

УДК 512.24

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧЕК ПОКОЯ ЭРЕДИТАРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ-ДУФФИНГА*

Е. Р. Новикова¹, Р. И. Паровик^{1,2}

¹ Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032,
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

² Институт космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
684034, с. Паратунка, ул. Мирная, 7, Россия

E-mail: elizaveta_333@mail.ru

В работе с помощью численного моделирования построены осциллограммы и фазовые траектории с целью исследования предельных циклов нелинейной колебательной системы Ван-дер-Поля Дуффинга со степенной памятью. Результаты моделирования показали, что в случае отсутствия степенной памяти ($\alpha = 2$, $\beta = 1$) или классической динамической системы Ван-дер-Поля Дуффинга, существует единственный устойчивый предельный цикл, т.е. выполняется теорема Лъенара. В случае вязкого трения ($\alpha = 2$, $0 < \beta < 1$), существует семейство устойчивых предельных циклов различной формы. В остальных случаях происходит разрушение предельного цикла по двум сценариям: бифуркация Хопфа (предельный цикл-предельная точка) или (предельный цикл-аперiodический процесс). Дальнейшее продолжение исследований может быть связано с построением спектра максимальных показателей Ляпунова с целью идентификации хаотических колебательных режимов для рассматриваемой эредитарной динамической системы (ЭДС).

Ключевые слова: предельный цикл, осциллятор Ван-дер-Поля Дуффинга со степенной памятью, бифуркация Хопфа, осциллограммы и фазовые траектории

© Новикова Е. Р., Паровик Р. И., 2019

Введение

В настоящее время широкое распространение получили ЭДС, которые рассматриваются в рамках теории дробной динамики [1],[2]. Согласно этой теории, ЭДС обладают эффектами памяти или эредитарности, которые проявляются тем, что текущие состояния таких систем зависят от конечного числа предыдущих состояний (предыстории).

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ № МК-1152.2018.1

Точкой отчета в исследовании ЭДС является работа итальянского математика В. Вольтерра [3], в которой впервые была исследована эредитарная колебательная система - эредитарный осциллятор, с помощью интегро-дифференциального уравнения с разностным ядром – функцией памяти было дано его математическое описание, получено соотношение для полной механической энергии. Показано, что в этом соотношении появляется дополнительное слагаемое, которое отвечает за диссипацию энергии в колебательной системе. Далее развитие получила эредитарная механика благодаря работам А.П. Вронского, Ю.Н. Работнова, А.Н. Герасимова, Г.Л. Слонимского, в которых было дано описание вязко-упругих тел [2]. Потом появились работы по описанию ЭДС в экономике, биологии и в других науках.

Другой подход в исследовании ЭДС был предложен в работах Ф. Майнарди, Р.П. Мейланова, В.А. Нахушевой, И. Петраса, Р.И. Паровика и других исследователей. Согласно этим работам ЭДС можно исследовать с помощью теории дробного исчисления [4], если функцию памяти выбрать степенной. Тогда интегро-дифференциальные уравнения, которые описывают ЭДС, переходят в уравнения с производными дробных порядков, которые в той или иной степени связаны фрактальной размерностью среды. Поэтому такие ЭДС называют дробными или фрактальными [5]-[8].

В настоящей работе мы исследуем одну из таких ЭДС – эредитарный (дробный) осциллятор Ван-дер-Поля Дуффинга (ЭВПД) [9], [10].

Постановка задачи и метод решения

Задача Коши для динамической системы Ван-дер-Поля – Дуффинга (ВПД) со степенной памятью, имеет вид [10]:

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(\tau) - (\lambda - x^2(t)) \partial_{0t}^{\beta} x(\tau) + x(t) + \zeta x^3(t) = c \sin \omega t, x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_1, \quad (1)$$

где

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}}, \partial_{0t}^{\beta} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\beta}}.$$

операторы производных дробных в смысле Герасимова-Капуто порядков $1 < \alpha < 2$, $0 < \beta < 1$, λ – управляющий параметр, ω – частота внешнего воздействия, c – его амплитуда, ζ - параметр фазовой нелинейности; $x(t)$ – функция решения, мембранный потенциал; $t \in [0, T]$ - время процесса; $T > 0$ – время моделирования; x_0, x_1 – заданные константы.

