Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 05(02): 249 - 264 (2018)

Un Modelo Matemático para la Circulación Oceánica en el Fenómeno de ”El Niño”

A Mathematical Model for Oceanic Circulation at ”El Niño” Phenomenon

Obidio Rubio.* and Ruth Noriega.†

Received, set. 14, 2018 *Accepted, Dec. 20, 2018*

Resumen

Describimos un modelo que interpreta la circulación del océano tropical en los periodos en que aparece el fenómeno meteorológico conocido como ”El Niño”. Se define una zona de estudio como siendo el pacífico ecuatorial, la corriente oceánica es descrita por las ecuaciones primitivas, que consiste en las ecuaciones de movimiento y del transporte de temperatura las cuales están fuertemente acopladas. Como condiciones de contorno, las tensiones de viento sobre la superficie del océano es fundamental para el calentamiento de las aguas, las que debido a su alta variabilidad la consideramos aleatorias y descritas por el un ruido blanco multiplicativo, generando las llamadas ecuaciones primitivas estocásticas para la circulación del oceáno tropical. Se presenta la formulación variacional del problema y algunas estimativas que permiten verificar la existencia de soluciones de estas ecuaciones.

Palabras clave. Fenómeno El Niño, Ecuaciones primitivas, Sistemas estocásticos, Océano tropical.

Abstract

We describe a model that interprets the circulation of the tropical ocean in the periods when the meteorological phenomenon known as ”El Niño” appears; A study area is defined as being the equatorial pacific, the ocean current is described by the primitive equations, which consists of the equations of motion and temperature transport which are strongly coupled. As boundary conditions, the wind stresses on the surface of the ocean is fundamental for the warming of waters, which due to its high variability we consider it random and described by a multiplicative white noise, generating the so-called stochastic primitive equations for the circulation of the tropical ocean. The variational formulation of the problem is presented and some estimates that allow verifying the existence of solutions of these equations.

Keywords. Phenomenon ”EL Niño”, Primitive Equations, Stochastic Systems, Tropical Ocean.

1. Introducción. El Océano Tropical, juega um rol integral en el almacenamiento y redistribuición de calor en la superficie de la tierra, por su gran extensión de superficie caliente. El movimiento del Océano está gobernado principalmente por dos tipos de fuerza: las fuerzas del viento, que actúan sobre la superficie del océano y fuerzas fluctuantes, que se generan por contrastes, debido a diferencias de temperatura y salinidad que actúan directamente en la densidad, la cual, por efecto de la gravedad produce movimiento.

El Fenómeno de ”El Niño” se interpreta en el siguiente sentido: Cada año, en la época de Navidad, aparecen flujos de agua caliente a lo largo de las costas oestes de américa del sur(costas del Ecuador y el Perú), estas aguas, las cuales son de varios grados mas calientes que las usuales, son mucho menos salinas y perturban las estaciones climáticas, este fenómeno es conocido como **El Niño**, en relación a que aparece en la época de Navidad.

Regularmente , pero no periódicamente (cada 2 a 4 años) la cantidad de agua caliente que circula es sustancialmente mayor que en los años normales y la vida en estas regiones es muy perturbada. Se genera abundantes precipitaciones causadas por el Océano caliente, en pocas semanas, las costas áridas del Perú se transforman en terrenos productivos, pero por otro lado causa destrucción del plackton y por tanto de los peces. Las consecuencias

*Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Perú (orubio@unitru.edu.pe).
†Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Perú (bbruthns@hotmail.com),

 DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2018.02.11

ecológicas y económicas son de grandes proporciones. En el Perú la pesca de peces se reduce muchisimo, las aves del mar, que se alimentan de peces mueren en gran cantidad y para completar el problema, la muerte de peces y aves marinas genera una contaminación de las playas, creando una contaminación atmosférica.

Los mayores eventos del Niño que han ocurrido en la último siglo son en 1925, 1941, 1957-1958, 1972-1973, 1982-1983, 1992, 1997 y lo que se ha llamado el fenómeno de El Niño costero, con consecuencias muy alarmantes en el año 2016. Su causas no se han podido determinar hasta que Wyrtki(1973) [10], descubrió una fuerte correlación con cambios en el Océano tropical central y oste. Ahora Philander, 1990 [4], estableció que los eventos de el Niño son causados por cambios en los vientos sobre la superficie del Océano Tropical, generando una situación compleja, conduciendo a oceanógrafos y metereologistas en estas últimas décadas a tratar de entender los factores atmosféricos y oceánicos que se involucran en este fenómeno.

Bajo las condiciones normales, los vientos sobre el océano pacífico tropical provienen del nor este y del sur este y convergen sobre la zona intertropical. Además la acumulación de agua caliente en el Pacífico tropical Oeste genera una región como una piscina caliente mientras que el Pacífico Oeste es relativamente frio.

El origen de una anomalía, evento El Niño está asociado con un calentamiento de los vientos en el Pacífico Oeste o con la aparición de temperatura superficial de mar(SST) caliente en el Pacífico central tropical, aunque uno puede preceder al otro, estos dos fenómenos inmediatamente se asocian. Por otro lado, la aparición de la (SST), calienta la atmósfera localmente, creando movimientos de ascenso que necesitan ser conpensados con convergencia horizontal. Esta convergencia horizontal genera vientos del este sobre el lado oeste [10].

Cuando ocurre el evento de El Niño, su desarrollo temporal es estrictamente controlado por el ciclo anual. La aguas calientes llegan al Perú alrededor del mes de Diciembre, y la variación zonal del mar de la circulación atmosférica general propicia un retorno en la dirección norte de la zona de convergencia intertropical, lo cual implica un re-establecimiento de los vientos del sudesste a lo largo del Ecuador. Así la situación llega a ser normal.

La sucesión de eventos hasta ahora está siendo explicada y existen varios modelos con este fin. Los modelos serán usados para contriburi en la predección próximas aparciones del fenómeno de El Niño, así como de su ' intensidad. Aún falta realizar estudios de variabilidad del sistema Océano- atmósfera en varias escalas. Una conección a la llamada Oscilación del Sur ha sido realizada y el fenómeno ha sido llamado Oscilación del Sur-El Niño(ENSO). La oscilación de sur es una variación de la presión atmosférica casi periódica que se distribuye sobre grandes porciones del globo. En particular ha sido observada que los cambios de la presión en Darwin(norte de Australia 12 grados sur, 131 grados este) son casi perfectamente negativam,ente correlacionados con las variaciones de la presión en la Isla de Tahiti (18 grados sur, 149 grados oeste). La presencia de altos promedios de presión en Darwin con la simultanea presión baja en Tahiti está intimamente relacionado con el fenómeno de El Niño.

El modelo de Océano usado como base es un modelo de circulación general del Océano (OGCM) desarrollado en la "National Oceanic and Atmosferic Administration (NOAA) Geophysical Fluid Dynamics Laboratory(GFDL)" por Bryan(1969) y Cox(1984), modificado para el Océano tropical por Phylander et al. [4] (1987), a los cuales en el presente trabajo incorporamos ciertas precisiones en las condiciones de frontera a fin de generar los últimos resultados reportados, como la alta variabilidad de superficie del mar generados por el ciclo de el Niño , donde el nivel del mar decrece en el Pacífico ecuatorial oeste y crece en el Pacífico este asociado con desplazamientos verticales de la región termoclina; Cuando ocurre el fenómeno opuesto, llamado " La Niña" caracterizada por la temperatura fria de la superficie del mar lo cual se asocia con el crecimiento en intensidad de los vientos.

Estos fenómenos han sido estudiadas por Wirtki, 1975, Ramusson y Carpenter 1982, Caho y Philander, 1983 [4].

2. Formulación Matemática . El sistema de ecuaciones, que gobierna la circulación Oceánica, en un sistema de coordenadas rotantes [3] tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d_s u}{dt} - \left[2\Omega + \frac{u}{r\ cos\theta}\right] sin\theta\ v + \left[2\Omega + \frac{u}{r\ cos\theta}\right] cos\theta\ w = \\ -\frac{P_\phi}{\rho r\ \cos\theta} - \frac{V_\phi}{r\ \cos\theta} + F_u \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\frac{d_s v}{dt} + \left[2\Omega + \frac{u}{r\ cos\theta}\right] sin\theta\ u + \left[\frac{v}{r}\right]\ w = -\frac{P_\theta}{\rho r} - \frac{V_\theta}{r} + F_v \tag{2.2}$$

$$\frac{d_s w}{dt} - \left[\frac{v}{r}\right]\ v - \left[2\Omega + \frac{u}{r\ cos\theta}\right] cos\theta\ u = -\frac{P_r}{\rho} - V_r + F_w \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d_s\rho}{dt} + \frac{1}{cos\theta}\left[\frac{\partial u}{\partial\phi} + \frac{\partial(v\cos\theta)}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r^2 w\right)}{\partial r} = 0 \tag{2.4}$$

(2.5) $$\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)],$$

(2.6) $$\frac{d_sT}{dt} = \frac{\partial}{\partial r}\left[k_T\frac{\partial T}{\partial r}\right] + A_T\left[\frac{1}{r^2 cos\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 cos\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)\right]$$

donde

(2.7) $$\frac{d_s}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r\ cos\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + w\frac{\partial}{\partial r}$$

$$F_u = \Delta_3 u + A_V\left[\frac{(1 - \tan^2(\theta))}{r^2}u - \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}\frac{\partial v}{\partial \phi}\right]$$

$$F_v = \Delta_3 v + A_V\left[\frac{(1 - \tan^2(\theta))}{r^2}v - \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}\frac{\partial u}{\partial \phi}\right]$$

$$F_w = \Delta_3 w - A_V\left[\frac{2w}{r^2} + \frac{2}{(r^2\cos^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial(v\cos\theta)}{\partial \theta}\right)\right].$$

$$\Delta_3 = \frac{\partial}{\partial r}\left[k_V\frac{\partial .}{\partial r}\right] + A_V\left[\frac{1}{r^2 cos\theta}\frac{\partial^2 .}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 cos\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\frac{\partial .}{\partial \theta}\right)\right]$$

Aqui u,v,w: son las componentes de la velocidad en las direcciones ϕ, θ, r (longitudinal, latitudinal, radial) y T la temperatura; la ecuación de conservación de masa es (2.4), (2.5) la ecuación de estados y (2.6) la ecuación de la energía, ρ densidad del fluido, P la presión, Ω la velocidad angular de rotación de la tierra y el potencial V, el cual, segun Veronis(1973) debido la superficie esferoidal de la tierra es cuasi un equipotencial $V = -\frac{GM_e}{r}$.

