smeshcheniem dlya uravnenij giperbolicheskogo i smeshannogo tipov*, Izdatel'stvo Samarskogo filiala Saratovskogo gosudarstvennogo universiteta, Samara, 1992, 161 pp.]

[8] Елеев В.А., Кумыкова С.К., “Внутреннекраевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками”, *Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН*, 2010, № 5, 5–14. [Eleev V.A., Kumykova S.K., “Vnutrennekraevaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo tipa tret'ego poryadka s kratnymi harakteristikami”, *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo centra RAN*, 2010, № 5, 5–14].

[9] Репин О.А., Кумыкова С.К., “Задача со смещением для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки*, 2012, № 4(29), 17–25. [Repin O.A., Kumykova S.K., “Zadacha so smeshcheniem dlya uravneniya tret'ego poryadka s razryvnymi koehfficientami”, *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskie nauki*, 2012, № 4(29), 17–25].

[10] Джураев Т.Д., *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов*, «ФАН», Ташкент, 1979, 236 с. [Dzhuraev T.D., *Kraevye zadachi dlya uravnenij smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov*, «FAN», Tashkent, 1979, 236 pp.]

[11] Тихонов А.Н., Самарский А.А., *Уравнения математической физики*, «Наука», Москва, 1977, 736 с. [Tihonov A.N., Samarskij A.A., *Uravneniya matematicheskoj fiziki*, «Nauka», Moskva, 1977, 736 pp.]


## Список литературы (ГОСТ)


[1] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.

[2] Нахушев А.М. О некоторых новых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. №1. С. 44–59.

[3] Жегалов В.И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии // Ученые записки Казанского государственного университета. 1962. Т. 122. №3. С. 3–16.
[4] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
[5] Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Иностранная литература, 1961. 208 с.
[6] Франкль Ф.И. Два газодинамических приложения краевой задачи Лаврентьева-Бицадзе // Вестник ЛГУ. Серия математика, механика и астрономия. 1951. Т. 6. № 11. С. 3–7.
[7] Репин О.А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Самара:Издательство Самарского филиала Саратовского государственного университета, 1992. 161 с.
[8] Елеев В.А., Кумыкова С.К. Внутреннекраевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2010. №5. С. 5–14.
[9] Репин О.А., Кумыкова С.К. Задача со смещением для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки. 2012. №4(29). С. 17–25.
[10] Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН, 1979. 236 с.
[11] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

**Для цитирования:** Балкизов Ж. А. Краевая задача со смещением для модельного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 3(23). С. 19-26. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-19-26

**For citation:** Balkizov Zh. A. A boundary value problem with displacement for a model equation of a parabolic-hyperbolic type of the third order, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018, **23**: 3, 19-26. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-19-26

Поступила в редакцию / Original article submitted: 08.06.2018