DOI: 10.18454/2079-6641-2018-22-2-33-44

ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 519.622.2

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В. М. Абдуллаев[1,2]

[1] Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, AZ1010, г. Баку, пр-т Азадлыг, 20

[2] Институт систем управления НАН Республики Азербайджан, AZ114, г. Баку, ул. Вахабзаде, 9

E-mail: vaqif_ab@rambler.ru

В статье предлагается численный метод решения задачи, основанный на использовании метода прямых для сведения задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными параметрами. Далее используется специальное представление решения полученной краевой задачи относительно линейной системы дифференциальных уравнений с нелокальными условиями, с помощью которого задача параметрической идентификации сводится к решению вспомогательных краевых задач и одной системы алгебраических уравнений.Важно отметить, что, в отличие от оптимизационных подходов, в данной работе не используется построение каких-либо итерационных процедур или минимизирующих последовательностей.

Ключевые слова: обратная задача, метод прямых, параболическое уравнение.

Введение

В данной работе предлагается подход к численному решению задач параметрической идентификации относительно дифференциальных уравнений с частными производными. Для идентификации постоянных во времени или по пространственной переменной имеются результаты дополнительных экспериментов, в процессе которых проводились замеры состояния объекта.

Отметим, что с подобными обратными задачами приходится сталкиваться на этапе параметрической идентификации математических моделей практически для всех динамических процессов, для которых предполагается строить системы автоматического или автоматизированного управления. В связи с этим различным аспектам исследования коэффициентно - обратных задач посвящено большое число публикаций [1–14].

Наиболее часто используемым методом параметрической идентификации является приведение обратной задачи к задаче параметрического оптимального управления и применение для ее решения численных методов первого порядка. Проблема применения такого подхода связана с необходимостью построения итерационных процедур, например, градиентного спуска, на каждой итерации которой необходимо решать саму исходную и сопряженную систему дифференциальных уравнений [4,12].

В данной работе предлагается численный метод решения задачи, основанный на использовании метода прямых для сведения задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными параметрами. Далее используется специальное представление решения полученной краевой задачи относительно линейной системы дифференциальных уравнений с нелокальными условиями, с помощью которого задача параметрической идентификации сводится к решению вспомогательных краевых задач и одной системы алгебраических уравнений.Важно отметить, что, в отличие от оптимизационных подходов, в данной работе не используется построение каких-либо итерационных процедур или минимизирующих последовательностей.

Приводятся результаты численных экспериментов и их анализ.

Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу восстановления коэффициентов для параболического уравнения:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \xi(x,t)\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \xi_1(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \xi_2(x,t)u(x,t) + F(x,t;C) + f(x,t),$$

$$(x,t)\in\Omega = \{(x,t): 0<x<a,\ 0<t\le T\}. \tag{1}$$

Здесь функция $F(x,t;C)$ имеет один из видов:

$$F(x,t;C) = \sum_{i=1}^{l} B_i(x,t)\,C_i(t), \tag{2}$$

$$F(x,t;C) = \sum_{i=1}^{l} B_i(x,t)\,C_i(x), \tag{3}$$

$\xi(x,t) > 0$, $\xi_1(x,t)$, $\xi_2(x,t)$, $f(x,t) \in C^{2,1}(\Omega)$- заданные непрерывные функции, $B_i(x,t)$, $i = 1,2,...l$, заданные непрерывные линейно-независимые функции. Выполнены также условия ограниченности в Ω значений функций: $0 < a_1(x,t) \leq c_1$, $|a_2(x,t)|$, $|a_3(x,t)|$, $\left|{\partial a_3(x,t)}/{\partial x}\right| \leq c_2$.

С целью идентификации $C(t)$ или $C(x)$ имеются результаты N экспериментов, проведенных при различных начальных и краевых условиях:

$$u^j(x,0) = \varphi^j(x), \quad 0 \leq x \leq a, \tag{4}$$

$$u^j(0,t) = \psi_1^j(t), \quad u^j(a,t) = \psi_2^j(t), \quad 0 \leq x \leq T, \tag{5}$$

здесь функция $\varphi^j(x)$, $\psi_0^j(t)$, $\psi_1^j(t)$ непрерывны по своим аргументам, $j = 1,2,...,N$.