2.1. Domínio y Condiciones de Contorno. El dominio, según Latif [14], es una caja rectangular com una extensión zonal de 14,000 Km., una latitudianal de 6,600 Km. y una profundidad de 4 Km. $\Omega = [0, L_1] \times [-D, D] \times [-H, 0]$.

Las condiciones de frontera son las de no deslizamiento para la velocidad del fluído, aislamiento térmico en las paredes inferior y laterales, en la superficie se considera las tensiones del viento y la condición de intercambio térmico con la temperatura del aire.

Las tensiones del viento que actúan como condiciones de frontera en la superficie, dependen de (x, y) y captan la fenómenología de El Niño, el cual se caracteriza por anomalías de temperatura superficial caliente en el Pacífico ecuatorial Este. Asumimos la dependencia del estado de la temperatura superficial en el océano ecuatorial Este.

El modelo est sujeto las aproximaciones estandar como la tradicional, la de Bousinesqui, beta plano ecuatorial e hidrostática, como se puede ver en [3] [11], [11] [10].

Por cuestiones de modelación consideremos las siguientes escalas [10]:

L_R = Escala horizontal $\approx 3200Km. = 3.2 \times 10^6 m. \approx 3.10^8 cm.$ que es el radio ecuatorial de deformación$(\frac{c}{\beta})^{\frac{1}{2}}$ y $c = \sqrt{gH_0} = 200ms^{-1}$.

H_0 = Escala de longitud vertical $\approx 4Km. = 4 \times 10^3 m. = 4.10^5 cm.$

U = Escala de velocidad horizontal $\approx 0.2ms^{-1} = 2 \times 10^1 cms^{-1}$

W = Escala de velocidad vertical $= \delta U \approx 5 \times 10^{-5} ms^{-1}$

T_0 = Escala de temperatura.

Sean los parámetros: $A_V = 10^8 cm^2 s^{-1}$, $k_V(0) = 15cm^2 s^{-1}$ $\beta \approx 2 \times 10^{-11} m^{-1} s^{-1}$, $\alpha = 0.0003^o C^{-1}$, $A_T \approx 2 \times 10^6 cm^2 s^{-1}$, $k_T(0) = 1cm^2 s^{-1}$.

Sean los números no dimensionales

(2.8) $$Re_1 = \frac{UL_R}{A_V} \approx 64, \qquad \delta = \frac{H}{L_1} \approx 125.10^{-5}, \qquad Ro = \frac{U}{\beta L^2} \approx 10^{-2}$$

(2.9) $$Re_2(z) = \frac{H_0^2 U}{L_R k_V}, \qquad R_{t1} = \frac{L_R U}{A_T} \approx 320, \qquad R_{t2}(z) = \frac{UH_0^2}{L_R k_T}$$

Las nuevas constantes $\bar{\alpha} = \alpha T_0$, $\quad \bar{b} = \frac{H_0 g}{U^2}$

Ahora hagamos el siguiente cambio de variables

$$(x,y) \longrightarrow L_R(x,y), \quad z \longrightarrow H_0 z, \quad t \longrightarrow \frac{L_R}{U} t \quad ,(u,v) \longrightarrow U(u,v)$$

$$w \longrightarrow \delta U w, \quad \frac{P}{\rho_0} \longrightarrow U^2 P, \quad \frac{\rho}{\rho_0} \longrightarrow \rho \quad T \longrightarrow T_0 T$$

Después de sustituir las aproximaciones y los cambio de variable, las ecuaciones (2.1)-(2.2) se transforman en lo que se llaman las **Las ecuaciones primitvas para el Océano tropical** sobre el β-plano ecuatorial:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + [\vec{u}.\nabla]\,\vec{u} + w\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} + \frac{1}{Ro} y\vec{k} \times \vec{u} = -\nabla P + \frac{1}{Re_1}\Delta \vec{u} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{Re_2}\frac{\partial \vec{u}}{\partial z}\right] \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + [\vec{u}.\nabla]\,T + w\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{R_1}\Delta T + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{R_2}\frac{\partial T}{\partial z}\right]. \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\bar{b}\rho \tag{2.12}$$

$$\nabla.\vec{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.13}$$

$$\rho = 1 - \bar{\alpha}(T-1). \tag{2.14}$$

Sobre el dominio $\Omega = (0,L) \times (-d,d) \times (-h,0)$, donde $L = \frac{L_1}{L_R}$, $d = \frac{D}{L_R}$, $\bar{T}_A = \frac{T_A}{T_0}$, $\bar{\tau} = \frac{H_0}{Uk_V(0))}\tau$ $\bar{k}_T = \frac{H_0\gamma}{k_T(0)} = 4 \times 10^6 \gamma$ $h(x,y) = \frac{H}{L_R\delta}$, con $\gamma = 3 \times 10^{-6} cms^{-1}$, segun McCreary [16].

La frontera $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_b \cup \Gamma_l$, tal que $\Gamma_b = \{(x,y,h(x,y)), x,y \in S\}$, $\Gamma_l = \{(x,y,z)/ \ \ x = 0, x = L; y = -d, Y = d; -$ y $\Gamma_u = S \times \{0\}$ donde $S = (0,L) \times (-d,d)$.

Entonces las condiciones sobre la frontera son:

$$\Gamma_u = \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \bar{\tau} & w = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z} = \bar{\gamma}(\bar{T}_A - T) & . \end{cases}$$

$$\Gamma_b = \begin{cases} \vec{u} = 0 & w = 0 \\ T = 0 & . \end{cases}$$

$$\Gamma_l = \begin{cases} \vec{u} = 0 & w = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \eta} = 0 & . \end{cases}$$

2.2. Hipótesis necesarias.

2.2.1. Tensiones del viento. Centramos nuestra atención en las tensiones del viento atmosférico $\bar{\tau}$(por simplicidad utilicemos τ en lugar de $\bar{\tau}$). Deseamos captarprincipalmente el fenómeno de EL Niño, el cual se caracteriza por anomalías de temperatura superficial caliente en el Pacífico ecuatorial Este, que es asociado con una idealización del ciclo anual de los vientos ecuatoriales que denotamos por τ_H. Este hecho también conduce a captar anomalías de temperatura superficial fría en el Océano Este, llamado fenómeno de LA Niña, según la denominación hecha en Chao [4], apareciendo en este caso un campo de viento τ_W incrementando este campo τ_H, el cual interactúa con el Océano en una forma similar a la circulación de Walker ideada por Bjerness(1966,1969) [16]; Para modelar matemáticamente nuestros campos de viento asumimos la dependencia de estado de la temperatura superficial en el Océano ecuatorial Este.

Las tensiones que consideramos, dependerán linealmente de τ_W y τ_H.

Definamos $\tau_1 = \tau_W + \tau_H$ para la ocurrencia de la La Niña, o sea, el Océano Este es frío y $\tau_2 = \tau_H$ cuando aparece El Niño.

Las fluctuaciones de la temperatura en la superficie del océano son asociados con cambios en la temperatura de la subsuperficie, esto es, aparecen cambios de la profundidad de la región Thermocline, caracterizada por ser una región de gran estabilidad la cual corresponde a una temperatura entre los 18 a 22 grados C [4]. Consideramos la temperatura promedio o sea $T_c = 20^oC$ como la temperatura crítica de cambios entre las dos fuerzas del viento en la superficie.

El intervalo $(T_c - 2, T_c + 2)$ se considera como una sección donde hay transición entre las tensiones τ_1 y τ_2. Obtenemos entonces el campo de tensiones normalizado en la siguiente forma:

$$\tau = \begin{cases} \tau_1 & ,0 \le T < T_1 \\ f(T) & ,T_1 \le T \le T_2 \\ \tau_2 & ,T_2 < T \le T_a \end{cases} \tag{2.15}$$

donde $T_1 \sim 18^0/T_0C$,$T_2 \sim 22^0/T_0C$, T_a es la temperatura en la superficie, la cual es aproximadamente $25^0/T_0C$ y $f(T)$ es una función que depende linealmente de τ_1y τ_2, que asumimos que tiene la forma.

$$\begin{aligned} f(T) &= \frac{1}{\triangle}\left[a + b\breve{T} + c\breve{T}^2 + \breve{T}^3\right] \\ &= \frac{\diamond}{\triangle}\left[\tau_1 T_2^2(T_2 - 3T_1) + \tau_2 T_1^2(T_1 - 3T_2)\right. \\ &\quad \left. +(\tau_2 - \tau_1)\left(6T_1T_2\breve{T} - 3(T_1 + T_2)\breve{T}^2 + 2\breve{T}^3\right)\right] \end{aligned}$$

donde $\diamond = (T_2 - T_1)$, $\triangle = 4T_1T_2\left(T_1^2 + T_2^2\right) - T_1^4 - T_2^4$.