Задача Коши (1) описывает ЭВПД, который является обобщением классического осциллятора Ван-дер-Поля – Дуффинга и совпадает с ним, когда в уравнении (1) $\alpha = 2, \beta = 1$, т.е. в случае отсутствия степенной памяти. Задача Коши (1) в общем виде не имеет точного решения в силу того, что модельное уравнение является нелинейным, поэтому ее решение будем искать с помощью численных методов, теории конечно-разностных схем. В работе была получена и исследована с помощью правила Рунге

нелокальная явная конечно-разностная схема:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \xi + \tau\eta, k = 0, \\ x_2 = \Psi [(2A - B(\lambda - x_1^2) - 1) \cdot x_1 - \zeta x_1^3 - Ax_0 + c \sin(\omega\tau)], k = 1 \\ x_{k+1} = \Psi \left(\begin{array}{l} (2A - B(\lambda - x_k^2) - 1) \cdot x_k - \zeta x_k^3 - Ax_{k-1} + c \sin(\omega k\tau) + \\ + B(\lambda - x_k^2) \cdot \sum_{j=1}^{k-1} (b_j(x_{k+1} - x_k)) - A \cdot \sum_{j=1}^{k-1} (a_j(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1})) \end{array} \right), \quad (2) \\ A = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3 - \alpha)}, B = \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2 - \beta)}, \Psi = \frac{1}{A - B(\lambda - x_1^2)}, k = 2, \dots, n - 1. \end{array} \right.$$

Вопросы устойчивости и сходимости семейства нелокальных явных конечно-разностных схем типа (2) были рассмотрены в работе [2].

С помощью схемы (2) далее были получены и исследованы осциллограммы и фазовые траектории.

Результаты моделирования и их обсуждение

Рассмотрим конкретный пример. Выберем значения управляющих параметров: $c = 0.05, \omega = 0.06, \xi = 0.5, \lambda = 0.5$, которые были взяты из работы [10], для расчетной явной конечно-разностной схемы (2) выберем параметры: $c = 0.05, \omega = 0.06, \xi = 0.5, \lambda = 0.5$, которые были взяты из работы [10], для расчетной явной конечно-разностной схемы (2) выберем $t \in [0, 100], N = 2000, \tau = 0.05, \alpha = 2$. Построим осциллограммы и фазовые траектории при различных значениях β и начальных условиях задачи Коши (1). Результаты моделирования приведены на рис. 1.

