Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 3(23). С. 14-18. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-14-18

АНАЛИЗ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.95

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ВДОЛЬ ОДНОЙ ИЗ СВОИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. Х. Аттаев

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а

E-mail: attaev.anatoly@yandex.ru

Для нагруженного гиперболического уравнения с волновым оператором в главной части рассматривается задача Гурса. Доказаны единственность и существование решения. Решение искомой задачи выписано в явном аналитическом виде

Ключевые слова: задача Гурса, нагруженное дифференциальное уравнение, уравнение Вольтерра второго рода, регулярное решение.

ANALYSIS, DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMUM CONTROL

MSC 35M12

THE CHARACTERISTIC PROBLEM FOR THE SECOND-ORDER HYPERBOLIC EQUATION LOADED ALONG ONE OF ITS CHARACTERISTICS

A. Kh. Attaev

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89a, Russia

E-mail: attaev.anatoly@yandex.ru

In this paper, we consider the Goursat problem for a loaded hyperbolic equation with the wave operator in the principal part. We prove the uniqueness and existence of solution for the problem under study, and give the solution in the closed form.

Key words: Goursat problem, wave operator, hyperbolic equation, loaded differential equation.

Введение

Исследование краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений на сегодняшний момент является весьма актуальной.

Глубокая связь между локальными краевыми задачами для нагруженных дифференциальных уравнений и нелокальными краевыми задачами для обычных дифференциальных уравнений является постоянным толчком к развитию исследований в этом научном направлении. Впервые на связь нелокальных краевых задач со смещением с нагруженными уравнениями обратил внимание А. М. Нахушев в работе [1], а в работе [2] им был приведен пример нагруженного вырождающегося гиперболического уравнения для которого устраняется эффект неравноправия характеристик второй задачи Дарбу, имеющийся для этого уравнения, когда нагруженное слагаемое отсутствует. Исследованию задачам с данными на характеристических многообразиях для нагруженных строго и слабо гиперболических уравнений посвящены работы [3] – [8].

В данной работе обьектом исследования является нагруженное гиперболическое уравнение вида

$$u_{xx}-u_{yy}=\lambda u\left(\frac{x+y+x_0}{2},\frac{x+y-x_0}{2}\right), \tag{1}$$

где λ и x_0 - произвольные действительные числа, причем $0\leq x_0\leq 1$.

Задача Гурса

Пусть Ω - конечная односвязная область евклидовой плоскости переменных x и y, ограниченная характеристиками $x-y=0$, $x-y=1$, $x+y=0$ и $x+y=1$ уравнения (1).

Задача Гурса. В области Ω найти решение уравнения (1) из класса $C(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\left(\frac{x}{2},\frac{x}{2}\right)=\psi(x), \quad 0\leq x\leq 1, \tag{2}$$

$$u\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)=\phi(x), \quad 0\leq x\leq 1, \tag{3}$$

где $\bar{\Omega}$ -замыкание области Ω.

Предполагается, что, $\phi,\psi\in C(\bar{J})$, где $\bar{J}$ - замыкание интервала $J=\{(x,y):0<x<1, y=0\}$.

В характеристических переменных $\xi=x-y$, $\eta=x+y$ уравнение (1) и краевые условия (2), (3) принимают вид

$$v_{\xi\eta}=\frac{\lambda}{4}v(x_0,\eta) \tag{4}$$

$$v(\xi,0)=\phi(\xi), \quad 0\leq\xi\leq 1, \tag{5}$$

$$v(0,\eta)=\psi(\eta), \quad 0\leq\eta\leq 1, \tag{6}$$

где $v(\xi,\eta)=u\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\eta-\xi}{2}\right)$.

Область Ω переходит в прямоугольную область $\Omega_1 = \{(\xi,\eta) : 0<\xi<1, 0<\eta<1\}$, ограниченную характеристиками $\xi=0$, $\xi=1$, $\eta=0$, $\eta=1$ уравнения (4).

Пусть существует решение задачи Гурса (5), (6) для уравнения (4), тогда легко видеть, что для нахождения $v(\xi,\eta)$ получаем следующее нагруженное интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$v(\xi,\eta)=\phi(\xi)+\psi(\eta)-\phi(0)+\frac{\lambda\xi}{4}\int\limits_0^\eta v(x_0,t)dt. \tag{7}$$

Полагая в (7) $\xi=x_0$, для нахождения $v(x_0,\eta)$ получаем интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода

$$v(x_0,\eta)-\frac{\lambda x_0}{4}\int\limits_0^\eta v(x_0,t)dt=\Phi(\eta), \tag{8}$$

где $\Phi(\eta)=\psi(\eta)+\phi(x_0)-\phi(0)$.