Así tenemos que τ depende de $\breve{T}$, es decir, depende de la temperatura T evaluada en $(L, 0, 0, t)$, además, suponemos que

$$\frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{es limitado en} \quad (L, 0, t) \tag{2.16}$$

Las tensiones del viento que actúan como condiciones de frontera dependen de (x, y) y por la alta variedad en los ultimos tiempos, las vamos a considerar que son **aleatorias** y por tanto pueden ser interpretadas como que fuera un ruido multiplicativo, por ahora la consideramos de la forma:

$$\tau = \tau(x, y, t)W(t)$$

donde W es un movimiento Browinano.

También asumimos que las tensiones del viento atmosférico son de divergencia libre, es decir,

$$\nabla.\tau_1 = 0, \qquad \nabla.\tau_2 = 0 \tag{2.17}$$

2.3. Principio del Máximo para T. En esta sección verificamos el principio del máximo para la temperatura T que depende de las condiciones de frontera y de la condición inicial, si denotamos el operador L por

$$\mathbf{L}T = \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u}.\nabla) + \left(\int_z^0 \nabla.\vec{u}dz\right)\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{Rt_2}\frac{\partial}{\partial z}\right] + \frac{1}{Rt_1}\Delta\right]T = 0 \tag{2.18}$$

$\frac{\partial T}{\partial z}(0) = \bar{\gamma}(\bar{T}_A - T)$, $T(-h) = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \eta} = 0$ en Γ_l; $\quad T^0 = T(x, y, z, 0)$.

Sea $\theta = T - \bar{T}_A$, luego introduzcamos una función $f = e^{r\theta^2}$, entonces siguiendo las Constantin [2], observamos que f satisface.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= 2r\theta f\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad para \quad \xi \in \{t, x, y, z\} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} &= 2rf\left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right)^2 + 2r\theta f\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + 4r^2 f\theta^2\left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right)^2 \end{aligned}$$

Entonces sustituyendo f por T en (2.18) tenemos,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}f + \frac{rf}{Rt_1}\left[2|\nabla\theta|^2 + |\nabla\theta^2|^2 r\right] + \frac{rf}{Rt_2}\left[2\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2 + r\left(\frac{\partial \theta^2}{\partial z}\right)^2\right] &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(0) = -2r\bar{\gamma}\theta^2 f, \quad f(-h) = e^{r\bar{T}_A^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} &= 0 \quad en\Gamma_l \end{aligned} \tag{2.19}$$

Integrando (2.19) obtenemos:

$$\int_\Omega \mathbf{L}f + \frac{r}{Rt_1}\int_\Omega f\left[2|\nabla\theta|^2 + |\nabla\theta^2|^2 r\right] + \frac{r}{Rt_2}\int_\Omega f\left[2\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2 + r\left(\frac{\partial \theta^2}{\partial z}\right)^2\right] = 0$$

A continuación presentamos los cálculos de algunos términos de Lf

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta f &= -\int_{-h}^0\int_S div\nabla f dSdz = \int_{-h}^0\int_{\partial S}\nabla f.\eta d\gamma dz = 0 \\ -\int_S\int_{-h}^0 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{Rt_2}\frac{\partial f}{\partial z}\right)dzdS &= \frac{2r\bar{\gamma}}{Rt_2}\int_S \theta^2 f ds - \frac{rT_A e^{rT_A^2}}{Rt_2(-h)}\int_{\Gamma_b}\frac{\partial \theta}{\partial z}d\Gamma_b \end{aligned}$$

Así como también tenemos

$$\int_{\Omega} \vec{u}.\nabla f d\Omega = \int_{\Omega} (div(\vec{u}f) - f div(\vec{u}))\, d\Omega = \int_{\Gamma_l} f\vec{u}.\eta d\Gamma_l - \int_{\Omega} h div(\vec{u}) d\Omega,$$

$$\int_{\Omega}\int_{z}^{0} div(\vec{u})\frac{\partial f}{\partial z} d\Omega = \int_{S}\left(f\int_{z}^{0} div(\vec{u})\Big|_{-h}^{0} dS + \int_{\Omega} f div(\vec{u}) d\Omega.\right.$$

Sumando las dos expresiones anteriores y utilizando el teorema de la divergencia sobre S, así como las condiciones de nulidad para $\vec{u}$ en la frontera lateral tenemos:

$$(3) \quad \int_{\Omega} (D\vec{u}.\vec{\nabla}) f d\Omega = e^{rT_A^2} \int_{-h}^{0}\int_{S} div(\vec{u}) dS dz = -e^{rT_A^2}\int_{\Gamma_l} \vec{u}.\eta d\Gamma_l = 0.$$

Suponiendo que no existe flujo de calor en la horografía, pues no consideramos la emisión de ondas largas que son las ondas de radiación, además que $\theta^2 f > 0$, de (2.19) vemos que todas las integrales permanecen positivas, excepto la primera. Por tanto tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} f d\Omega \leq 0$$

Por la desigualdad de Gronwall

$$\int_{\Omega} f(x,y,z;t) d\Omega \leq \int_{\Omega} f(x,y,z;0) d\Omega$$

tomando raíz r-ésima y haciendo $r \longrightarrow \infty$, tenemos:

$$\|exp(|T(.;t) - T_A|^2)\|_{L^\infty} \leq \|exp(|T(.;0) - T_A|^2)\|_{L^\infty}$$

Finalmente tomando logaritmo obtenemos que:

$$\|T - T_A\|_{L^\infty} \leq \|T^0 - T_A\|_{L^\infty} \quad \text{ó} \quad 0 \leq T(.;t) \leq T_A + \|T^0 - T_A\|_{L^\infty} = T_m < \infty$$

De los cálculos anteriore observamos que T permanece limitado con una cota que depende de los datos iniciales y de la condición de contorno T_m.

3. Formulación Variacional. Definimos una función p_s sobre $\bar{\Gamma}_u$, presión en la superficie del mar, usando la ecuación de estados(2.14) integramos de z hasta 0, la ecuación hidrostática(2.12) y la ecuación de continuidad, y sustituimos en las ecuaciones (2.10),(2.11) tenemos el nuevo sistema:

$$(3.1) \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + [\vec{u}.\nabla]\,\vec{u} + \left[\int_{z}^{0} \nabla.\vec{u} dz\right]\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} + \frac{1}{Ro} y\vec{k}\times\vec{u} = -\nabla p_s + \bar{\alpha}\bar{b}\int_{z}^{0}\nabla T d\acute{z} \\ \frac{1}{Re_1}\Delta\vec{u} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{Re_2}\frac{\partial \vec{u}}{\partial z}\right].$$

$$(3.2) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + [\vec{u}.\nabla]\,T + \left[\int_{z}^{0}\nabla.\vec{u} dz\right]\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{R_1}\Delta T + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{R_2}\frac{\partial T}{\partial z}\right].$$

$$(3.3) \quad \nabla.\int_{-h}^{0}\vec{u} dz = 0$$

Denotamos los siguientes operadores, por ahora formalmente:

$$D\vec{u} = \left(u, v, \int_{z}^{0}\nabla.\vec{u} d\acute{z}\right), \quad B_1(\vec{u},\vec{v}) = \left(D\vec{u}.\vec{\nabla}\right)\vec{v}, \quad B_2(\vec{u},T) = \left(D\vec{u}.\vec{\nabla}\right)T$$

$$A_1\vec{u} = -\left[\frac{1}{Re_1}\Delta + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{Re_2}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\vec{u}, \quad A_2 T = -\left[\frac{1}{R_1}\Delta + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_2}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]T.$$

Entonces las ecuaciones (3.1 y 3.2) se escriben como:

$$(3.4) \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \mathbf{A}\vec{V} + B(\vec{V},\vec{V}) + E(\vec{V}) + \nabla p_s = 0,$$

donde $\vec{V} = (\vec{u}, T)$, $\mathbf{A} = [A_1 A_2]$, $B = (B_1, B_2)$ ó $B(\vec{V}, \vec{V}_1) = \left(D\vec{u}, \vec{\nabla}\right) \vec{V}_1$ y

$$E\vec{V} = \left(\frac{1}{Ro} y\vec{k} \times u + \bar{a}\bar{b} \int_z^0 \nabla T d\acute{z}, 0\right). \tag{3.5}$$

Definimos los siguientes espacios

$$C^{\infty}_{l+b,0}(\Omega) = \left\{\phi \in C^{\infty}(\bar{\Omega}) / \quad \phi = 0 \text{ en } \Gamma_l \cup \Gamma_b\right\},$$

$$C^{\infty}_{b,0}(\Omega) = \left\{\phi \in C^{\infty}(\bar{\Omega}) / \quad \phi = 0 \text{ en } \Gamma_b\right\}$$

$$\mathcal{V} = \left\{\vec{u} \in \left[C^{\infty}_{l+b,0}(\Omega)\right]^2 \quad \text{tal que} \quad \nabla. \int_{-h}^0 \vec{u} dz = 0\right\}. \tag{3.6}$$

luego definimos:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{V}_1 = \text{cerradura de} & \mathcal{V} & \text{en} & \mathbf{H}^1. \\ \mathbf{V}_2 = \text{cerradura de} & C^{\infty}_{b,0}(\Omega) & \text{en} & \mathbf{H}^1. \\ \mathbf{H}_1 = \text{cerradura de } \mathcal{V} & \text{en} \quad \mathrm{L}_2, & & \mathbf{H}_2 = \mathrm{L}_2(\Omega). \\ \mathbf{V} = & \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2, & & \mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2 \end{array} \tag{3.7}$$

