



Sobre el Espacio Euclidiano Bidimensional

On the Bidimensional Euclidean Space

Edgar Vera Saravia* and Henry Zubieta Rojas†

Received, Jun. 12, 2018

Accepted, Nov. 10, 2018

Resumen

Ofrecemos una introducción geométrica del Espacio Euclidiano Bidimensional \mathbb{E}^2 utilizando, tanto el enfoque geométrico del \mathbb{R} -Espacio Afín Bidimensional como el Álgebra Geométrica Bidimensional.

Estas notas, dirigidas a Docentes Universitarios de Física y Matemática, tratan de emular lo propuesto por Felix Klein en la primera década del siglo XX.

Palabras clave: Álgebra Geométrica, Espacio Euclidiano, Espacio Afín.

Abstract

We offer a geometric introduction to the two-dimensional Euclidean Space \mathbb{E}^2 using both the geometric approach of the affine \mathbb{R} -Space and the two-dimensional Geometric Algebra.

These notes, intended for university professors of physics and mathematics, try to emulate the program developed by Felix Kline in the first decade of the 20th century.

Keywords: Geometric Algebra, Euclidean Space, Afín Space.

1. Introducción. En su Erlanger Programm de 1908 Felix Klein propuso:

Un docente puede abordar con mayor solvencia y convicción el tema de matemática que le corresponda transmitir a sus alumnos, estudiando previamente dicho tema desde un punto de vista matemático avanzado.

Klein plasmó sus ideas en su libro, para Docentes Preuniversitarios de Matemática: *Matemática Básica desde un punto de vista superior, acorde con la evolución matemática hasta el siglo XIX.*

Pretendemos hacer Matemática Básica para Docentes Universitarios de Física y Matemática,

- Mostrando el aspecto avanzado de la misma y
- Acompañando su evolución hasta el siglo XX.

En este contexto ofrecemos una versión matemática amigable de dos temas que enriquecen las demostraciones geométricas clásicas mediante demostraciones algebraicas de las mismas,

PRIMERO: El Plano Euclidiano Bidimensional \mathbb{E}^2 que en las aplicaciones, sin mayor preámbulo, es representado mediante una pizarra, una hoja de papel o una pantalla, que denotaremos \mathcal{P} , utilizando

- Puntos $\in \mathcal{P}$ (denotados A, B, C), para representar los elementos de \mathbb{E}^2 .
- Flechas $\subset \mathcal{P}$ (denotadas AB, BC, AC) para representar los **vectores libres** de \mathbb{E}^2 .

Matematizaremos \mathbb{E}^2 considerando el conjunto de pares ordenados de números reales

$\mathfrak{R}_2 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de tal modo que todo punto sirve de origen de una estructura de espacio vectorial y dichos espacios vectoriales resultan convenientemente conectados entre si y son isomorfos a \mathbb{R}^2 (el conjunto \mathfrak{R}_2 provisto de la estructura usual de espacio vectorial). Esto es parte de lo que se necesita para algebrizar las demostraciones geométricas en el espacio euclidiano.

*Facultad de Ciencias Matemáticas - UNMSM, Av. Venezuela s.n., Lima-Perú (everas@unmsm.edu.pe).

†Unidad de Posgrado - FCM - UNMSM, Av. Venezuela s.n., Lima-Perú (hzubietar@unmsm.edu.pe).

SEGUNDO: El Álgebra Geométrica Bidimensional $AG(2)$ que mejora el conocido encaje de álgebras determinado por los reales y complejos (\mathbb{R} es subálgebra de \mathbb{C}):

$$(1.1) \quad \mathbb{R} < \mathbb{C}.$$

Como sabemos, los complejos ampliaron el análisis real e incluyeron, de modo indirecto, algunos aspectos geométricos como las rotaciones.