При каждом эксперименте проводились наблюдения за состоянием процесса. Обозначим через $u^j(x,t)$ состояние процесса в точке x в момент времени t при j-том эксперименте, $j = 1,2,...,N$.

Дополнительные условия, необходимые для определения вектор - функции $C(t)$, полученные по результатам наблюдений за процессом при каждом j-том эксперименте, могут иметь различный вид, что связано с характером проводимых экспериментов и результатов наблюдения [3,11,14]. В частности, пусть в точках $x_i \in (0;a)$, $i = 1,2,...L$, ведутся наблюдения:

$$u^j(x_i,t) = \Phi_i^j(t), \ i = 1,2,...,L, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{6}$$

где $\Phi_i^j(t)$, $i = 1,2,...,l$- заданные непрерывно дифференцируемые функции.

А для определения вектор - функции $C(x) = (C_1(x), C_2(x), ..., C_l(x))^*$ дополнительные условия являются результатом наблюдения заданные моменты времени, $t_j \in (0,T]$, $i = 1,2,...,L$:

$$u^j(x,t_i) = \Phi_i^j(x), \ i = 1,2,...,L, \quad 0 \leq x \leq a. \tag{7}$$

Здесь: $\Phi_i^j(x)$, $i = 1,2,...,l$- заданные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Кроме того функции $\varphi_0^j(x)$, $\varphi_1^j(x)$ $\psi_1^j(t), \psi_2^j(t)$ удовлетворяют условиям согласования:

$$\varphi_0^j(0) = \psi_1^j(0), \ \varphi_0^j(a) = \psi_2^j(0), \ \varphi_0^j(0) = \Phi_i^j(0).$$

Задача состоит в нахождении непрерывной вектор-функции $C(t)$, удовлетворяющей условиям (1),(2),(4)-(6) (задача A) или вектор-функцию $C(x)$ в случае условий (1),(3),(4)-(5), (7) (задача B).

Рассматриваемая задача идентификации исследовалась многими авторами [1–14]. Были получены необходимые условия существования и единственности решения [5–7]. Предложенные в работах [3,4] методы решения этой задачи использовали сведение ее к задаче оптимального управления, для решения которой применялись итерационные методы.

В работах [8,9] использовалось сведение задачи к интегральному уравнению, решение которого представляет вычислительную сложность. Ниже предлагается использовать приведение задачи (17)–(24) к задаче параметрической идентификации относительно системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод решения

В данной работе предлагается численный метод решения задачи A и задачи B основанный на использовании метода прямых для сведения задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными параметрами.

Решение задачи A. С целью приведения задачи A к обыкновенной система дифференциальных уравнений используем метод прямых. В области Ω проведем прямые $t = t_k = k\tau,\ k = 0,1,...,M,\ \tau = T/M$.

Производную $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|_{t=t_k}$ в (1) аппроксимируем разностным отношением

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|_{t=t_k} = \frac{u(x,t_k)-u(x,t_{k-1})}{\tau} + O(\tau),\ k = 1,2,...,M,$$

и далее используем обозначения:

$$U^{(k)}(x) = u(x,t_k),\ C^{(k)} = C(t_k), \psi_1^{(k)} = \psi_1(t_k), \psi_2^{(k)} = \psi_2(t_k),$$

$$\tilde{B}^{(k)}(x) = -\frac{B(x,t_k)}{\xi(x,t_k)},\ \tilde{\xi}_1^{(k)}(x) = -\frac{\xi_1(x,t_k)}{\xi(x,t_k)},\ \tilde{\xi}_2^{(k)}(x) = -\left(\frac{\xi_2(x,t_k)}{\xi(x,t_k)} - \frac{1}{\tau\cdot\xi(x,t_k)}\right),$$

$$\tilde{f}^{(k)}(x) = -\left(\frac{f(x,t_k)}{\xi(x,t_k)} + \frac{U^{(k-1)}(x)}{\tau\cdot\xi(x,t_k)}\right).$$