De lo anterior tenemos los operadores lineales

$$\begin{array}{ll} a : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathrm{R} & \mathbf{A} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}^* \\ a_i : \mathbf{V}_i \times \mathbf{V}_i \longrightarrow \mathrm{R} & \mathbf{A}_i : \mathbf{V}_i \longrightarrow \mathbf{V}_i^*, \quad i = 1, 2 \end{array}$$

Tal que $\forall\ \vec{V} = (\vec{u}, T)\,, \vec{V}_1 = (\vec{u}_1, T_1) \in \mathbf{V}$

$$\begin{aligned} a(\vec{V}, \vec{V}_1) &= \langle \mathbf{A}.\vec{V}, \vec{V}_1 \rangle = a_1(\vec{u}, \vec{u}_1) + a_2(T, T_1) \\ a_1(\vec{u}, \vec{u}_1) &= \langle A_1 \vec{u}, \vec{u}_1 \rangle = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{Re_1} \nabla\vec{u}.\nabla\vec{u}_1 + \frac{1}{Re_2} \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}.\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial z}\right] d\Omega \\ a_2(T, T_1) &= \langle A_2 T, T_1 \rangle = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{R_1} \nabla T.\nabla T_1 + \frac{1}{R_2} \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial T_1}{\partial z}\right] d\Omega. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Se cumplen las estimativas, cuyos cálculos son muy similares a los hechos en [21] y [17]

Lema 3.1. *Las formas bilineales a, a_i, i =1,2 son continuas, coercivas*

$$a(\vec{V}, \vec{V}_1) \leq \frac{1}{R_{min}} \|\vec{V}\| \|\vec{V}_1\|, \qquad a(\vec{V}, \vec{V}) \geq \frac{1}{R_{max}} \|\vec{V}\|^2 \tag{3.9}$$

donde $R_{max} = c_0 \max\{R_1, \sup R_2, Re_1, \sup Re_2\}$; $R_{min} = c_1 \min\{R_1, \inf R_2, Re_1, \inf Re_2\}$, c_0 y c_1 constantes independientes de las constantes físicas.

Prueba. Por la desigualdad de Poincaré (ver [21]), tenemos:

$$a_1(\vec{u}, \vec{u}_1) \leq \max\{\frac{1}{Re_1}, \sup \frac{1}{Re_2}\} |\nabla\vec{u}| |\nabla\vec{u}_1| \leq c_0 \max\{\frac{1}{Re_1}, \frac{1}{\inf Re_2}\} \|\vec{u}\| \|\vec{u}_1\|.$$

De la misma manera tenemos que:

$$a_2(T, T_1) \leq \max\{\frac{1}{R_1}, \sup \frac{1}{R_2}\} |\nabla T| |\nabla T_1| \leq c_0 \max\{\frac{1}{R_1}, \frac{1}{\inf R_2}\} \|T\| \|T_1\|.$$

por tanto

$$a(\vec{V}, \vec{V}_1) = a_1(\vec{u}, \vec{u}_1) + a_2(T, T_1) \leq \frac{1}{R_{\min}} \|\vec{V}\| \|\vec{V}_1\|$$

La prueba de la coercividad también se obtiene directamente. □

Corolario 3.1. *Los siguientes operadores son isomorfismos*

$$\mathbf{A} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}^* \qquad A_i : \mathbf{V}_i \longrightarrow \mathbf{V_i}^* \quad i = 1, 2$$

Prueba.
Como $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$, es suficiente probar el corolario para A_1. De la coercividad de $a_1(\vec{u}, \vec{v}) = (A_1\vec{u}, \vec{v})$ se obtiene que

$$(A\vec{u}, \vec{u}) = a_1(\vec{u}, \vec{u}) \geq \|\vec{u}\| > 0, \qquad \text{si} \qquad \vec{u} \neq 0$$

obteniendose que A_1 es inyectivo.
Para la sobreyectividad, dado $f \in \mathbf{V}_1$ debe existir $\vec{u} \in \mathbf{V}_1$ tal que

$$A_1\vec{u} = f \tag{3.10}$$

Para ello, utilicemos el isomorfismo canónico $\wedge : \mathbf{V}_1 \longrightarrow \mathbf{V}_1$, tal que $\|\wedge\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$, y para $\rho > 0$, Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} T : \mathbf{V}_1 &\longrightarrow \mathbf{V}_1 \\ \vec{u} &\longrightarrow T\vec{u} = \vec{u} - \rho \wedge^{-1} (A_1\vec{u} - f) \end{aligned}$$

el cual, evidentemente es afin y continuo.
Luego para $\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathbf{V}_1$, por la continuidad y coercividad, tenemos

$$\begin{aligned} \|T\vec{u}_1 - T\vec{u}_2\|^2 &= \|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|^2 + \rho^2\|A_1(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)\|_*^2 - 2\rho a_1(\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{u}_1 - \vec{u}_2) \\ &\leq \|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|^2 + \rho^2 M^2\|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|^2 - 2\rho\alpha\|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|^2 \\ &= (1 + \rho^2 M^2 - 2\rho\alpha)\|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|^2 \end{aligned}$$

Para que T sea una contracción, debemos elegir ρ tal que

$$1 + \rho^2 M^2 - 2\rho\alpha < 1 \quad \text{si y solo sí} \quad \rho < \frac{2\alpha}{M^2}$$

Luego T tiene un único punto fijo, el cual también es una solución de (3.10).
Así tenemos definido

$$A^{-1} : \mathbf{V}_1^* \longrightarrow \mathbf{V}_1.$$

Para ver la continuidad de A_1^{-1} utilizamos las desigualdades

$$\alpha\|\vec{u}\|^2 \leq a_1(\vec{u}, \vec{u}) =< A_1\vec{u}, \vec{u} >=< f, \vec{u} >\leq \|f\|_*\|\vec{u}\|$$

tomando los extremos se tiene

$$\alpha\|\vec{u}\| \leq \|f\|_*$$

y como $\vec{u} = A_1^{-1}A_1\vec{u} = A_1^{-1}f$, se cumple

$$\|A_1^{-1}f\| \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_*,$$

es decir A_1^{-1}es continuo. □

Lema 3.2.

$$(i) e(\vec{V}, \vec{V}) = \bar{\alpha}\bar{b}\int_\Omega \left[\int_z^0 T d\acute{z}\right] div\vec{u} d\Omega, \qquad \forall \vec{V} \in \mathbf{V}.$$

$$(ii) |\langle E\vec{V}, \vec{V}_1\rangle| \leq \left\{ \begin{array}{l} \frac{c}{R_o}|\vec{u}||\vec{u}_1| + c|T|\|\vec{v}_1\| \\ \frac{c}{R_o}|\vec{u}||\vec{u}_1| + c\|T\||\vec{v}_1|. \end{array} \right.$$

Prueba. Sabiendo que $(\vec{k} \times \vec{u}).\vec{u} = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} e(\vec{V}, \vec{V}) &= \int_\Omega \left[\frac{f}{Ro}(\vec{k} \times \vec{u}).\vec{u} + \bar{b} grad \int_z^0 (-\bar{\alpha}T) d\acute{z}\vec{u}\right] d\Omega \\ &= \bar{\alpha}\bar{b}\int_\Omega grad\left(\int_z^0 T d\acute{z}\right)\vec{u} d\Omega \end{aligned} \tag{3.11}$$

La prueba de (ii) es evidente, utilizando la desigualdad de Poincaré

$$\begin{aligned}\left|(E\vec{V},\vec{V}_1)\right| &\leq \frac{|f|}{Ro}\int_\Omega \left|(\vec{k}\times\vec{u}).\vec{u}_1\right|d\Omega + \bar{b}\bar{\alpha}\int_\Omega \nabla\left(\int_z^0 (T)d\acute{z}\right).\vec{u}d\Omega\\ &\leq \frac{|f|}{Ro}|\vec{u}||\vec{u}_1| + \bar{\alpha}\bar{b}c_1\|T\||\vec{u}|\end{aligned}$$

ó de otro lado, usando (i)

$$\begin{aligned}\left|(E\vec{V},\vec{V}_1)\right| &\leq \frac{|f|}{Ro}\int_\Omega \left|(\vec{k}\times\vec{u}).\vec{u}_1\right|d\Omega + \bar{b}\bar{\alpha}\int_\Omega \left|\left(\int_z^0 (T)d\acute{z}\right)div\vec{u}_1\right|d\Omega\\ &\leq \frac{|f|}{Ro}|\vec{u}||\vec{u}_1| + \bar{\alpha}\bar{b}|T|c\|\vec{u}_1\||\vec{u}|\end{aligned}$$

