Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 26. № 1. C. 63-70. ISSN 2079-6641

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-63-70

УДК 512.24

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТОЧЕК ПОКОЯ ДРОБНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ФИТЦХЬЮ-НАГУМО*

О. Д. Липко

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4
E-mail: olgalipko95@mail.ru

В работе с помощью качественного анализа были исследованы на устойчивость точки покоя дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо в соизмеримом и несоизмеримом случаях. Для соответвующей точки покоя, с помощью численного метода теории конечно-разностных схем, была построена фазовая траектория. Показано, что точки покоя могут быть как асимптотически устойчивыми, что соответствуют устойчивым фокусам, так и являться асимптотически неустойчивыми (неустойчивыми фокусами), причем для них фазовые таректории, как правило, выходят на предельный цикл.

Ключевые слова: точки покоя, устойчивость, предельный цикл, дробный осциллятор ФитцХью-Нагумо, фазовые траектории.

Введение

Исследование точек покоя динамической системы является важным, так как в окрестности такой точки система может обладать сложной динамикой. Неисключением являются эредитарные динамические системы, которые исследуются в рамках дробной динамики. Например, в монографии [1] были исследованы точки покоя некоторых эредитарных колебательных систем – дробных осцилляторов. Дробные осцилляторы описывают колебательные процессы в диссипативной среде и обладают свойствами наследственности (эредитарности) или памяти [2]. Эффекты памяти в колебательной системе проявляются в том, что текущее состояние системы может зависеть от конечного числа ее предыдущих состояний. Такую нелокальность, как правило, с точки зрения математики можно описать с помощью теории интегро-дифференциальных уравнений [3] или с помощью теории дробного интегро-дифференцирования [4].

В качестве объекта исследования в этой статье мы выбирем одну из эредитарных колебательных систем – дробный осциллятор ФитцХью-Нагумо. Известно, что

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ №МК-1152.2018

классический осциллятор ФитцХью-Нагумо представляет интерес в биофизике при исследовании распространения нервного импульса в мембране [5], [6], а в геофизике при исследовании распространения сейсмичности [7].

Некоторые свойства дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо были рассмотрены в работах автора [8], [9], где была предложена и исследована нелокальная явная конечно-разностная схема, с помощью которой были построены осциллограммы и фазовые траектории, в работе [10] были исследованы с помощью спектров макимальных показателей Ляпунова хаотические и регулярные режимы, а в работе [11] исследованы вопросы устойчивости предельных циклов.

В этой работе, используя методику статьи [12] будут иссследованы точки покоя для соизмеримой и несоизмеримой эредитарной колебательной системы ФитцХью-Нагумо и построены соответствующие фазовые траектории.

Основные понятия и определения

Определение 1. Эредитарной колебательной системой ФитцХью-Нагумо или дробным осцилляторов ФитцХью-Нагумо будет назвать следующую систему:

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha_1} x(\tau) = c\cdot\left(y(t) + x(t) - \dfrac{x^3(t)}{3} + z\right), \\ \partial_{0t}^{\alpha_2} y(\tau) = -\dfrac{1}{c}\cdot(x(t) - a + by(t)), \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

где дифференциальные операторы:

$$\partial_{0t}^{\alpha_1} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)}\int\limits_0^t \frac{\dot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha_1}}, \quad \partial_{0t}^{\alpha_2} y(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_2)}\int\limits_0^t \frac{\dot{y}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha_2}}, \tag{2}$$

определены в смысле Герасимова-Капуто [13], [14] с дробными порядками $0.5 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$, a, b, c — константы, удовлетворяющие условиям $1 - 2b/3 < a < 1$, $0 < b < 1$, $b < c^2$, $x(t)$ — мембранный потенциал, $y(t)$ — отвечает за рефрактерность и аккомодацию, z — интенсивность раздражителя, $t \in [0,T]$ — время процесса, $T > 0$ — время моделирования, x_0 и y_0 – начальные условия.

Замечание 1. Отметим, что дробный осциллятор ФитцХью-Нагумо описывает нелинейные колебания в диссипативной среде и является примером генератора релаксационных колебаний в зависимости от порогового значения раздражителя z.

Замечание 2. Заметим, что дробный осциллятор ФитцХью-Нагумо (1) в предельном случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, переходит в классический осциллятор ФитцХью-Нагумо, исследованный в работах [5], [6].