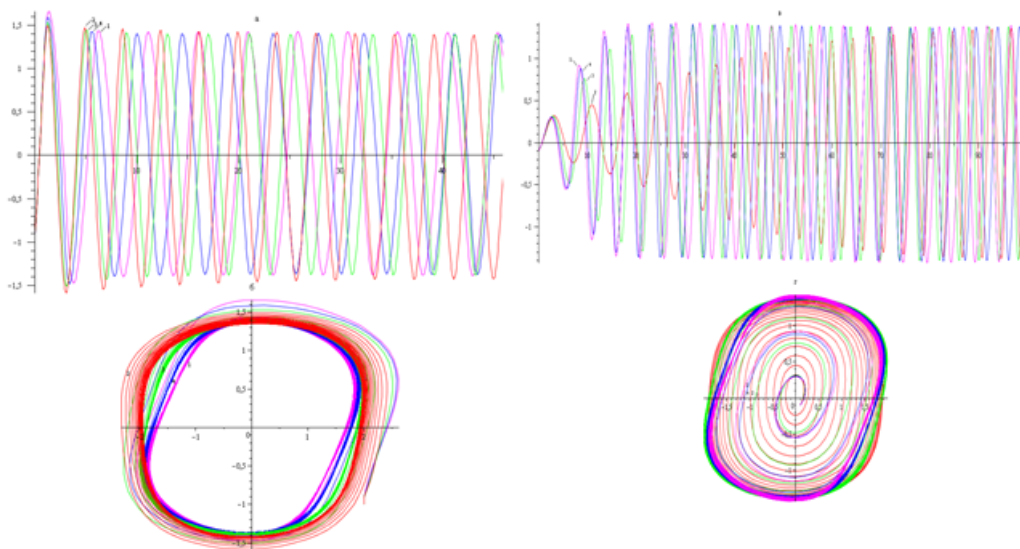


Рис. 1. Осциллограммы а) $x(0) = -1, \dot{x}(0) = 2$; в) $x(0) = -0.1, \dot{x}(0) = 0.1$ и фазовые траектории б) $x(0) = -1, \dot{x}(0) = 2$; г) $x(0) = -0.1, \dot{x}(0) = 0.1$: кривая 1- $\alpha = 2, \beta = 1$; кривая 2- $\alpha = 2, \beta = 0.1$; кривая 3- $\alpha = 2, \beta = 0.5$; кривая 4- $\alpha = 2, \beta = 0.8$

На рис. 1 приведены осциллограммы и фазовые траектории, полученные с помощью явной конечно-разностной схемы (2) при выборе начальных условий: $x(0) = -1, \dot{x}(0) = 2$; $x(0) = -0.1, \dot{x}(0) = 0.1$, которые соответствуют внутренним и внешним

точкам предельного цикла. Видно, что при фиксированном значении $\alpha = 2$ и изменении значений $0 < \beta < 1$ мы получаем семейство устойчивых предельных циклов, в классическом случае ($\alpha = 2, \beta = 1$) устойчивый предельный цикл единственный, что соответствует теореме Лъенара.

Выясним возможность существования предельного цикла в случае изменения значений параметра β . Рассмотрим случай, когда при фиксированном значении параметра $\alpha = 1.8$, изменяются значения параметра $0 < \beta < 1$, значения остальных параметров возьмем из предыдущего примера. Для этого случая осциллограммы и фазовые траектории приведены на рис. 2.

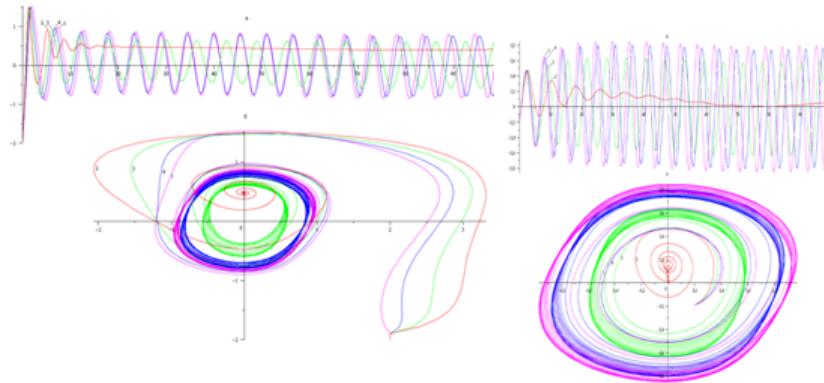


Рис. 2. Осциллограммы а) $x(0) = -2, \dot{x}(0) = 2$; в) $x(0) = -0.2, \dot{x}(0) = 0.2$ и фазовые траектории б) $x(0) = -2, \dot{x}(0) = 2$; г) $x(0) = -0.2, \dot{x}(0) = 0.2$: кривая 1- $\alpha = 1.8, \beta = 1$; кривая 2- $\alpha = 1.8, \beta = 0.1$; кривая 3- $\alpha = 1.8, \beta = 0.5$; кривая 4- $\alpha = 1.8, \beta = 0.8$

На рис. 2. мы можем увидеть, что в случае внешней точки $x(0) = -2, \dot{x}(0) = 2$ рис.2а при $\beta \rightarrow 0$ все фазовые траектории соответствуют затухающим колебаниям (предельной точке), а для внутренней точки $x(0) = -0.2, \dot{x}(0) = 0.2$ при $\beta \rightarrow 0$ мы видим, что могут существовать другие предельные циклы прежде, чем фазовые траектории будут соответствовать предельной точке. Поэтому эти случаи соответствуют бифуркациям Хопфа.