□

3.0.1. Formas trilineales.

Las formas trilineales y sus respectivos operadores se definen por

$$\begin{aligned} b &: \mathbf{H}\times\mathbf{H}\times\mathbf{H}\longrightarrow\mathbf{R}, \qquad B:\mathbf{H}\times\mathbf{H}\longrightarrow\mathbf{H}\\ b_i &: \mathbf{H}_i\times\mathbf{H}_i\times\mathbf{H}_i\longrightarrow\mathbf{R}, \quad B_i:\mathbf{H}_i\times\mathbf{H}_i\longrightarrow\mathbf{H}_i, i=1,2 \text{ por}\\ b(\vec{V},\vec{V}_1,\vec{V}_2) &= \langle B(\vec{V},\vec{V}_1),\vec{V}_2\rangle = b_1(\vec{u},\vec{u}_1,\vec{u}_2)+b_2(\vec{u},T_1,T_2)\end{aligned}$$

donde B es dado em (3.5), al igual que los operadores B_1, B_2,

Estos operadores cumplen $\forall\ \vec{V}=(\vec{u},T),\ \vec{V}_1=(\vec{u}_1,T_1),\ \vec{V}_2=(\vec{u}_2,T_2)\in\mathbf{V}$ ó $D(A)$

$$\begin{aligned} b_1(\vec{u},\vec{u}_1,\vec{u}_2) &= \langle B_1(\vec{u},\vec{u}_1),\vec{u}_2\rangle, b_2(\vec{u},T_1,T_2) = \langle B_2(\vec{u},T_1),T_2\rangle\\ b_1(\vec{u},\vec{u}_1,\vec{u}_2) &= -b_1(\vec{u},\vec{u}_2,\vec{u}_1) b_2(\vec{u},T_1,T_2) = -b_2(\vec{u},T_2,T_1).\end{aligned}$$

Lema 3.3. $\forall\ \vec{V}\in\mathbf{V},\vec{V}_1\in D(\mathbf{A})$,

$$(i)\qquad b(\vec{V},\vec{V}_1,\vec{V}_1) = b_1(\vec{u},\vec{u}_1,\vec{u}_1) = b_2(\vec{u},T_1,T_1) = 0.$$

$$(ii)\qquad |b(\vec{V},\vec{V}_1,\vec{V}_2)| \leq \begin{cases} C\|\vec{V}\|_{H^2}\|\vec{V}_1\|_{H^{3/2}}|\vec{V}_2| \\ C\|\vec{V}\|_{H^{3/2}}\|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\|.\end{cases}$$

Prueba. Sabemos que:

$$
\begin{aligned}
\nabla|\vec{u_1}|^2 &= \nabla_u\vec{u_1}.\vec{u_1} + \vec{u_1}.\nabla_u\vec{u_1} = 2\nabla_1\vec{u_1}.\vec{u_1}\\
b_1(\vec{u},\vec{u_1},\vec{u_1}) &= \int\limits_\Omega \left[\nabla_u\vec{u_1}.\vec{u_1} + \frac{1}{2}(\int_z^0 div\,\vec{u}\,dz')\frac{\partial}{\partial z}|\vec{u_1}|^2\right]\,d\Omega\\
&= \int\limits_\Omega \left[\frac{1}{2}\nabla_u|\vec{u_1}|^2 + \frac{1}{2}(\int_z^0 div\,\vec{u}\,dz')\frac{\partial}{\partial z}|\vec{u_1}|^2\right]\,d\Omega\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left[\vec{u}.\nabla|\vec{u_1}|^2 + \frac{1}{2}(\int_z^0 div\vec{u}\,dz')\frac{\partial}{\partial z}|\vec{u_1}|^2\right]\,d\Omega\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left[div(|\vec{u_1}|^2.\vec{u}) - |\vec{u_1}|^2 div\vec{u} + (\int_z^0 div\vec{u}\,dz')\frac{\partial}{\partial z}|\vec{u_1}|^2\right]\,d\Omega\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_S \left[\int_{-h}^0 \left(div(|\vec{u_1}|^2\vec{u}) - |\vec{u}_1|^2 div\vec{u}\right)dz - \int_{-h}^0\left(\int\limits_z^0 div\vec{u}dz\frac{\partial}{\partial z}|\vec{u_1}|^2\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_S \left[div\int_{-h}^0 |\vec{u}_1|^2\vec{u}\,dz - \int_{-h}^0 |\vec{u}_1|^2 div\vec{u} + \int_z^0 div\vec{u}\,dz'\frac{\partial}{\partial z}|\vec{u_1}|^2\Big|_{-h}^0\right.\\
&\qquad\qquad \left. - \int_{-h}^0 |\vec{u_1}|^2(-div\vec{u})\,dz'\right]\,dS\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_S \left[div\int_{-h}^0 |\vec{u_1}|^2\vec{u}\,dz - \int_{-h}^0 div\vec{u}|\vec{u_1}|^2 dz\right]\,dS\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_S div\left(\int_{-h}^0 |\vec{u_1}|^2\vec{u}\,dz\right)\,dS\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{\partial S}\int_{-h}^0 |\vec{u_1}|^2\vec{u}\,dz\,d\sigma = 0
\end{aligned}
$$

puesto que $\vec{u}\big|_{\partial S} = 0$
De la misma forma se prueba que: $b_2(\vec{u}, T_1, T_1) = 0$.

La parte (ii) se puede realizar de manera similar, ver en el lema 6.2 de [17]. □

4. Las ecuaciones primitivas estocásticas. Primeramente homogenizaremos las condiciones de Neuann sobre ls superficie del mar, construiremos una función $\vec{V}^*$ con las mismas condiciones de frontera que la solución de nuestro problema inicialmente dado.

Sea $g_\epsilon \in C^\infty(-H_0, 0])$ definida por

$$
g_\epsilon(z) = \begin{cases} 1, & -\epsilon \le z \le 0\\ creciente, & -2\epsilon \le z \le -\epsilon\\ 0, & -min_S h \le z \le -2\epsilon \end{cases}
$$

Sea también la función $\bar{T} = \bar{T}_A(1 - exp(-\bar{\gamma}z))$, entonces definimos la siguiente función escalar $T^*_\epsilon = \bar{T}g_\epsilon$ y la función vectorial $\vec{u}^*_\epsilon = zg_\epsilon\bar{\tau}_S$.

Estas funciones cumplen:

$$
\begin{aligned}
&\text{En } z = 0: \frac{\partial T^*_\epsilon}{\partial z} = \bar{\gamma}(\bar{T}_A - T^*_\epsilon) \qquad \frac{\partial \vec{u}^*_\epsilon}{\partial z} = \bar{\tau}_S\\
&\text{en } z = -h: \frac{\partial T^*_\epsilon}{\partial z} = 0, \quad T^*_\epsilon = 0 \quad y \quad \vec{u}^*_\epsilon = 0.
\end{aligned}
$$

De las hipótesis para τ_S tenemos que $\vec{u}^* \in L_\infty(0, t_0, L_\infty(\Omega)) \quad \forall t_0 > 0$

Ahora sea $\epsilon_0 \in (0, \frac{1}{2}min_S h)$ y entonces definamos la función

$$
\vec{V}^* = (\vec{u}^*, T^*) = (\vec{u}^*_{\epsilon_0}, T^*_{\epsilon_0})\dot{W} = \vec{v}^*\dot{W}.
$$

Luego, vamos a sustituir $\vec{V} = \vec{U} + \vec{V}^*$ en (3.4) a fin de obtener una ecuación para $\vec{U}$ la cual tendrá condiciones de Neumann homogéneas $\Gamma_u : \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = 0,$.

Sin pérdida de generalidad, denotamos las componentes de $\vec{U} = (\vec{u}, T)$ por las mismas letras anteriormente utilizadas, realizando las operaciones en la ecuación anterior obtenemos:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathbf{A}\vec{U} + B(\vec{U}, \vec{U}) + E(\vec{U}) + \nabla p_s = g((\vec{U}, \vec{v}^*)\dot{W}, \tag{4.1}$$

$$\nabla . \int_{-H}^{0} \vec{U} dz = 0 \tag{4.2}$$

donde

$$g(\vec{U}, \vec{v}^*) = -\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t} - \mathbf{A}\vec{v}^* - B(\vec{U}, \vec{v}^*) - B(\vec{v}^*, \vec{U}) - B(\vec{v}^*, \vec{v}^*) - E(\vec{v}^*). \tag{4.3}$$

y $\dot{W}$ es el ruido blanco, expresado por la variación del movimiento Browniano, y por la presencia del ruido blanco, se obtiene el sistema de ecuaciones primitivas estocásticas para el océano tropical.

4.1. Bases del análisis estocástico. Consideramos el espacio de probabilidad $(\Omega_s, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ equipado con la filtración $\mathfrak{F}_t$, $t \geq 0$.

W es un movimiento Browniano, es decir

1. $W(t)$ es $\mathfrak{F}_t$ medible para todo $t \geq 0$, es decir $W(t)$ es adaptado a la filtración, $W(0) = 0$.
2. La variable aleatoria $W(t)$ es Gaussiana con media cero y varianza $t\hat{W}$;, donde $\hat{W}$ e sun operador en $\mathbf{H}$.
3. Para todo $t_2 \geq t_1 \geq 0$, la variable aleatoria $W(t_2) - W(t_1)$ es independiente de $\mathfrak{F}_{t_1}$

Se cumple la siguiente proposición, la cual se puede ver en [23]

Proposición 4.1. *Sea $p, q \in (1, \infty)$, fijado q. Para todo proceso adaptado de rango finito, $G : R_+ \times \Omega_s \to L^q(R^d, H)$, tenemos el isomorfismo de Ito*

$$c^q \mathbb{E}\|G\|^p_{L^q(\mathbb{R}^d; L^2(\mathbb{R}^d; H))} \leq \mathbb{E}\left\| \int_0^\infty G dW \right\| \leq C^q \mathbb{E}\|G\|^p_{L^q(\mathbb{R}^d; L^2(\mathbb{R}^d; H))} \tag{4.4}$$

con constantes $0 < c \leq C < \infty$ independiente de G. Las desigualdades anteriores, pueden ser usadas para extender la integral estocásticas a espacios de Banach $L^p(\Omega_s; L^q\mathbb{R}^d; L^2(\mathbb{R}^+; H))$ para todo proceso adaptado G el cual pertenece a $L^p(\Omega_s; L^q\mathbb{R}^d; L^2(\mathbb{R}^+; H))$, en lo que sigue las integrales estocásticas son entendidas en en sentido.