Вводя обозначения $z(\eta)=v(x_0,\eta)-\Phi(\eta)$ и дифференцируя обе части (8), для нахождения $z(\eta)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$z'(\eta)-\frac{\lambda x_0}{4}z(\eta)=\frac{\lambda x_0}{4}\Phi(\eta),$$

отсюда

$$\left(ze^{-\frac{\lambda x_0}{4}\eta}\right)'=\frac{\lambda x_0}{4}e^{-\frac{\lambda x_0\eta}{4}}\Phi(\eta).$$

Интегрируя обе части последнего равенства от 0 до η и, учитывая, что $\lim\limits_{\eta\to 0}z(\eta)=0$, получаем

$$z(\eta)=\frac{\lambda x_0}{4}\int\limits_0^\eta e^{\frac{\lambda x_0}{4}(\eta-t)}\Phi(t)dt.$$

Следовательно

$$v(x_0,\eta)=\Phi(\eta)+\frac{\lambda x_0}{4}\int\limits_0^\eta e^{\frac{\lambda x_0}{4}(\eta-t)}\Phi(t)dt. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (7) будем иметь

$$v(\xi,\eta)=\phi(\xi)+\psi(\eta)-\phi(0)+\frac{\lambda\xi}{4}\int\limits_0^\eta \Phi(t)dt+\frac{\lambda^2\xi x_0}{16}\int\limits_0^\eta\int\limits_0^t e^{\frac{\lambda x_0}{4}(\eta-\xi_1)}\Phi(\xi_1)d\xi_1 dt.$$

Поменяв порядок интегрирования в двойном интеграле, после некоторых преобразований, получим

$$v(\xi,\eta)=\phi(\xi)+\psi(\eta)-\phi(0)+\frac{\lambda\xi}{4}\int\limits_0^\eta\left[\phi(x_0)+\psi(t)-\phi(0)\right]e^{\frac{\lambda x_0}{4}(\eta-t)}dt.$$

Отсюда, возвращаясь к исходным переменным, получим

$$u(x,y)=\phi(x-y)+\psi(x+y)-\phi(0)+\frac{\lambda(x-y)}{4}\int\limits_0^{x+y}[\phi(x_0)+\psi(t)-\phi(0)]\,e^{\frac{\lambda x_0}{4}(x+y-t)}dt. \quad (10)$$

Принимая во внимание условия гладкости на заданные функции ϕ и ψ, непосредственной проверкой можно убедиться в том, что задаваемая формулой (10) функция $u(x,y)$ является регулярным в области Ω решением задачи (2), (3) для уравнения (1) из класса $C(\bar{\Omega})$.

Из (10) вытекает следующее очевидное утверждение. Если $\psi(x)\equiv\phi(0)-\phi(x_0)$, то для любого λ решение задачи Гурса (2), (3) для уравнения (1) совпадает с решением этой задачи для однородного волнового уравнения. Действительно, если $\psi(x)\equiv\phi(0)-\phi(x_0)$, то из (10) имеем, что

$$u(x,y)=\phi(x-y)-\phi(x_0),$$

стало быть

$$u\left(\frac{x+y+x_0}{2},\frac{x+y-x_0}{2}\right)=\phi(x_0)+\psi(x+y)-\phi(0)=\phi(x_0)+\phi(0)-\phi(x_0)-\phi(0)=0,$$

то есть уравнение (1) совпадает с одномерным волновым уравнением.

Итак, доказана следующая

Теорема. *Единственное и устойчивое решение $u(x,y)$ задачи Гурса (2), (3) для уравнения (1) определяется формулой (10). Это решение совпадает с решением задачи (2), (3) для уравнения $u_{xx}-u_{yy}=0$ тогда и только тогда, когда*

$$\lambda[\phi(x_0)+\psi(x)-\phi(0)]\equiv 0.$$

Список литературы

[1] Нахушев А. М., “О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями”, *Дифференциальные уравнения*, **21**:1 (1985), 92–102. [Nahushev A. M., “O nelokal’nyh kraevyh zadachah so smeshcheniem i ih svyazi s nagruzhennymi uravneniyami”, *Differencial’nye uravneniya*, **21**:1 (1985), 92–102].