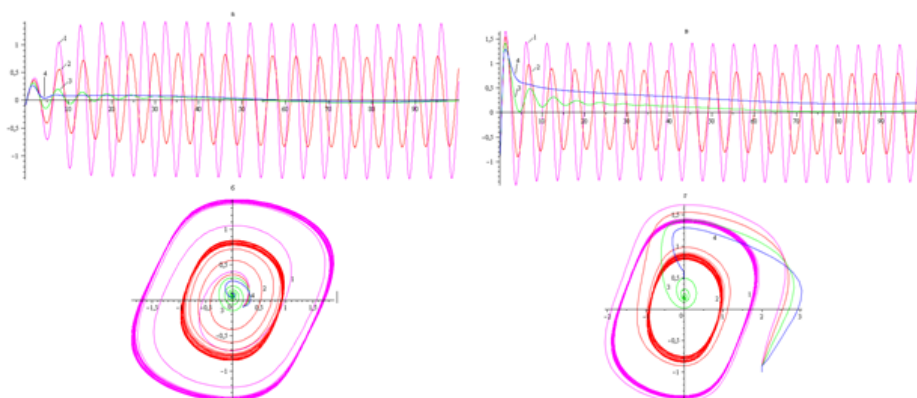


Рис. 3. Осциллограммы а) $x(0) = -0.1, \dot{x}(0) = 0.2$; в) $x(0) = -1, \dot{x}(0) = 2$ и фазовые траектории б) $x(0) = -0.1, \dot{x}(0) = 0.2$; г) $x(0) = -1, \dot{x}(0) = 2$: кривая 1- $\alpha = 2, \beta = 1$; кривая 2- $\alpha = 1.8, \beta = 1$; кривая 3- $\alpha = 1.6, \beta = 1$; кривая 4- $\alpha = 1.4, \beta = 1$

Заключение

В работе была рассмотрена модель эредитарного осциллятора Ван-дер-Поля Дуффинга. Были найдены численные решения, построены осцилляторы и фазовые портреты. Анализ результатов показал, что существование предельных циклов напрямую зависит от параметров α и β , а также от выбора начальных условий – в пределах цикла или вне цикла, например, при уменьшении параметра β , при $\alpha = 1.8$ и при выборе начального условия фазовые траектории будут соответствовать бифуркациям Хопфа. А при фиксированном значении $\alpha = 2$ и изменении значений $0 < \beta < 1$ мы получаем семейство устойчивых предельных циклов.

Список литературы/References

- [1] Petras I., *Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation*, Springer, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011, 218 pp.
- [2] Паровик Р.И., *Математическое моделирование нелинейных эредитарных осцилляторов*, монография, КамГУ им. Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, 2017, 134 с. [Parovik R.I., *Matematicheskoe modelirovanie nelinejnyh ehreditarnyh oscillyatorov [Mathematical modeling of nonlinear hereditary oscillators]*, monografiya, KamGU im. Vitusa Beringa, Petropavlovsk-Kamchatskij, 2017 (in Russia), 134 pp.]
- [3] Вольтерра В., *Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1982. [Vol'terra V., *Teoriya funkcionalov, integral'nyh i integro-differencial'nyh uravnenij [Theory of functionals, integral and integro-differential equations]*, Nauka, M., 1982 (in Russia)].
- [4] Нахушев А.М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с. [Nahushev A.M., *Drobnое ischislenie i ego primenenie [Fractional calculus and its application]*, Fizmatlit, M., 2003 (in Russia), 272 pp.]
- [5] Мейланов Р. П., Янполов М. С., “Особенности фазовой траектории фрактального осциллятора”, *Письма в ЖТФ*, **28**:1 (2002), 67-73. [Meilanov R. P., Yanpolov M. S., “Features of the phase trajectory of a fractal oscillator”, *Technical Physics Letters*, **28**:1 (2002), 30-32 (in Engl. trans.)].
- [6] Паровик Р.И., “Задача Коши для нелокального уравнения Матье”, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **13**:2 (2011), 90-98. [Parovik R.I., “Zadacha Koshi dlya nelokal'nogo uravneniya Mat'e [Cauchy problem for the non-local Mathieu equation]”, *Doklady Adygskoj (CHerkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk*, **13**:2 (2011), 90-98 (in Russia)].
- [7] Паровик Р.И., “Математическая модель фрактального осциллятора Ван-дер-Поля”, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **17**:2 (2015), 57-62. [Parovik R.I., “Matematicheskaya model' fraktal'nogo oscillyatora Van-der-Polya [Mathematical model of the fractal van der Pol oscillator]”, *Doklady Adygskoj (CHerkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk*, **17**:2 (2015), 57-62].
- [8] Огородников Е.Н., “Математические модели дробных осцилляторов, постановка и структура решения задачи Коши”, *Математическое моделирование и краевые задачи*. Т.1, 2009, 177–181. [Ogorodnikov E.N., “Matematicheskie modeli drobnnyh oscillyatorov, postanovka i struktura resheniya zadachi Koshi [Mathematical models of fractional oscillators, formulation and structure of the solution of the Cauchy problem]”, *Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi*. V. 1, 2009, 177–181].
- [9] Li S., Niu J., Li X., “Primary resonance of fractional-order Duffing–van der Pol oscillator by harmonic balance method”, *Chinese Physics B*, **27**:12 (2018), 120502.
- [10] Novikova E.R., “Van der Pol-Duffing oscillator with the effect of hereditary”, *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*, **17**:2 (2017), 65-75.