В результате получим уравнения второго порядка с обыкновенными производными:

$$\frac{d^2U^{(k)}(x)}{dx^2} = \tilde{\xi}_1^{(k)}(x)\frac{dU^{(k)}(x)}{dx} + \tilde{\xi}_2^{(k)}(x)\,U^{(k)}(x) +$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\tilde{B}_i^{(k)}(x)C_i^{(k)} + \tilde{f}^{(k)}(x),\ \ k = 1,2,...M,\ U^{(0)}(x) = \varphi(x). \tag{8}$$

Из (5) имеем следующие условия:

$$U^{(k)}(0) = \psi_1^{(k)},\ \ U^{(k)}(a) = \psi_2^{(k)},\ \ k = 1,2,...M, \tag{9}$$

а дополнительные условия имеют вид

$$U^{(k)j}(x_i) = \Phi_i^{(k)j},\ \ i = 1,2,...,l, \tag{10}$$

Уравнения (8) при каждом $k, k = 1,2,...,M$, приведем к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dU_1^{(k)}(x)}{dx} = U_2^{(k)}(x),\ \frac{dU_2^{(k)}(x)}{dx} = \tilde{\xi}_2^{(k)}(x)\,U_1^{(k)}(x) + \tilde{\xi}_1^{(k)}(x)\,U_2^{(k)}(x) +$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\tilde{B}_i^{(k)}(x)C^{(k)} + \tilde{f}^{(k)}(x),\ \ k = 1,2,...M, \tag{11}$$

$$U_1^{(k)}(0) = \psi_1^{(k)},\quad U_1^{(k)}(a) = \psi_2^{(k)},\quad k = 1,2,...M. \tag{12}$$

Для простоты задачи (11)-(12),(10), при каждом k, $k = 1,2,...,M$, запишем в следующем виде:

$$\frac{dU(x)}{dx} = A(x)U(x) + B(x)C + F(x), x \in (0,a], \tag{13}$$

с краевыми условиями

$$\tilde{\alpha}U(0) = \psi_1, \quad \tilde{\beta}U(a) = \psi_2. \tag{14}$$

а дополнительные условия имеют вид

$$\tilde{\gamma}U(x_i) = \Phi_i, \ i = 1,2,...,L, \tag{15}$$

Здесь $U(x) \in R^2$-фазовое состояние системы; $C = (C_1, C_2, ..., C_l)^* \in R^l-$ искомые параметры; $A(x)$, $B(x)$, $F(x)$–заданные матричные непрерывные функции по x, $x \in (0,a]$ соответственно размерности (2×2), $(2\times l)$, (2×1), $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$–заданные матрицы размерности (1×2). *-знак транспонирования.

Решение задачи (13), (14) $-U^j(x)$ для каждого $j-$того эксперимента будем искать в виде:

$$U^j(x) = U^{0j}(x) + \sum_{i=1}^{l} U^{ij}(x)C_i, x \in \left(0, a^j\right], j = 1,2,...,N, \tag{16}$$

где пока произвольные вектор-функция $U^{0j}(x)$ и $U^{ij}(t)$, должны удовлетворять условиям

$$\tilde{\alpha}U^{0j}(0) = \psi_1, \quad \tilde{\beta}U^{0j}(a) = \psi_2, \tilde{\alpha}U^{ij}(0) = 0, \quad \tilde{\beta}U^{ij}(a) = 0, \tag{17}$$

Несложно проверить, что в этом случае $U^j(x)$ из (16) удовлетворяет условиям (14) для всех $j = 1,2,...,N$ и произвольных C_i, $i = 1,2....,l$.