Presentaremos $AG(2)$ como una abstracción geométrica del **álgebra no conmutativa** de matrices reales $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ y obtendremos el siguiente encaje de álgebras reales:

$$(1.2) \quad \mathbb{R} < \mathbb{C} < AG(2).$$

2. Bosquejando el Espacio Euclideo Bidimensional. El enfoque geométrico de los espacios afines trata de un tipo de variedad \mathcal{A} que tiene la propiedad de que tanto ella como su fibrado tangente $T\mathcal{A} \equiv \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ son representados en un mismo ambiente: Los elementos de \mathcal{A} son representados por puntos y los elementos de $T\mathcal{A}$ por flechas (también llamadas vectores libres).

En este contexto el Espacio Euclideo Bidimensional \mathbb{E}^2 es matematizado como el conjunto de pares ordenados de números reales $\mathfrak{R}_2 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ provisto de la siguiente estructura:

EA1. Con \mathbb{R}^2 denotaremos el conjunto \mathfrak{R}_2 provisto de la estructura usual de \mathbb{R} -espacio vectorial.

EA2. Todo punto sirve de origen de una estructura de \mathbb{R} -espacio vectorial isomorfa a \mathbb{R}^2 .

EA3. Representaremos \mathbb{E}^2 del modo tradicional, usando una pizarra, una hoja de papel o una pantalla, que denotaremos \mathcal{P} , de tal modo que:

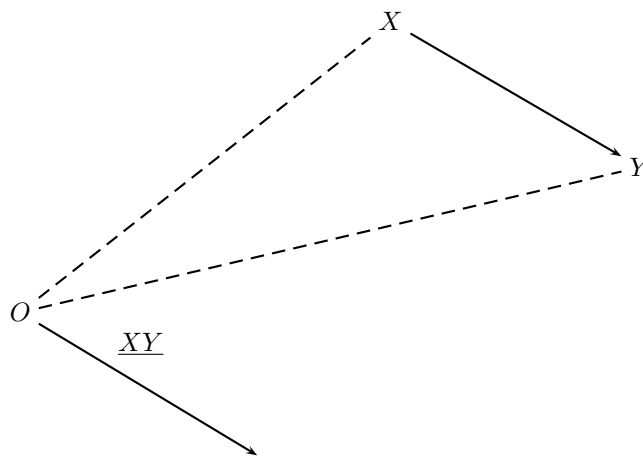
– Cada elemento $P \in \mathbb{E}^2$ es representado por un único punto $P \in \mathcal{P}$. Usaremos la misma letra P en ambos casos.

– Los elementos $(P, Q) \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$ son representados por flechas $PQ \subset \mathcal{P}$, con origen el punto asociado a P y extremo el punto asociado a Q . También usaremos PQ para referirnos al par ordenado (P, Q) y en ambos casos será llamado vector tangente de \mathbb{E}^2 en $P \in \mathbb{E}^2$.

$T_P\mathbb{E}^2 = \{P\} \times \mathbb{E}^2$ indicará la familia de los vectores tangentes de \mathbb{E}^2 en $P \in \mathbb{E}^2$, representados con flechas con origen en P .

EA4. Se establece una Conexión entre los diferentes espacios tangentes mediante la llamada **Traslación Paralela** que determina:

– Cada vector tangente $XY \in T_X\mathbb{E}^2$ es **biunívocamente** asociado a un vector tangente $\underline{XY} := OY - OX \in T_O\mathbb{E}^2$, donde $O = (0, 0)$,



Resulta un isomorfismo, como \mathbb{R} -espacios vectoriales, $T_X\mathbb{E}^2 \equiv T_O\mathbb{E}^2 \equiv \mathbb{R}^2$, que permite

– Hablar de vectores libres paralelos,

$$PX \in T_P\mathbb{E}^2 \text{ y } QY \in T_Q\mathbb{E}^2 \text{ son igualmente paralelos } \iff \underline{PX} = \underline{QY}$$