Список литературы (ГОСТ)

- [1] Petras I. Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation. Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2011. 218 p
- [2] Паровик Р.И. Математическое моделирование нелинейных эрдитарных осцилляторов: монография. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2017. 134 с.
- [3] Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1982.
- [4] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
- [5] Мейланов Р. П., Янполов М. С. Особенности фазовой траектории фрактального осциллятора // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28, № 1. С. 67-73.
- [6] Паровик Р.И. Задача Коши для нелокального уравнения Матье // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2011. Т. 13. № 2. С. 90-98.
- [7] Паровик Р.И. Математическая модель фрактального осциллятора Ван-дер-Поля // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17. № 2. С. 57-62.
- [8] Огородников Е.Н. Математические модели дробных осцилляторов, постановка и структура решения задачи Коши // Математическое моделирование и краевые задачи. 2009. Т. 1. С. 177–181.
- [9] Li S., Niu J., Li X. Primary resonance of fractional-order Duffing–van der Pol oscillator by harmonic balance method // Chinese Physics B. – 2018. – Т. 27. – №. 12. – С. 120502.
- [10] Novikova E.R. Van der Pol-Duffing oscillator with the effect of hereditary // Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2017. Vol. 17, no. 2. P. 65-75.

Для цитирования: Новикова Е. Р., Паровик Р. И. Исследование точек покоя эрдитарной динамической системы Ван дер Поля-Дуффинга // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2019. Т. 26. № 1. С. 71-77. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-71-77

For citation: Novikova E. R., Parovik R. I. Study points of rest hereditary dynamic systems Van der Pol-Duffing, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2019, **26**: 1, 71-77. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-71-77

Поступила в редакцию / Original article submitted: 14.02.2019

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-71-77

MSC 37N10

STUDY POINTS OF REST HEREDITARITY DYNAMIC SYSTEMS VAN DER POL-DUFFING¹

E. R. Novikova¹, R. I. Parovik^{1,2}

¹ Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia

² Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation FEB RAS, 684034, Kamchatsky Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

E-mail: elizaveta_333@mail.ru

Using numerical modeling, oscillograms and phase trajectories were constructed to study the limit cycles of a van der Pol Duffing nonlinear oscillatory system with a power memory. The simulation results showed that in the absence of a power memory ($\alpha = 2$, $\beta = 1$) or the classical van der Pol Duffing dynamical system, there is a single stable limit cycle, i.e. Lienar theorem holds. In the case of viscous friction ($\alpha = 2$, $0 < \beta < 1$), there is a family of stable limit cycles of various shapes. In other cases, the limit cycle is destroyed in two scenarios: a Hopf bifurcation (limit cycle-limit point) or (limit cycle-aperiodic process). Further continuation of the research may be related to the construction of the spectrum of Lyapunov maximal exponents in order to identify chaotic oscillatory regimes for the considered hereditary dynamic system (HDS).

Key words: limit cycle, exponential Van der Pol-Duffing oscillator, Hopf bifurcation, oscillograms and phase trajectories

© Novikova E. R., Parovik R. I., 2019

¹This work was supported by the grant of the President of the Russian Federation No. MK-1152.2018.1.