Теорема 1. *Если функции $U^{ij}(x)$, $i = 0,1,...,l$ являются при $x \in \left(0, a^j\right]$ решениями следующих задач:*

$$\frac{dU^{0j}(x)}{dx} = A(x)U^{0j}(x) + F(x), \ \tilde{\alpha}U^{0j}(0) = \psi_1, \quad \tilde{\beta}U^{0j}(a) = \psi_2, \tag{18}$$

$$\frac{dU^{ij}(x)}{dx} = A(x)U^{ij}(x) + B^i(x), \tilde{\alpha}U^{ij}(0) = 0, \quad \tilde{\beta}U^{ij}(a) = 0, \tag{19}$$

тогда функция $U^j(x)$, определенная формулой (16), удовлетворяет условиям (13), (14) для произвольных значений вектора C, $j = 1,2,...,N$.

Доказательство. Действительно, продифференцировав (16) и подставив в (13), после несложных преобразований получим:

$$\left[\frac{dU^{0j}(x)}{dx} - A(x)U^{0j}(x) - F(x)\right] +$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\left[\frac{dU^{ij}(x)}{dx} - A(x)U^{ij}(x) - B^i(x)\right] C_i = 0 \ , x \in \left(0, a^j\right] , j = 1,2,...,N.$$

Учитывая произвольность функций $U^{0j}(x)$ и $U^{ij}(x)$, $i = 1,2....,l$, требуя от них равенства нулю выражений, стоящих в квадратных скобках, получим, что эти функции должны быть решениями задач (18), (19). □

Для всех видов измерения будем предполагать, что проводимые эксперименты независимы, причем выполнено условие $L \geq l$. Дополнительные условия (15) называют условиями переопределения [3].

Используя значения полученных решений задач (18), (19) в точках, которые участвуют в проводимых измерениях вида (15), получим систему L линейных алгебраических уравнений относительно вектора $C \in R^l$, которую в общем случае запишем так

$$QC = G. \tag{20}$$

Здесь матрица $Q = ((q_{ij})), i = 1,...,L, \ j = 1,...,l$, вектор $G = (g_1, g_2, ..., g_L)^*$ определяются видом и результатами проводимых наблюдений. В случае, если $L = l$, то решение определяется непосредственно из (20): $C = Q^{-1}G$. В случае, если $L > l$ под решением (20) будем понимать вектор:

$$C = (Q^* Q)^{-1} Q^* G, \tag{21}$$

называемый нормальным решением переопределенной системы ([3]).

Решение задачи B. В области Ω проведем прямые $x = x_k = kh, \ k = 0,1,...,M$, $h = a/M$.

Аппроксимируя в (1) производные $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}|_{x=x_k}$ и $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=x_k}$ разностными отношениями

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=x_k} = \frac{u(x_{k+1},t) - u(x_{k-1},t)}{2h} + O(h^2), \ k = 1,2,...,M-1,$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}|_{x=x_k} = \frac{u(x_{k+1},t) - 2u(x_k,t) + u(x_{k-1},t)}{h^2} + O(h^2), \quad k = 1,2,...,M-1,$$

и далее используем обозначения:

$$U^{(k)}(t) = u(x_k,t), B^{(k)}(t) = B(x_k,t), \ \varphi_k = \varphi(x_k), \ C^{(k)} = C(x_k), \xi^{(k)}(t) = \xi(x_k,t),$$

$$\xi_1^{(k)}(t) = \xi_1(x_k,t), \ \ \xi_2^{(k)}(t) = \xi_2(x_k,t), \ \ f^{(k)}(t) = f(x_k,t), \ \ k = 1,2,...,M-1.$$

В результате получим систему дифференциальных уравнений с обыкновенными производными:

$$\frac{dU^{(k)}(t)}{dt} = \frac{\xi^{(k)}(t)}{h^2}\left(U^{(k+1)}(t) - 2U^{(k)}(t) + U^{(k-1)}(t)\right) + \frac{\xi_1^{(k)}(t)}{2h}\left(U^{(k+1)}(t) - U^{(k-1)}(t)\right) +$$

$$+\xi_2^{(k)}(t)U^{(k)}(t) + \sum_{i=1}^{l} B_i^{(k)}(t)C_i^{(k)} + f^{(k)}(t), \ k = 1,2,...,M-1,$$

$$U^{(0)}(t) = \psi_1(t), \ U^{(M)}(t) = \psi_2(t), \ t \in (0;T], \tag{22}$$

с условиями

$$U^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}, k = 1,2,...,M-1. \tag{23}$$