4.2. Existencia de soluciones. Presentamos un criterio de solución para la ecuación primitiva estocástica:

Definición 4.1. *, Dado $U_0 \in L^2(\Omega_S; \mathbf{H})$ y $\mathfrak{F}_0$-medible, $g \in Lip_u(\mathbf{H}, l^2(\mathbf{H}))$. Se dice que un proceso estocástico $U(t), t \geq 0$, es una solución debil de (4.1) si*

(a) $U(t)$ es $\mathfrak{F}_t$ adaptado,
(b) $U(t) \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V})$ con probabilidad 1, para todo $T > 0$,
(c) La siguiente es válida como una identidad en $\mathbf{V}'$ con probabilidad 1, para todo $t \in [0, \infty)$

$$U(t) = U(0) + \int_0^t [\mathbf{A}U(s) - \mathbf{B}(U(s))] ds + \int_0^t g(s, U(s)) dW(s). \tag{4.5}$$

Observe que la expresión de la ecuación (4.5) en la definición anteior se puede escribir en la siguiente forma

$$d\langle U(t), V\rangle + \langle \mathbf{A}U + B(U), V\rangle dt = \langle g, V\rangle dW \tag{4.6}$$
$$\langle U(0), V\rangle = \langle U_0, V\rangle \tag{4.7}$$

Resultados de existenvia fueron hechas para las ecuaciones primitvas en 2D, por Glatt-Holtz y Ziane en 2008, se pueden ver en [9].

Para el caso de nuestro modelo presentamos algunas estimativas preliminares a priori se presentan a continuación que se pueden ver en [17] [5] y muy similares a las de [1] con probabilidad 1, que serán confirmadas posterioremte.

Lema 4.1. *Existe ϵ_0 tal que para $k = \frac{1}{21 R_{max}}$*

$$(i) \quad |b_1(\vec{u}, \vec{u}^*_{\epsilon_0}, \vec{u}_1)| \leq k \int_0^s \|\vec{u}\|^2 dt \quad \forall s \in [0, t_0]$$
$$(ii) \quad |b_2(\vec{u}, T^*_{\epsilon_0}, T)| \leq k\|\vec{u}\|\|T\|$$

Prueba. Probemos solamente (i), ya que (ii) tiene los mismos pasos que (i) y esta probado en el lema 2.6 de [17]. Desde que $b_1(\vec{u},\vec{u}^*,\vec{u}) = -b_1(\vec{u},\vec{u},\vec{u}^*)$ y $c = |\vec{u}^*|_{L_\infty(0,t_0,L_\infty(\Omega))}$ y utilizando repetidas veces la desigualdad de Schwarz obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
|b_1(\vec{u},\vec{u},\vec{u}^*)| &\leq \left|\int_S\int_{-2\epsilon}^0 \vec{u}.\nabla\vec{u}.\vec{u}^* dsdz\right| + \left|\int_S\int_{-2\epsilon}^0\int_z^0 \nabla.\vec{u}d\xi\frac{\partial\vec{u}}{\partial z}.\vec{u}^* dSdz\right| \\
&\leq c\left[\int_S\int_{-2\epsilon}^0 |\vec{u}||\nabla\vec{u}|dzdS + \int_S\int_{-2\epsilon}^0 |\nabla.\vec{u}|dz\int_{-2\epsilon}^0 |\frac{\partial\vec{u}}{\partial z}|dzdS\right] \\
&\leq c\left(\int_S\int_{-2\epsilon}^0 |\vec{u}|^2 dzdS\right)^{1/2}\|\vec{u}\| \\
&\quad + \left[\int_S\left(\int_{-2\epsilon}^0 |\nabla.\vec{u}|dz\right)^2 dS\int_S\left(\int_{-2\epsilon}^0 |\frac{\partial\vec{u}}{\partial z}|dz\right)^2 dS\right]^{1/2} \\
&\leq c\left[\left(\int_S\left(\int_{-2\epsilon}^0 2\epsilon_0|\vec{u}|^4 dz\right)^{1/2} dS\right)^{1/2}\|\vec{u}\| + 2\epsilon\|\vec{u}\|^2\right] \\
&\leq c\left[(2\epsilon|S|)^{1/4}|\vec{u}|_{L_4}\|\vec{u}\| + 2\epsilon\|\vec{u}\|^2\right] \\
&\leq k\|\vec{u}\|^2
\end{aligned}
$$

En la última parte utilizamos el hecho de que la inmersión de H_0^1 en L_4 es continua. Además de que se puede decir que existe ϵ_0 tal que $\left[(2\epsilon|S|)^{1/4}c + 2\epsilon\right] c \leq k$ para todo $\epsilon \leq \epsilon_0$.

Finalmente integrando de 0 hasta s tenemos que se cumple el lema. □

Lema 4.2. $\forall t \in [0,t_0]$

$$
\begin{aligned}
&i)\quad \mathbb{E}\langle\vec{V}^*,\vec{U}(t)\rangle \leq k^2 + \frac{1}{4}\mathbb{E}|\vec{U}(t)|^2 \\
&ii)\quad \mathbb{E}a(\vec{V}^*,\vec{U}(t)) \leq \frac{|S|2\epsilon_0\bar{k}^2 tR_{max}}{R_{min}^2} + \frac{1}{4R_{max}}\mathbb{E}\|\vec{U}(t)\|^2 \\
&iii)\quad \mathbb{E}b(\vec{V}^*,\vec{V}^*,\vec{U}(t)) \leq \frac{kt}{2}(\bar{k}^2 + \mathbb{E}\|\vec{U}(t)\|^2), \qquad donde\quad \bar{k} = |\vec{\nabla}\vec{V}^*|_{L_\infty(0,t_0,L_\infty(\Omega))}
\end{aligned}
$$

Prueba. []

Las pruebas se hacen similarmente a las hechas en la prueba del lema 4.1, y el hecho que $|S|2\epsilon_0 \approx 2.5 \times 10^{-2} < 1$, entonces

$$
(|S|2\epsilon_0)^{3/4} \leq (|S|2\epsilon_0)^{1/2} \leq (|S|2\epsilon_0)^{1/4} \qquad ; \qquad y \qquad ab \leq \frac{1}{2}\left[ca^2 + \frac{1}{c}b^2\right] \tag{4.8}
$$

Sean a, b , $c > 0$ cualquier números reales y utilizando (4.8) con $c = 2$ tenemos las siguientes desigualdades para (i):

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\langle\vec{V}^*,\vec{U}(s)\rangle &\leq |\vec{v}^*|_{L_\infty(0.t_0;L_\infty(\Omega))}(|S|2\epsilon)^{1/2}\mathbb{E}\left(\int_S\int_{-2\epsilon}^0 |\vec{U}(t)|^2 dxzds\right)^{1/2} \\
&\leq |\vec{v}^*|_{L_\infty(0.t_0;L_\infty(\Omega))}(|S|2\epsilon)^{1/2}\mathbb{E}\|\vec{U}(t)\| \leq k^2 + \frac{1}{4}\mathbb{E}\|\vec{U}(t)\|^2
\end{aligned}
$$

Estas mismas estimativas se usan para obtener (ii), teniendo en cuenta que en la segunda desigualdad de la derecha estimamos una vez más la desigualdad de Schwarz y luego la inmersión continua de H_0^1 en L_4.

Para (iii) tenemos:

$$
\mathbb{E}a(\vec{U}(t),\vec{V}^*) \leq \frac{(|S|2\epsilon)^{1/2}}{R_{min}}|\vec{\nabla}v^*|_{L_\infty(0.t_0;L_\infty(\Omega))}\mathbb{E}\|\vec{U}\| \leq \frac{|S|3\epsilon_0\bar{k}^2 R_{max}}{R_{min}^2} + \frac{t}{6R_{max}}\mathbb{E}\|\vec{U}\|^2,
$$

aquí hemos utilizado la desigualdad (4.8) con $c = 3R_{max}$.

Finalmente, para (iii), tenemos que $\nabla.\vec{u}^* = 0$ entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}b(\vec{V}^*,\vec{V}^*,\vec{U}(t)) &= \int_S\int_{-2\epsilon_0}^{0}(\vec{u}^*.\nabla)\vec{u}^*.\vec{u}(t)dSdz\\ &\leq (|S|2\epsilon)^{3/4}\int_0^s|\vec{v}^*|_{L_\infty(0.t_0;L_\infty(\Omega))}|\vec{\nabla}\vec{v}^*|_{L_\infty(0.t_0;L_\infty(\Omega))}\mathbb{E}\|\vec{u}(t)\|\\ &\leq \frac{k}{2}\left(\bar{k}^2+\mathbb{E}\|\vec{u}(s)\|^2dt\right)\end{aligned}$$

utilizando dos veces la desigualdad de Schwarz y la estimativa (4.8) con $c = 1$, el lema queda probado □

Además por el lema 3.2 parte (i) se tiene, utilizando (4.8) con $c = k$

$$|e(\vec{V},\vec{V})| \leq c_1\|\vec{u}\||T| \leq k\|\vec{u}\|^2 + (\frac{c_1}{k}|\vec{V}|^2| \tag{4.9}$$

$$|e(\vec{V},\vec{V})| \leq c_1\|\vec{u}\||T| \leq c_1(|h|_{L_\infty(S)}|S|)^{1/2}\|\vec{V}\|^2$$

donde $c_1 = \bar{\alpha}\bar{b}|h|_{L_\infty(S)}$ Ahora vamos ha obtener una estimativa para la función F