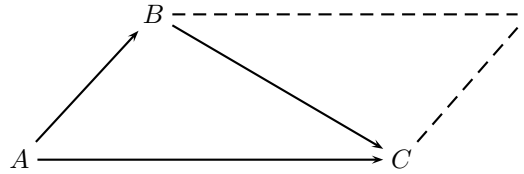
– **Sumar vectores libres** cualesquiera y obtener un vector en $T_R\mathbb{E}^2$, con $R \in \mathbb{E}^2$ prefijado, mediante la suma de vectores en \mathbb{R}^2 :

$$PX + QY = RZ \iff \underline{PX} + \underline{QY} = \underline{RZ}$$

Con esto podemos matematizar la suma de vectores libres

$$(2.1) \quad AB + BC = AC$$

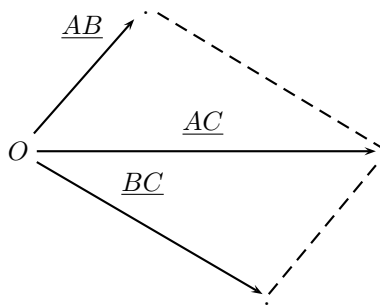
que tradicionalmente se “presenta y demuestra” recurriendo al “criterio del paralelogramo”



utilizando ahora

$$AB + BC = AC \iff \underline{AB} + \underline{BC} = \underline{AC}$$

la última suma es en \mathbb{R}^2 y se representa con el paralelogramo



3. Bosquejando el Álgebra Geométrica Bidimensional. Las matrices, pertenecientes al álgebra de matrices reales $\mathbb{R}^{2 \times 2}$,

$$m_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad m_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tienen propiedades realmente maravillosas:

$$\{m_0, m_1, m_2, m_1 m_2 \equiv m_{12}\}$$

es una base de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, como \mathbb{R} -espacio vectorial; precisamente,

$$(3.1) \quad \mathbb{R}^{2 \times 2} = \{a_0 + a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_{12}; \quad a_j \in \mathbb{R}\}$$

Explícitamente los elementos de la base son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los productos entre estas matrices determinan la siguiente tabla multiplicativa

$$(3.2) \quad \begin{array}{c|c|c|c} m_0 & m_1 & m_2 & m_{12} \\ \hline m_1 & m_0 & m_{12} & m_2 \\ \hline m_2 & -m_{12} & m_0 & -m_1 \\ \hline m_{12} & -m_2 & m_1 & -m_0 \end{array}$$

Esto sugiere la siguiente abstracción al “álgebra de matrices sin matrices” AG(2).

Definición 1. El Álgebra Geométrica Euclídeana Bidimensional AG(2) será el siguiente \mathbb{R} - subespacio vectorial del anillo de polinomios $\mathbb{R}[u_1, u_2]$, en las variables u_1 y u_2 :

$$AG(2) := \{a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_1 u_2; \quad a_j \in \mathbb{R}\}$$

sus elementos serán llamados **números geométricos**.

$AG(2)$ estará provisto de un producto distributivo y asociativo, pero no conmutativo, llamado **producto geométrico**, procesado usando la siguiente tabla ($u_1 u_2 \equiv u_{12}$)

$$(3.3) \quad \begin{array}{c|c|c|c} I & u_1 & u_2 & u_{12} \\ \hline u_1 & I & u_{12} & u_2 \\ \hline u_2 & u_{21} & I & -u_1 \\ \hline u_{12} & -u_2 & u_1 & -I \end{array}$$

Tabla del producto geométrico de $AG(2)$

Una forma compacta de expresar la tabla del producto geométrico de $AG(2)$ es mediante las llamadas **Condiciones de Dirac**:

$$(3.4) \quad u_i u_j + u_j u_i = 2\delta_{ij} \quad \text{con} \quad i, j \in \{1, 2\}$$