После некоторых обозначений получим задачу:

$$\frac{dU^{(k)}(t)}{dt} = \tilde{A}(t)U^{(k)}(t) + B^{(k)}(t)C + F(t), \ k = 1,2,...,M-1, \ U^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}. \tag{24}$$

Дополнительные условия (7) примут вид

$$U^{(k)j}(t_i) = \Phi_i^{(k)j}, \;\; i = 1, 2, ..., l. \tag{25}$$

Задача (24) при наблюдениях (25) является частным случаем рассмотренной выше задачи параметрической идентификации относительно (13), (14) при каком-либо одном из условий (13)–(14), т.к. вместо краевых условий имеем начальные условия Коши (23). Поэтому для ее численного решения можно использовать предложенной подход.

Результаты численных экспериментов

Были проведены многочисленные численные эксперименты на тестовых задачах с применением предложенных в данной работе формул и схем численного решения. Результаты экспериментов показали достаточную практическую эффективность описанного подхода.

Задача 1. Рассмотрим следующую задачу параметрической идентификации для параболического уравнения (1):

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}(2x+t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - 2u(x,t) + (x+t)C_1(t) + (2x+3t)C_2(t) +$$

$$+\pi e^{-2t}\left(\pi \sin(\pi x) - (x+2t)\cos(\pi x)\right) + (x+t)(1.5e^{-2t} + 0.5) - 0.25(2x+3)e^{3t},$$

$$(x,t) \in \Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1, \;\; 0 < t \leq 1\}. \tag{26}$$

Здесь $u(x,t)$- состояние процесса, $C(t) \in R^2$ - идентифицируемый вектор параметров, причем функция $u(x,t) = \left(e^{-2t}\sin(\pi x)\right)$ и вектор-функция $C(t) = \left(\frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}; \, \frac{1}{4}e^{3t}\right)^*$, как несложно проверить, удовлетворяют уравнениям (26).

Для идентификации вектора $C(t)$ проведен один эксперимент $(N = 1)$ при начально-краевых условиях:

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \;\; 0 \leq x \leq 1, \;\; u(0,t) = 0, \;\; u(1,t) = 0, \;\; 0 \leq t \leq 1, \tag{27}$$

при котором проводились наблюдения в двух точках $x = 0.25$ и $x = 0.5$ (т.е. $L = l = 2$) и в результате были получены дополнительные разделенные многоточечные условия вида (6):

$$u(0.25,t) = \frac{\sqrt{2}\, e^{-2t}}{2}, \;\; u(0.5,t) = e^{-2t}, \;\; 0 \leq t \leq 1. \tag{28}$$

Для сведения задачи (26), (27) к задаче (13)–(14) методом прямых при проведении численных экспериментов использовались различные значения шага τ (т.е. число прямых). Решения для $\tau \in [0.02; 0.04]$ практически не различались и были достаточно близки к точному решению. В таблице 1 приведены результаты, полученные при $\tau = 0.04$, т.е. $M = 25$.

В табл.1 приведены точные и полученные значения параметров $C(t)$ при $\chi = 0; 0.01; 0.03$, что соответствует замерам соответственно без наличия помех, при помехах 1% и 3% от измеряемой величины в условиях (28).

Задача 2. Пусть относительно процесса (26), (27) дополнительно к наблюдениям (28) проводились наблюдения и в точках $x = 0.125$ и $x = 0.75$:

$$u(0.125,t) = e^{-2t}\sin(0.125\pi)\,, u(0.75,t) = e^{-2t}\sin(0.75\pi)\,,\ 0 \le t \le 1, \tag{29}$$

т.е. в данной задаче $N = 1, L = 4,\ l = 2,\ L > l$. Параметры численных методов были аналогичны параметрам, используемым в задаче 1. Ясно, что точные решения задач 1 и 2 совпадают. В табл.2 приведены полученные результаты решения задачи 2 при различных уровнях помех на измеряемые величины (28), (29) состояния процесса.