Así como la estimativa para la función g

Lema 4.3. *Si k es el estimado del lema 4.2; entonces* $s \in [0, t_0]$

$$\int_0^s\langle g,\vec{U}(t)\rangle dt \leq K_1 + \frac{1}{4}|\vec{V}_0|^2 + \frac{1}{4}|\vec{V}(s)|^2 + \left(\frac{1}{3R_{max}}+\frac{3}{2}k\right)\int_0^s\|\vec{U}(s)\|^2dt$$

donde $K_1 = K_1(t_0,|S|\epsilon_0,R_{min},R_{max}) = \frac{1}{2}|\vec{V}^*(0)|^2 + 2k^2 + \left(\frac{k}{2}+6|S|\epsilon_0\frac{R_{max}}{R_{min}^2}\right)\bar{k}^2t_0$

Prueba.

$$\int_0^s\langle g,\vec{U}(t)\rangle dt = -\int_0^s\langle\frac{\partial\vec{v}^*}{\partial t},\vec{U}\rangle dt - \int_0^s\left[a(\vec{v}^*,\vec{U}) + b(\vec{V}^*,\vec{v}^*,\vec{U}) + e(\vec{v}^*,\vec{U})\right]dt$$

Integrando por partes la primera integral de la derecha, teniendo en cuenta que $\vec{U}(t)$ es solución en el sentido distribucional de (4.6) tenemos:

$$\begin{aligned}-\int_0^s\langle\frac{\partial\vec{v}^*}{\partial t},\vec{U}(t)\rangle dt &= -\langle\vec{v}^*(s),\vec{V}(s)\rangle + \langle\vec{v}^*(0),\vec{V}(0)\rangle - \int_0^s\Big[a(\vec{U}(t),\vec{v}^*)+\\ &\quad b(\vec{U}(t),\vec{U}(t),\vec{v}^*) + e(\vec{U}(t),\vec{v}^*) + \langle\nabla p_s,\vec{v}^*\rangle - \langle g,\vec{v}^*\rangle\Big]dt\\ &= -\langle\vec{v}^*(s),\vec{V}(s)\rangle + \langle\vec{v}^*(0),\vec{V}_0\rangle - \int_0^s\Big[a(\vec{U}(t),\vec{v}^*)\\ &\quad +b(\vec{U}(t),\vec{U}(t),\vec{v}^*) + e(\vec{U}(t),\vec{v}^*) + \frac{1}{2}\frac{\partial|\vec{v}^*|^2}{\partial t} + a(\vec{v}^*,\vec{v}^*)\Big]dt\end{aligned}$$

aquí hemos utilizado el hecho de que $\vec{v}^* \in$**V**∩**H** entonces se tiene que $b(\vec{v}^*,\vec{v}^*,\vec{v}^*) = 0$
y $\langle\nabla p_s,\vec{v}^*\rangle = 0$.
Finalmente sustituimos en la primera ecuación, observando que:

$$e(\vec{U}(t),\vec{v}^*) + e(\vec{v}^*,\vec{U}(t)) = 0,$$

después de transponer términos tenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^s\langle g,\vec{U}(t)\rangle dt + \frac{1}{2}|\vec{v}^*(s)|^2 + \int_0^s a(\vec{v}^*,\vec{v}^*)dt &= \frac{1}{2}|\vec{v}^*(0)|^2 - \langle\vec{v}^*(s),\vec{V}(s)\rangle\\ &\quad +\langle\vec{v}^*(0),\vec{V}(0)\rangle - \int_0^s\Big[a(\vec{U}(t),\vec{v}^*) + a(\vec{v}^*,\vec{U}(t))+\\ &\quad b(\vec{U}(t),\vec{U}(t),\vec{v}^*) + b(\vec{v}^*,\vec{v}^*,\vec{U}(t))\Big]dt\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\int_0^s\langle g,\vec{U}(t)\rangle dt \leq \frac{1}{2}|\vec{v}^*(0)|^2 &- \langle\vec{v}^*(s),\vec{V}(s)\rangle + \langle\vec{v}^*(0),\vec{V}(0)\rangle\\ &- \int_0^s\Big[a(\vec{U}(t),\vec{v}^*) + a(\vec{v}^*,\vec{U}(t)) + b(\vec{U}(t),\vec{U}(t),\vec{v}^*)\\ &\quad +b(\vec{v}^*,\vec{v}^*,\vec{U}(t))\Big]dt\end{aligned}$$

Ahora, utilizando el lema anterior con el estimado para $a(\vec{U}(t),\vec{V}^*)$ el cual es el mismo que de (iii) y el lemma 4.1

$$\int_0^s \langle g(t),\vec{U}(t)\rangle dt \leq \frac{1}{2}|\vec{v}^*(0)|^2 + 2k^2 + \frac{1}{4}|\vec{V}_0|^2 + \frac{1}{4}|\vec{V}(s)|^2 + \left(\frac{k}{2} + 6|S|\epsilon_0\frac{R_{max}}{R_{min}^2}\right)\bar{k}^2 s$$
$$+\left(\frac{1}{3R_{max}} + \frac{3}{2}k\right)\int_0^s \|\vec{U}(s)\|^2 dt$$
$$\leq K_1 + \frac{1}{4}|\vec{V}_0|^2 + \frac{1}{4}|\vec{V}(s)|^2 + \left(\frac{1}{3R_{max}} + \frac{3}{2}k\right)\int_0^s \|\vec{U}(s)\|^2 dt$$

Luego; sustituyendo $\vec{U}(t)$ por $\vec{V}$ en la ecuación(4.6) tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\vec{U}(t)|^2 + a(\vec{U}(t),\vec{U}(t)) + b(\vec{U}(t),\vec{V}^*,\vec{U}(t)) + e(\vec{U}(t),\vec{U}(t)) = \langle F(t),\vec{U}(t)\rangle$$

de esto integrando desde 0 hasta $s \in [0,t_0]$ utilizando elestimado del lema 4.1 tenemos:

$$\frac{1}{2}|\vec{U}(s)|^2 + \frac{1}{R_{max}}\int_0^s \|\vec{U}(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}|\vec{U}_0|^2 + k\int_0^s \|\vec{U}(t)\|^2$$
$$+c\int_0^s |\vec{U}(t)|^2 + |\int_0^s \langle F(t),\vec{U}(t)\rangle| \tag{4.10}$$

con la condición del lema anterior se tiene:

$$\frac{1}{4}|\vec{U}(s)|^2 + \frac{1}{R_{max}}\int_0^s \|\vec{U}(t)\|^2 \leq |\vec{U}_0|^2 + c\int_0^s |\vec{U}(t)|^2 + K_1$$

donde $c = \frac{c_1}{k}$ constante de la estimativa (4.9) □

Con estas estimativas, siguiendo la ruta de Bensoussan y Temam [1] se prueba la existencia de soluciones para las ecuaciones primitivas estocásticas sobre el océano tropical.

5. Conclusiones y propuestas futuras. Se presentó una modelación matemática para un fenómeno de "El Niño", orientado a describir la corriente oceánica dirigida por las tensiones del viento sobre la superficie del océano, las cuales son consideradas aleatorias, y la fuerza fluctuante de la temperatura en el extremo este ecuatorial.

Esta particularidad genera lo que se llama, las ecuaciones primitivas estocásticas para la corriente oceánica ecuatorial, la cual es un sistema dinámico estocástico, pero que no es disipativo, por causa de la aproximación hidrostática, por tanto solo se considera estudiar la existencia de soluciones, y el modelo se ha preparado para realizar estudios de las aproximaciones numéricas de las soluciones, lo cual genera la necesidad de estimar o mejorar la solución numérica en base a observaciones, tema que se propone a continuación.

5.1. Propuestas . Para entender el escenario de trabajo consideremos las siguientes situaciones; Sea la ecuación diferencial estocástica lineal n-dimensional de la forma

$$d\xi = A(t)\xi(t)dt + \sigma(t)dW, \qquad s \leq t \leq T. \tag{5.1}$$

Debemos hallar un sistema de ecuaciones ordinarias para la media y la convarianza, para ello hacemos

$$\mu_i(t) = \mathbb{E}\xi_i(t), \qquad \rho_{ij}(t) = \mathbb{E}(\xi_i(t) - \mu_i(t))(\xi_j(t) - \mu_j(t))$$

las componentes del vector media $\mu(t)$ y la matriz de covarianza $R(t)$. Para $t = s$ sean $\mu(s)$ y $R(s)$ la media y covariancia para al dato inicial $\xi(s)$.