Es pertinente precisar las operaciones de $AG(2)$: Su estructura vectorial nos permite sumar números geométricos pero, para multiplicar números geométricos debemos tener cuidado ya que, si bien se trata de un proceso similar al producto de polinomios en el sentido que solo podemos usar la distributividad y la asociatividad pero **no la conmutatividad**, porque el producto geométrico proviene del producto de matrices que no es conmutativo y en su lugar debemos utilizar la tabla (3.5). Veamos esto, dados

$$A = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_{12}, \quad B = b_0 + b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_{12} \in AG(2)$$

se tiene

$$(3.5) \quad AB = c_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_{12} \in AG(2)$$

donde, usando la tabla del producto geométrico (3.3),

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3 \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_3 b_2 - a_2 b_3 \\ c_2 &= a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_1 b_3 - a_3 b_1 \\ c_3 &= a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1. \end{aligned}$$

De otro lado,

- Identificando u_1 y u_2 con la base canónica de \mathbb{R}^2 , explicitamos que $AG(2)$ contiene una copia linealmente isomorfa de \mathbb{R}^2 .
- Como $(u_{12})(u_{12}) = -1$, usando la identificación $u_{12} \equiv i \in \mathbb{C}$, explicitamos que $AG(2)$ contiene una copia linealmente isomorfa de los números complejos \mathbb{C} que preserva la estructura de álgebra.
- Los resultados anteriores determinan el isomorfismo, como \mathbb{R} -espacios vectoriales:

$$(3.6) \quad AG(2) \equiv \mathbb{C} \oplus \mathbb{R}^2.$$

En este nuevo contexto, usando la tabla del producto geométrico (3.3), el lector puede verificar los dos resultados algebraico-geométricos siguientes:

- En el Álgebra Geométrica $AG(2)$ se cumple la **Identidad Geométrica de Euler**:
El producto geométrico de dos vectores no nulos, $u, v \in \mathbb{R}^2$, es el número complejo

$$(3.7) \quad uv = \|u\| \|v\| e^{\theta i} = \|u\| \|v\| \cos \theta + \|u\| \|v\| (\sin \theta) i$$

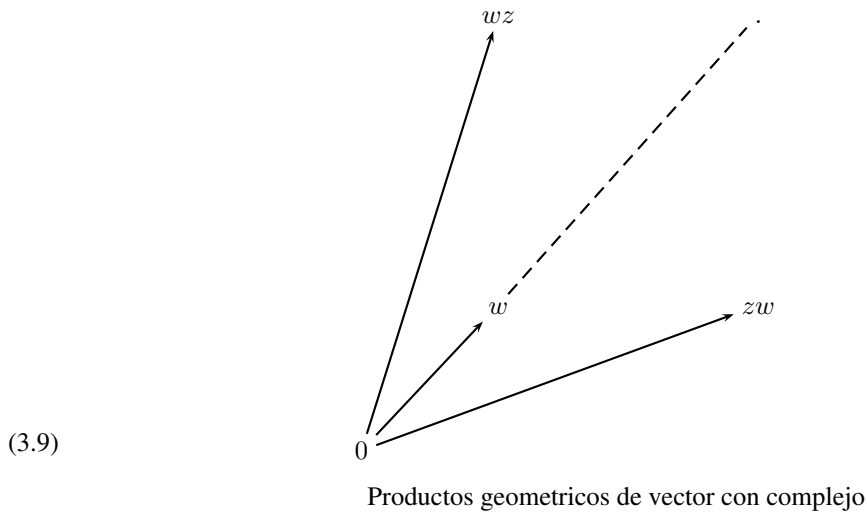
cuyo módulo es $|uv| = \|u\| \|v\|$ y cuyo argumento $\theta = \mu \angle (u, v) \in]-\pi, \pi]$ es la medida del ángulo orientado de u a v (se conviene considerar $\theta = \pi$ si y solo si u y v son opuestos). Recíprocamente, todo número complejo es el producto geométrico de dos vectores, pero sin unicidad de los mismos.