Были проведены многочисленные другие численные эксперименты, приведение результатов которых заняло бы много места. Отметим лишь, что эти эксперименты показали возможность получения решения задач предлагаемым методом с требуемой высокой степенью точности и достаточно высокую его устойчивость к помехам в исходных данных задачи.

Из результатов, приведенных в таблицах, следует, что предлагаемый подход позволяет достаточно точно определять значения идентифицируемых параметров, если дополнительная информация о состоянии процесса известна точно.

В случае наличия помех при проведении замеров, как и следовало ожидать. полученные значения параметров точно соответствуют полученной искаженной информации, а следовательно не соответствуют искомым значениям. С целью более точного определения искомых значений идентифицируемых параметров необходимо увеличение точности замеров или количества информации, т.е. точек или моментов времени замера параметров состояния процесса.

Таблица 1.

Точные и полученные решения Задачи 1 при разных уровнях помех

	Точные		$\chi = 0$		$\chi = 0.01$		$\chi = 0.03$	
t	$C_1(t)$	$C_2(t)$	$C_1(t)$	$C_2(t)$	$C_1(t)$	$C_2(t)$	$C_1(t)$	$C_2(t)$
0.02	1.9412	0.5309	1.9408	0.5308	1.9266	0.5269	1.8835	0.5151
0.10	1.7281	0.6749	1.7278	0.6748	1.7151	0.6698	1.6768	0.6549
0.20	1.5055	0.9110	1.5052	0.9108	1.4942	0.9042	1.4588	0.8828
0.30	1.3232	1.2298	1.3229	1.2296	1.3133	1.2206	1.2862	1.1954
0.40	1.1740	1.6600	1.1738	1.6597	1.1652	1.6476	1.1376	1.6085
0.50	1.0518	2.2408	1.0516	2.2404	1.0439	2.224	1.0181	2.1691
0.60	0.9518	3.0248	0.9516	3.0242	0.9447	3.0021	0.9232	2.9341
0.70	0.8699	4.0830	0.8697	4.0822	0.8634	4.0524	0.8464	3.9728
0.80	0.8028	5.5116	0.8026	5.5105	0.7968	5.4703	0.7795	5.3518
0.90	0.7479	7.4387	0.7478	7.4372	0.7423	7.3829	0.7255	7.2155
1.00	0.7030	10.0427	0.7029	10.0424	0.6977	9.9674	0.6812	9.7314

Таблица 2.

Полученное решение Задачи 2 при разных уровнях помех

	$\chi=0$		$\chi=0.01$		$\chi=0.03$	
t	$C_1(t)$	$C_2(t)$	$C_1(t)$	$C_2(t)$	$C_1(t)$	$C_2(t)$
0.02	1.9408	0.5308	1.9292	0.5276	1.8907	0.5176
0.10	1.7278	0.6748	1.7174	0.6704	1.6849	0.6574
0.20	1.5052	0.9108	1.4962	0.9044	1.4618	0.8864
0.30	1.3229	1.2296	1.315	1.2224	1.2822	1.1929
0.40	1.1738	1.6597	1.1667	1.6492	1.1423	1.6168
0.50	1.0516	2.2404	1.0453	2.2271	1.0245	2.187
0.60	0.9516	3.0242	0.9459	3.0057	0.9261	2.9401
0.70	0.8697	4.0822	0.8645	4.0565	0.8499	3.985
0.80	0.8026	5.5105	0.7978	5.4752	0.7835	5.3463
0.90	0.7478	7.4372	0.7433	7.3933	0.7285	7.2453
1.00	0.7029	10.0424	0.6986	9.9824	0.6854	9.7816

Заключение

В статье исследуется численное решение коэффициентно-обратных задач относительно параболического уравнения. Предложен подход к решению рассматриваемых задач, основанный на использовании метода прямых для сведения задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными параметрами. Далее используется специальное представление решения полученной краевой задачи относительно линейной системы дифференциальных уравнений с краевыми условиями, с помощью которого задача параметрической идентификации сводится к решению вспомогательных краевых задач и одной системы алгебраических уравнений. Приводятся результаты численных экспериментов и их анализ.