Usando la fórmula (*) en [19], haciendo $\psi(x) = x_i$ y tomando esperanza tenemos

$$\mu_i(t) = \mathbb{E}\xi_i(t) = \mathbb{E}\xi_i(t) + \mathbb{E}\int_s^t b_i(r,\xi_i(r))dr, \qquad i = 1,...,n.$$

Como $b(x,t) = A(t)x$, este sistema se acuaciones se convierte en

$$\mu(t) = \mu(s) + \mathbb{E}\int_s^t A(r)\xi_i(r)dr = \mu(s) + \int_s^t A(r)\mu(r)dr.$$

En notación diferencial

$$d\mu = A\mu dt \tag{5.2}$$

De igual manera tomando $\psi(t,x) = (x_i - \mu_i(t))\,(x_j - \mu_j(t))$, entonces se tiene

$$\rho_{ij}(t) = \rho_{ij}(s) - \int_s^t \mathbb{E}[\dot{\mu}_i(\xi_j - \mu_j) + \dot{\mu}_j(\xi_i - \mu_i)]dr$$
$$+ \int_s^t \mathbf{E}\left[b_i(\xi_j - \mu_j) + b_j(\xi_i - \mu_i)\right]dr + \int_s^t a_{ij}dr,$$

donde b_i es la i-ésima componente $(A\xi)_i$ del vector

$$b = A\xi = A(\xi - \mu) + A\mu.$$

se tiene que

$$\mathbf{E}\left[A(\xi - \mu)\right]_i(\xi_j - \mu_j) = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\rho_{kj}.$$

Asi tenemos en la notación diferencial la ecución para la convarianza

$$dR = (AR + RA' + a)dt \tag{5.3}$$

5.1.1. El filtro de Kalman Bucy para las ecuaciones primitivas. En muchas aplicaciones es importante estimar el estado del sistema a partir de mediciones de cantidades relacionadas a éste. Para sistemas lineales estacionarios este problema fu tratado por Wiener y Kolmogorov. Para sistemas no estacionarios de ecuaciones diferenciales lineales con mediciones lineales, Kalman y Bucy mostraron que el estimado del estado satisface una ecuación lineal. Esta ecuación se llama Filtro de Kalman-Bucy. Para describir este problema, consideremos que $\xi(t)$ es la solución de la ecuación diferencial estocástica lineal (5.1) y suponga que $\xi(t)$ no puede ser observado. En lugar de ello se puede observar el valor $\eta(t)$ el cual satisface:

$$d\eta = H(t)\xi(t)dt + \sigma_1(t)dW_1, \qquad s \le t \le T, \tag{5.4}$$

Con $\eta(0) = 0$, los operadores $A(t)$, $H(t)$, $\sigma(t)$ y $\sigma_1(t)$ son operadores sobre un espaio de Hilbert **H** y de clase C^1 sobre $[T_0, T]$, con $\xi(s)$ gaussiano, W, W_1 movimientos bronnianos estandar, mutuamente independientes; finalmente $a = \sigma\sigma'$, $a_1 = \sigma_1\sigma_1'$.

Consideremos las $\sigma-$álgebras

$$\mathfrak{G}_t = \sigma(\eta(r), r \le t)$$

generadas por las primeras v.a. hasta t.

El problema del filtro consiste en hallar un estimado $\gamma(t)$ de $\xi(t)$, tal que $\gamma(t)$ es $\mathfrak{G}_t$-medible, $\mathbb{E}|\gamma(t)|^2 < \infty$, de manera que el error medio cuadrático $\mathbb{E}\{b'[\xi(t) - \gamma(t)]\}$, sea mínimo.

Si denotamos, por

$$\hat{\xi}(t) = \mathbb{E}\{\xi(t)/\mathfrak{F}_t\},$$

Se verifica que el estimado óptimo es $\gamma(t) = \xi(t)$.

Para ello , sea $e = \xi - \hat{\xi}$ el proceso error y sea

$$R(t) = \mathbb{E}\{e(t)e'(t)\}$$

el operador covarianza del error en el tiempo t y debe cumplir.

Teorema 5.1.

(a) La esperanza condicional $\hat{\xi}(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$d\hat{\xi} = A(t)\hat{\xi}(t)dt + F(t)\left[d\eta - H(t)\hat{\xi}(t)dt\right] \tag{5.5}$$

con dato inicial $\hat{\xi}(s) = \mathbb{E}\xi(s)$, donde

$$F(t) = R(t)H'(t)[a_1(t)]^{-1} \tag{5.6}$$

(b) El error $e(t)$ es independiente de $\mathfrak{G}_t$ y satisface la ecuación diferencial

$$dR = (AR + RA' - RH'a_1^{-1}HR + a)dt, \tag{5.7}$$

con $R(s)$ la covarianza de $\xi(s)$ y

(c)

$$\eta(t) - \int_s^t H(r)\hat{\xi}(r)dr = \int_s^t \sigma_1(r)d\hat{w}(r), \tag{5.8}$$

donde $\hat{w}$ es el movimiento browniano y $\hat{w}(t)$ es $\mathfrak{G}_t-$medible.

El problema para el caso n dimensional y lineal es presentado de manera detallada en [8] pag. 133, para el caso infinito dimensional y lineal fue presentado por Falb [6].

Para las el sistema de las ecuaciones primitivas en el Océano tropical, podemos escribir de la siguiente manera

$$d\xi = (A(t)\xi(t) + B(\xi(t)))dt + \sigma(t)dW, \qquad s \leq t \leq T. \tag{5.9}$$

proponemos que se debe verificar usando el filtro de Kalman modificado, que consiste en linealizar la ecuación no lineal.

5.1.2. El filtro de Kalman discreto para las ecuaciones primitivas. Otra propuesta futura, es discretizar las ecuaciones primitivas estocástica para el océano, y usar una data experimental en la ecuación de observaciones, con la cual se puede hacer una estimación mejorada de la variable de estados discreta, que originalmente se puede obtener por solo calculo de las ecuaciones discretizadas.

Resultados para este método han sido obtenidos por Jordy y Wang [13], usando la discretización de arakawa C. para un modelo de Océano costero con fronteras abiertas. Sin embargo, para nuestro problema que involucra la temperatura como variable fuertemente acoplada, se ha venido haciendo uso por los autores, [20], del esquema de diferencias staggered grid para las ecuaciones primitvas deterministicas, pero que se propone ser ampliado al sistema estocástico y con el uso del filtro de Kalman no lineal discreto, se pretende tener una mejora de la predicción estimada.

REFERENCES

[1] Bensoussan. A, Temam R. *Equations Stochastiques du type Navier-Stokes*, J. Fucntional Analysis 13, 195-222, 1973.

[2] Constantin, P., *Navier-Stokes Equations and Area of Interfaces*. Commun.Math.Phys. 129,pp.241-266,1990.

[3] Cushman-Roisin, B. *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics*, Prentice-Hall, New Jersey, 1999.

[4] Chao, Y., Halpern, D. and Perigaud, C., *Sea Surface Height Variavility During 1986-1988 in the Ttropical Pacific Ocean*, J. of Geophy. Reserch, vol.98, No.C4,6947-6959,1993.

[5] Du, L. and Zhang, T., *Local and global strong solutions to the Stochastic incompressible Navier-Stokes Equation in Critical Besov Space*, Arxiv,6/12/2017. https://arxiv.org/pdf/1710.11336.pdf

[6] Falb, P.L., *Infinite-Dimensional FIltering: The Kalman-Bucy Filter in Hilbert Space*, Information and Control 11, (1967), 102-137.

[7] Langa R., J.A., *Sistemas Dinámicos Estocásticos no autónomos y Sistemas Multivaluados*, Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. No. 21 (2002), 89-115.

[8] Fleming, W.H. and Rishel, R.W., *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag, Berlin, 1975

[9] Glatt-Holtz, N. and Ziane, M., *The Stochastic Primitve Equations in Two Space Dimensions With Multiplicative Noise*, Discrete and Continuous Dinamycal Systems Series B, 10(4), 2008, 801-822.

[10] Gill, A., *Atmosphere-Ocean Dynamics* .Academic Press,Inc.1982.

[11] Hendershot, M.C., *Single Layer Models of the General Circulation of the Ocean*, edited by H. Banberan, and W.Young, Springer-Verlag,New York,1987.

[12] Haltiner, G. and Willams, R., *A Numerical Predictionand Dynamic Metereology*. John Wiley and Sons;Second Ed., 1979.

[13] Jordy, A., Wang, A-P. *Estimation of Transoprt at Open Boundaries With an Ensemble Kalman Filter in a Coastal Ocean Model*, Ocean Modelling, 64 (2013) 56-66.

[14] Latif, M., Maier-Reimer, E. & Olbers, D., *Climate Variability Studies with a Primitive Equation Model of the Equatorial Pacific*. in*Coupled Ocean-Atmosphere Models*, edited by J.Nihoul ,pp.63-81,Elsevier,New York,1985.

[15] Marchuk, G., Dymnikov, V., Zalesny, V., Lykosov, V. and Galin, V., *Numerical Simulation of a Large-Scale Atmospheric and Oceanic Circulation*. in *Computational Mathematics and Mathematical modelling*, edited by G. Marchuk,V. Dymnikov, Mir Publishers, Moscow,pp.124-166,1985.

[16] McCreary, Jr. & Anderson, D., *Simple Models of El Niño and the Souther Oscilation*.in *Coupled Ocean-Atmosphere Models*, edited by J.Nihoul, pp.345-370, Elsevier,New York,1985.

[17] Lions, J-L., Temam, R. and Wang, S., *On the Equations of the Large-Scale Ocean*. Nonlinearity 5 pp.1007-1053,1992.

[18] Pedlosky, J., *Geophysical Fluid Dynamics*, AMS,1970.

[19] Rubio, O. *Ecuaciones Diferenciales Estocásticas*, Tesis de Mestro en ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería, 1990.

[20] Rubio, O. *A Primitive equation model for the Tropical Pacific Ocean*, V Americas Conferece on Differential Equations and Nonlinear Analysis, Edmonton, Canada, 2002.

[21] Temam, R., *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Phisics*, Springer-Verlag,1988

[22] Temam, R., *Navier-Stokes Equations*, Nor Holland, 1977.

[23] Van Neerven, J., Veraar, M. and Weis, L., *Conditions for stochastic integrability in UMD Banach spaces*. Banach spaces and their applications in analysis,2007, pp 125146.

[24] Pancowski R. & Philander G. *Parametrization of vertical mixing in Numerical Models in Tropical Oceans*, J.Phys.Oceanogr.,11,1443-1451,1981.