Замечание 3. Небходимо отметить, что диапазоны изменения управляющих параметров системы (1) a, b, c были выбраны согласно работе [5].

Определение 2. Эредитарноую колебательную систему ФитцХью-Нагумо (1) будем называть соизмеримой, если выполняется равенство $\alpha_1 = \alpha_2$, и несоизмеримой, если $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Определение 3. Точки равновесия $E^* = (x^*, y^*)$ системы (1) являются решениями следующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} c \cdot (y^*(t) + x^*(t) - \dfrac{x^{*3}(t)}{3} + z) = 0, \\ -\dfrac{1}{c} \cdot (x^*(t) - a + by^*(t)) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

причем первое уравнение системы (3) описывает кубическую нульклину, а второе – линейную нульклину.

Замечание 4. Заметим, что согласно алгебраической системе (3) точки пересечения нульклин будут являться также точками равновесия $E^* = (x^*, y^*)$ системы (1).

Методика исследования

Теперь рассмотрим две важные теоремы асимптотической устойчивости нелинейных эредитарных колебательных систем, доказательство которых предложено в работе [12].

Теорема 1. *Точки равновесия для соизмеримой системы (3) называются асимптотически устойчивыми, если собственные значения λ_i матрица Якоби $J = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}$, вычисленные согласно точкам равновесия E^*, удовлетворяют следующим условиям:*

$$| \, arg(\lambda_i) \, | > \frac{\alpha\pi}{2}, i = 1, 2. \quad (4)$$

Теорема 2. *Точки равновесия системы (3) называются асимптотически устойчивыми для несоизмеримой системы, где $\alpha_1 = \dfrac{\beta_1}{m}, \alpha_2 = \dfrac{\beta_2}{m}$, β_1 и β_2 – целые числа, если выполняются следующие условия:*

$$| \, arg(\lambda_i) \, | > \frac{\gamma\pi}{2}, i = 1, 2, ..., n, n = \beta_1 + \beta_2, \gamma = 1/m, \quad (5)$$

а λ вычисляется согласно характеристическому уравнению

$$\det(\mathrm{diag}([\lambda^{\beta_1}, \lambda^{\beta_2}]) - J) = 0. \quad (6)$$

Сначала рассмотрим случай соизмеримой системы. Запишем матрицу Якоби в следующем виде:

$$J = \begin{bmatrix} c(1 - x^{*2}) & c \\ -\dfrac{1}{c} & -\dfrac{b}{c} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где точка покоя системы (1) будет $E^* = (x^*, y^*)$. Получим из (7) следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - (\lambda c + b)(1 - x^{*2}) + \lambda \cdot \frac{b}{c} + 1 = 0. \quad (8)$$

Теперь рассмотрим случай, когда системя является несоизмеримой. Дана матрица Якоби в виде (7), где точка покоя системы (1) будет $E^* = (x^*, y^*)$, $\alpha_1 = \dfrac{\beta_1}{m}$, $\alpha_2 = \dfrac{\beta_2}{m}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0.5, 1]$.

Получим из (7) следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^n + \frac{b}{c}\lambda^{\beta_1} - (\lambda^{\beta_2}c + b)(1 - x^{*2}) + 1 = 0, n = \beta_1 + \beta_2. \qquad (9)$$

Замечание 5. Важно отметить что, когда $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, то мы приходим к апериодическому режиму – отсутвие колебаний, так как изменяется тип уравнения.

Результаты исследований и их обсуждение

Для построения фазовых траекторий была использована методика из работ автора [8], [9].

Пример 1. (Соизмеримая система.) Значения управляющих параметров: $T = 100, c = 3, a = 0.7, b = 0.8, z = 0$, точка покоя $E^* = (1.199408035, 1.774556026)$.