Список литературы

[1] Камынин В. Л., “Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения”, *Матем. Заметки*, **77**:4 (2005), 522–534. [Kamynin V. L., “Ob obratnoj zadache opredelenija pravoj chasti v parabolicheskom uravnenii s usloviem integral’nogo pereopredelenija”, *Matem. Zametki*, 2005 vol 77, № 4, 522–534].

[2] Belov Yu. Ya., “Inverse problems for parabolic equations”, *J. Inv. Ill Posed Problems*, . **1**:4 (1993), 283–305.

[3] Сергиенко И. В., Дейнека В. С., “Решение некоторых обратных задач теплопроводности для составной пластины с использованием псевдообратных матриц”, *Доклады НАН Украины*, 2011, № 12, 28–34. [Sergienko I. B., Dejneka V. S., “Reshenie nekotoryh obratnyh zadach teploprovodnosti dlja sostavnoj plastiny s ispol’zovaniem psevdoobratnyh matric”, *Doklady NAN Ukrainy*, 2011, № 12, 28–34].

[4] Hasanov A., Otelbaev M., Akpayev B., “Inverse heat conduction problems with boundary and final time measured output data”, *Inverse Probl. Sci. Eng.*, . **19** (2011), 895–1006.

[5] Ivanchov M.İ., “Inverse problems for the heat-conduction equation with nonlocal boundary conditions”, *Ukrainian Mathematical Journal*, **45**:8 (1993), 1186–1192.

[6] Саватеев Е.Г., “О задаче идентификации коэффициента параболического уравнения”, *Сиб. матем. журн.*, **36**:1 (1995), 177–185. [Savateev E. G., “O zadache identifikacii kojefficienta parabolicheskogo uravnenija”, *Sib. matem. zhurn. 1995*, **36**:1, 177–185].

[7] Прилепко А.И., Костин А.Б., “О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением”, *Матем. сб.*, **183**:4 (1992), 49–68. [Prilepko A. I., Kostin A. B., “O nekotoryh obratnyh zadachah dlja parabolicheskih uravnenij s final’nym i integral’nym nabljudeniem”, *Matem. sb.*, **183**:4 (1992), 49–68].

[8] Yan L, Fu C.L, Yang F.L., “The method of fundamental solutions for the inverse heat source problem”, *Eng. Anal. Boundary Elements*, **32** (2008), 216–222.

[9] Ismailov M. I, Kanca F, Lesnic D., “Determination of a time-dependent heat source under nonlocal boundary and integral overdetermination conditions”, *Appl. Math. Comput.*, **218** (2011), 4138–4146.

[10] Cannon J.R, Duchateau P., “Structural identification of an unknown source term in a heat equation”, *Inverse Probl.*, **14** (1998), 535–551.

[11] Aida-zade K.R., Abdullayev V.M., “Solution to a class of inverse problems for system of loaded ordinary differential equations with integral conditions”, *J. Inv. Ill Posed Problems*, **24**:5 (2016), 543-558.

[12] Abdullayev V. M. , Aida-zade K. R., “Optimization of loading places and load response functions for stationary systems”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **57**:4 (2017), 634–644.

[13] Abdullaev V. M. , Aida-zade K. R., “On the numerical solution of loaded systems of ordinary differential equations”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **44**:9 (2004), 1505–1515.

[14] Aida-zade K.R., “A Numerical method of restroring the parameters of a dynamic system”, *Cybern. Syst. Analysis.*, **40**:3 (2004), 392–399.

Список литературы (ГОСТ)

[1] Камынин В.Л. Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения // Матем. Заметки. 2005. Т.77. №4. С.522–534.