[2] Нахушев А. М., “О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегродифференциального уравнения второго порядка”, *Дифференциальные уравнения*, **12**:1 (1976), 103–108. [Nahushev A. M., “O zadache Darbu dlya odnogo vyrozhdayushchegosya nagruzhennogo integrodifferencial’nogo uravneniya vtorogo poryadka”, *Differencial’nye uravneniya*, **12**:1 (1976), 103–108].

[3] Казиев В. М., “Задача Гурса для одного нагруженного интегродифференциального уравнения”, *Дифференциальные уравнения*, **17**:2 (1981), 313–319. [Kaziev V. M., “Zadacha Gursa dlya odnogo nagruzhennogo integrodifferencial’nogo uravneniya”, *Differencial’nye uravneniya*, **17**:2 (1981), 313–319].

[4] Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И., “О граничной задаче для нагруженного гиперболического уравнения”, *Дифференциальные уравнения и теория колебаний*, Тезисы Респ. научн. конф. 10-12 октябрь 2002, Алматы, 2002, 31–32. [Dzhenaliev M. T., Ramazanov M. I., “O granichnoj zadache dlya nagruzhennogo giperbolicheskogo uravneniya”, *Differencial’nye uravneniya i teoriya kolebanij*, Tezisy Resp. nauchn. konf. 10-12 oktyabr’ 2002, Almaty, 2002, 31–32].

[5] Аттаев А. Х., “Задача Гурса для локально-нагруженного уравнения со степенным параболическим вырождением”, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **10**:2 (2008), 14–17. [Attaev A. H., “Zadacha Gursa dlya lokal’no-nagruzhennogo uravneniya so stepennym parabolicheskim vyrozhdeniem”, *Doklady Adygskoj (CHerkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk*, **10**:2 (2008), 14–17].

[6] Аттаев А. Х., “Задача Гурса для нагруженного гиперболического уравнения”, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **16**:3 (2014), 9–12. [Attaev A. H., “Zadacha Gursa dlya nagruzhennogo giperbolicheskogo uravneniya”, *Doklady Adygskoj (CHerkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk*, **16**:3 (2014), 9–12].

[7] Аттаев А. Х., “Характеристическая задача для нагруженного гиперболического уравнения с особым сдвигом”, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **17**:2 (2015), 3–7. [Attaev A. H., “Harakteristicheskaya zadacha dlya nagruzhennogo giperbolicheskogo uravneniya s osobym sdvigom”, *Doklady Adygskoj (CHerkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk*, **17**:2 (2015), 3–7].

[8] Аттаев А. Х., “Задача Гурса для нагруженного вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка с оператором Геллерстедта в главной части”, *Вест. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.- мат. науки*, **20**:1 (2016), 1–15. [Attaev A. H., “Zadacha Gursa dlya nagruzhennogo vyrozhdayushchegosya giperbolicheskogo uravneniya vtorogo poryadka s operatorom Gellerstedta v glavnoj chasti”, *Vest. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.- mat. nauki*, **20**:1 (2016), 1–15].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Нахушев А. М. О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. №1. С. 92–102.

[2] Нахушев А. М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегродифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12. № 1. С. 103–108.

[3] Казиев В. М. Задача Гурса для одного нагруженного интегродифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17. №2. С. 313–319.

[4] Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. О граничной задаче для нагруженного гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения и теория колебаний. Тезисы Респ. научн. конф. 10-12 октябрь 2002. Алматы. 2002. С. 31–32.

[5] Аттаев А. Х. Задача Гурса для локально-нагруженного уравнения со степенным параболическим вырождением // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2008. Т. 10. №2. С. 14–17.

[6] Аттаев А. Х. Задача Гурса для нагруженного гиперболического уравнения // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т. 16. №3. С. 9–12.

[7] Аттаев А. Х. Характеристическая задача для нагруженного гиперболического уравнения с особым сдвигом // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17. № 2. С. 3–7.

[8] Аттаев А. Х. Задача Гурса для нагруженного вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка с оператором Геллерстедта в главной части // Вест. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.- мат. науки. 2016. Т. 20. № 1. С. 1–15.

Для цитирования: Аттаев А.Х. Характеристическая задача для нагруженного вдоль одной из своих характеристик гиперболического уравнения второго порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2018. № 3(23). C. 14-18. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-14-18

For citation: Attaev A.Kh. The characteristic problem for the second-order hyperbolic equation loaded along of its characteristics, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2018, **23**: 3, 14-18. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-14-18

Поступила в редакцию / Original article submitted: 08.06.2018