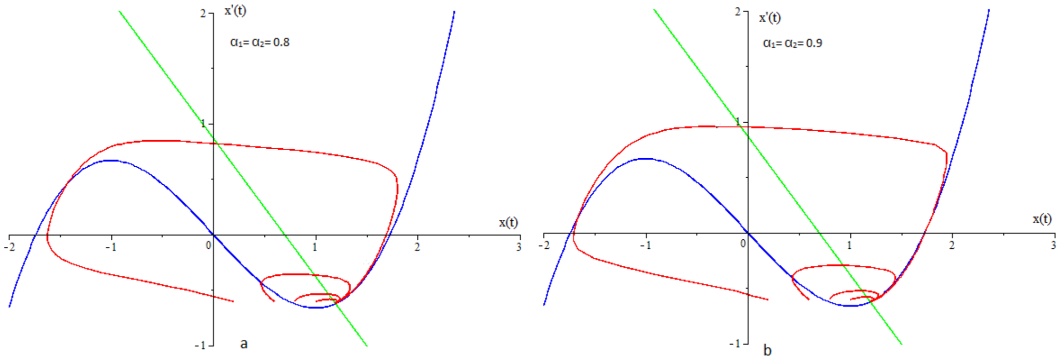

Рис. 1. Фазовые портреты с нульклинами для соизмеримой системы (1): a - $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.8$; b – $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.9$

На рис.1 приведен случай соизмеримой системы (1) без радражителя ($z = 0$). Корни характеристического уравнения (8) удовлетворяют условию Теоремы 1, поэтому точка покоя системы (1) $E^* = (1.199408035, 1.774556026)$ является асимптотически устойчивой и называется устойчивым фокусом, а фазовая траектория закручивающаяся спираль.

Пример 2. (Несоизмеримая система.) Значения управляющих параметров: $T = 100, c = 3, a = 0.7, b = 0.8, z = 0, E^* = (1.199408035, 1.774556026)$.

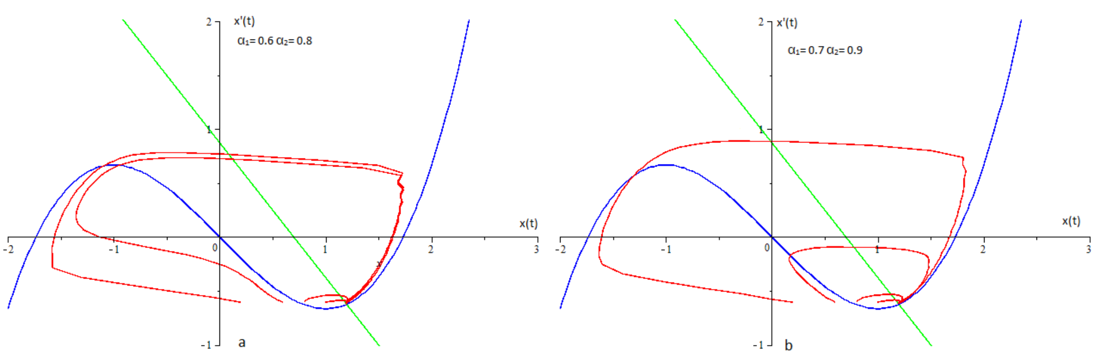

Рис. 2. Фазовые портреты с нульклинами для несоизмеримой системы (1): a – $\alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = 0.8$; b – $\alpha_1 = 0.7, \alpha_2 = 0.9$

На рис. 2 приведен случай несоизмеримой ситемы (1) без раздражителя ($z = 0$). Здесь также как и в Примере 1, мы получаем, что все корни характеристического уравнения (9) удовлетворяют условию Теоремы 2. Поэтому точка покоя $E^* = (1.199408035, 1.774556026)$ является асимптотически устойчивой и называется устойчивым фокусом, а фазовая траектория закручивающаяся спираль.

Исследования в работе [5] показали, что при наличии раздражителя $z \in [-0.365; +\infty)$, фазовые траектории будут иметь устойчивый фокус, в ином случае будет неустойчивый фокус и фазовые траектории со временем выйдут на предельный цикл. Рассмотрим следующий пример.

Пример 3. Значения управляющих параметров: $T = 100, c = 3, a = 0.7, b = 0.8, z = -0.4, E^* = (0.9065670678, 1.554925301)$.