[2] Belov Yu.Ya., Inverse problems for parabolic equations // J. Inv. Ill Posed Problems. 1993. vol. 1. no. 4. pp.283 – 305.

[3] Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение некоторых обратных задач теплопроводности для составной пластины с использованием псевдообратных матриц // Доклады НАН Украины. 2011. no. 12. С.28–34.

[4] Hasanov A., Otelbaev M., Akpayev B. Inverse heat conduction problems with boundary and final time measured output data // Inverse Probl. Sci. Eng., 2011. vol. 19. pp. 895–1006.

[5] Ivanchov M.İ. Inverse problems for the heat-conduction equation with nonlocal boundary conditions // Ukrainian Mathematical Journal. 1993. vol. 45. № 8. С.1186–1192.

[6] Саватеев Е.Г. О задаче идентификации коэффициента параболического уравнения // Сиб. матем. журн., 1995. Т.36. № 1. С.177–185.

[7] Прилепко А.И., Костин А.Б. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Матем. сб., 1992. Т. 183. № 4. С. 49–68.

[8] Yan L, Fu C.L, Yang F.L. The method of fundamental solutions for the inverse heat source problem // Eng. Anal. Boundary Elements. 2008. Vol.32. Pp. 216–222.

[9] Ismailov M.I, Kanca F, Lesnic D. Determination of a time-dependent heat source under nonlocal boundary and integral overdetermination conditions // Appl. Math. Comput., 2011. Vol. 218. Pp. 4138–4146.

[10] Cannon J.R, Duchateau P. Structural identification of an unknown source term in a heat equation // Inverse Probl., 1998. vol.14. pp. 535–551.

[11] Aida-zade K.R., Abdullayev V.M. Solution to a class of inverse problems for system of loaded ordinary differential equations with integral conditions // J. Inv. Ill Posed Problems. 2016. vol. 24. no. 5. pp.543-558.
[12] Abdullayev V. M. , Aida-zade K. R. Optimization of loading places and load response functions for stationary systems // Comput. Math. Math. Phys., 2017. vol. 57. no. 4. pp. 634–644.
[13] Abdullaev V. M. , Aida-zade K. R. On the numerical solution of loaded systems of ordinary differential equations // Comput. Math. Math. Phys., 2004. vol. 44. no. 9. pp.1505–1515.
[14] Aida-zade K.R. A Numerical method of restroring the parameters of a dynamic system // Cybern. Syst. Analysis., 2004. Vol. 40. no. 3. pp. 392–399.

Для цитирования: Абдуллаев В. М. Численное решение задачи параметрической индентификации для дифференциальных уравнений с частными производными // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2018. № 2(22). C. 33-44. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-22-2-33-44

For citation: Abdullayev V. M. Numerical solution to parametric identification problems partial differential equations, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2018, **22**: 2, 33-44. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-22-2-33-44

Поступила в редакцию / Original article submitted: 03.04.2018

В окончательном варианте / Revision submitted: 08.04.2018

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-22-2-33-44

INFORMATION AND COMPUTER TECHNOLOGIES

MSC 65M32

NUMERICAL SOLUTION TO PARAMETRIC IDENTIFICATION PROBLEMS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

V. M. Abdullayev[1,2]

[1] Azerbaijan State Oil and Industry University, Azadlig avenue 20, AZ1010, Baku, Azerbaijan
[2] Institute of Control Systems, Azerbaijan National Academy of Sciences, 9 B. Vahabzade str. Baku, AZ1141, Azerbaijan
E-mail: vaqif_ab@rambler.ru

The paper proposes a numerical method for solving the problem, based on the use of the method of lines to reduce the problem to a system of ordinary differential equations with unknown parameters. Next, we use a special representation of the solution of the obtained boundary value problem for a linear system of differential equations with nonlocal conditions, by means of which the problem of parametric identification reduces to solving auxiliary boundary value problems and a system of algebraic equations. It is important to note that, unlike optimization approaches, The construction of any iterative procedures or minimizing sequences is used.

Key words: inverse problem, method of lines, parabolic type equation, parametric identification.