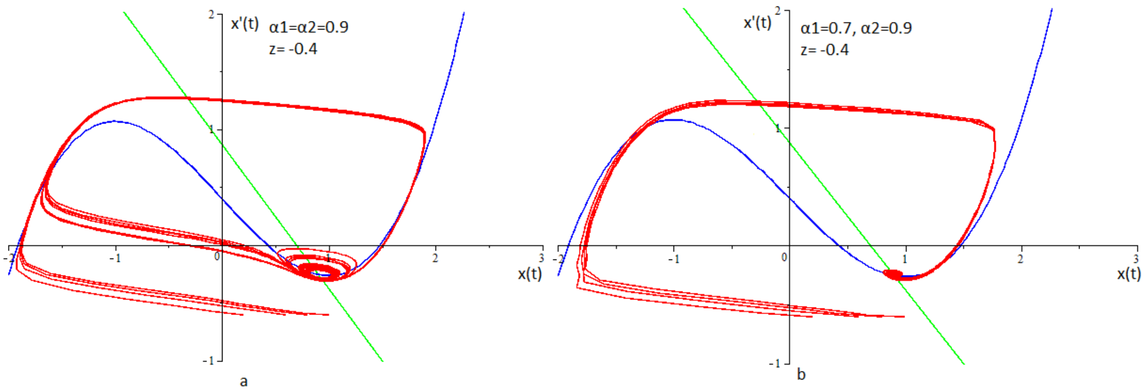

Рис. 3. Фазовые портреты с нульклинами при $z = -0.4$: a – $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.9$; b – $\alpha_1 = 0.7, \alpha_2 = 0.9$

На рис.3a видно, что в условиях соизмеримой системы (1) фазовая траектория выходит на предельный цикл при интенсивности раздражителя $z = -0.4$, а на рис.3b при несоизмеримой системе (1) сохраняется устойчивый фокус.

Заключение

В данной работе были исследованы вопросы устойчивости точек покоя на примере дробного нелинейного осциллятора ФитцХью-Нагумо. Мы фактически показали, что дробный осциллятор ФитцХью-Нагумо – это пример генератора релаксационных колебаний, зависящих от внешнего сигнала – интенсивности раздражителя z. При превышении порогового значения z мы наблюдаем активацию пульсирующего нейрона и наоборот при уменьшии – деактивацию. Дробные параметры α_1 и α_2, отвечающие за память, можно рассматривать как дополнительные степени свободы, которые позволяют более гибко исследовать колебательный процесс.

Список литературы/References

[1] Petras I., *Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation*, Springer, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011, 218 pp.

[2] Паровик Р. И., *Математическое моделирование нелинейных эредитарных осцилляторов*, КамГУ им. Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, 2017, 135 с. [Parovik

R. I., *Matematicheskoe modelirovanie nelinejnyh ehreditarnyh oscillyatorov [Математическое моделирование нелинейных эредитарных осцилляторов]*, KamGU im. Vitusa Beringa, Petropavlovsk-Kamchatskij, 2017 (in Russia), 135 pp.]

[3] Volterra V., "Sur les Equations Integro-Differentielleset Leurs Applications", *Acta Mathematica*, **35**:1 (1912), 295-356.

[4] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006, 523 pp.

[5] FitzHugh R., "Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane", *Biophysical Journal*, 1961, № 1, 446—466.

[6] Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S., "An active pulse transmission line simulating nerve axon", *Proc. IRE.*, 1962, № 50, 2061-–2070.

[7] Спиртус В. Б., "Возможности биофизических моделей типа Фитцхью—Нагумо в отображении двумерной миграции сейсмичности", *Геофизический журнал*, **32**:1 (2010), 134-143. [Spirtus V. B., "Vozmozhnosti biofizicheskih modelej tipa Fitckh'yu-Nagumo v otobrazhenii dvumernoj migracii sejsmichnosti [Possibilities of biophysical models such as Fitzhugh-Nagumo in the mapping of two-dimensional seismicity migration]", *Geofizicheskij zhurnal*, **32**:1 (2010), 134-143 (in Russia)].

[8] Липко О. Д., "Математическая модель распространения нервного импульса с учетом эредитарности", *Вестник КРАУНЦ*, 2017, № 1(17), 33-43. [Lipko O. D., "Mathematical model of nerve impulse propagation with regard to heredity", *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*, **16**:1 (2017), 52-60 (transl. Engl.)].

[9] Липко О. Д., "Математическая модель эредитарного осциллятора ФитцХью—Нагумо", *Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики» Кабардино-Балкария, Нальчик, 17–21 мая 2017 г.*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **154**, ВИНИТИ РАН, М., 2018, 72–80. [Lipko O. D., "Matematicheskaya model' ehreditarnogo oscillyatora FitcKH'yu-Nagumo [Mathematical model of hereditary FitzHugh-Nagumo oscillator]", *Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii «Aktual'nye problemy prikladnoj matematiki i fiziki» Kabardino-Balkariya, Nal'chik, 17–21 maya 2017 g.*, Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril. Temat. obz., **154**, 2018, 72–80 (in Russia)].

[10] Липко О. Д., "Исследование хаотических и регулярных режимов фрактального осциллятора ФитцХью-Нагумо", *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2018, № 3(23), 116-123. [Lipko O. D., "Investigation of regular and chaotic modes of the FitzHughNagumo fractal oscillator", *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*, 2018, № 3(23), 116-123 (in Russia)].

[11] Lipko O. D., Parovik R. I., "Some aspects of investigation of limit cycles of FitzHugh-Nagumo oscillator with degree memory", *J. Phys.: Conf. Ser*, **1141** (2018), 012125.

[12] Tavazoei M. S., Haeri M., "Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **237**:20 (2008), 2628-2637.

[13] Gerasimov A. N., "Obobshchenie linejnyh zakonov deformacii i ih prilozhenie k zadacham vnutrennego treniya [Generalization of the linear laws of deformation and their application to the problems of internal friction]", *AN SSSR. Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1948, № 2, 529-–539 (in Russia).

[14] Caputo M., *Elasticit'a e dissipazione.*, Zanichelli, Bologna, 1969, 150 pp.

Список литературы (ГОСТ)

[1] Petras I. Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation. Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2011. 218 p.

[2] Паровик Р. И. Математическое моделирование нелинейных эредитарных осцилляторов. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2017. 135 с.

[3] Volterra V. Sur les Equations Integro-Differentielleset Leurs Applications // Acta Mathematica. 1912. vol. 35. no. 1. pp. 295-356.

[4] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.

[5] FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophysical Journal. 1961. no. 1. pp. 446—466.

[6] Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proc. IRE. 1962. no. 50. pp. 2061-2070.

[7] Спиртус В. Б. Возможности биофизических моделей типа Фитцхью—Нагумо в отображении двумерной миграции сейсмичности // Геофизический журнал. 2010. Т. 32. №. 1. С. 134-143.

[8] Липко О. Д. Математическая модель распространения нервного импульса с учетом эредитарности // Вестник КРАУНЦ. 2017. №. 1(17). С. 33-43.

[9] Липко О. Д. Математическая модель эредитарного осциллятора ФитцХью-Нагумо // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2018. Т. 154. С. 72-80.

[10] Липко О. Д. Исследование хаотических и регулярных режимов фрактального осциллятора ФитцХью-Нагумо // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. №3(23). С. 116-123.

[11] Lipko O. D., Parovik R. I. Some aspects of investigation of limit cycles of FitzHugh-Nagumo oscillator with degree memory // J. Phys.: Conf. Ser. 2018. vol. 1141. 012125.

[12] Tavazoei M. S., Haeri M. Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2008. vol. 237. no. 20. pp. 2628-2637.

[13] Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // АН СССР. Прикладная математика и механика. 1948. №. 2. С. 529-539.

[14] Caputo M. Elasticit‘a e dissipazione. Bologna: Zanichelli, 1969. 150 p.

Для цитирования: Липко О. Д. Исследование устойчивости точек покоя дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2019. Т. 26. № 1. С. 63-70. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-63-70

For citation: Lipko O. D. Stability of the rest points fractional oscillator FitzHugh-Nagumo, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2019, **26**: 1, 63-70. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-63-70

Поступила в редакцию / Original article submitted: 16.03.2019

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2019. vol. 26. no.1. pp. 63–70.

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-63-70

MSC 37N10

STABILITY OF THE REST POINTS FRACTIONAL OSCILLATOR FITZHUGH-NAGUMO[1]

O. D. Lipko

Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia
E-mail: olgalipko95@mail.ru

In this paper, using the qualitative analysis, we studied the stability of the point of rest of the fractional oscillator FitzHugh-Nagumo in commensurate and incommensurable cases. For the corresponding point of rest, using the numerical method of the theory of finite difference schemes, phase trajectories were constructed. It is shown that quiescent points can be both asymptotically stable, which correspond to stable focus, and are asymptotically unstable (unstable focus), and for them the phase trajectories usually go to the limit cycle.

Key words: rest points, stability, limit cycle, FitzHugh-Nagumo fractional oscillator, phase trajectories.

[1]This work was supported by the grant of the President of the Russian Federation No. MK-1152.2018