Notar que, como $-\theta \in]-\pi, \pi]$ es la medida del ángulo orientado de v a u , resulta que vu es el complejo conjugado de uv dado en (3.7), precisamente:

$$(3.8) \quad vu = \|u\| \|v\| e^{-\theta i} = \|u\| \|v\| \cos \theta - \|u\| \|v\| (\sin \theta) i$$

- Los productos geométricos, wz y zw , de un vector w con un complejo z , son vectores simétricos respecto de w que resultan de rotar el vector $|z|w$ (una homotecia de w) el ángulo orientado $\pm \arg(z)$ respectiva-

mente, como sugiere el siguiente diagrama (con $|z| > 1$ y $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$):



4. Algebrizando la Geometría: Algunos Ejemplos.

PRIMERO: La estructura de álgebra geométrica permite determinar la conocida métrica euclideana en \mathbb{R}^2 , que inicialmente hemos considerado simplemente como un espacio vectorial; en efecto, de la Identidad Geométrica de Euler (3.7) se tiene:

$$(4.1) \quad ||v|| = \sqrt{vv}.$$

SEGUNDO: La Identidad Geométrica de Euler (3.7) (y también (3.8)) algebriza de modo invariante (sin usar coordenadas) los conceptos geométricos de ortogonalidad y colinealidad de vectores: Dados los vectores no nulos u y v ,

- $uv + vu = ||u|| ||v|| \cos \theta$, reestablece el producto interior $u \cdot v$ lo que permite algebrizar de modo invariante la ortogonalidad de dichos vectores; en efecto,

$$(4.2) \quad u \perp v \iff uv + vu = 0 \quad (\text{su producto geométrico anticonmuta}).$$

- $|uv - vu| = ||u|| ||v|| \sin \theta$, reestablece el valor del área del paralelogramo que determinan los vectores u y v lo que permite algebrizar de modo invariante la colinealidad de tales vectores; en efecto,

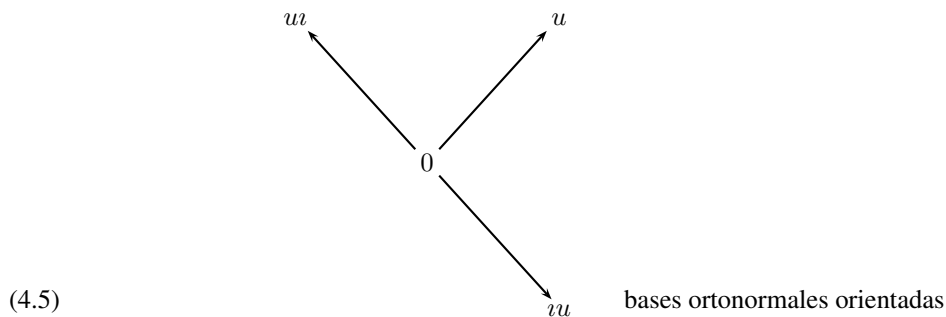
$$(4.3) \quad u ||v \iff uv - vu = 0 \quad (\text{su producto geométrico conmuta}).$$

TERCERO: Las Condiciones de Dirac (3.4) corresponden a la versión algebraica del concepto de base ortonormal; en efecto, basta ver que la forma explícita de las Condiciones de Dirac son las conocidas Condiciones de Grassmann-Clifford:

$$(4.4) \quad u_1u_1 = u_2u_2 = 1 \quad \text{y} \quad u_2u_1 = -u_1u_2,$$

y podemos concluir que las identidades (4.2) y (4.4) dicen: Los vectores u_1 y u_2 determinan una base base ortonormal si y solo si cumplen las Condiciones de Dirac.

CUARTO: Como $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$, dado un vector unitario $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ podemos construir bases ortonormales orientadas: (u, u) positivamente orientada y (u, iu) negativamente orientada; en efecto, es un caso particular del resultado graficado en (3.9) ya que los vectores iu y iu son ortogonales a u , de la misma logitud de u y uno inverso del otro, precisamente:



QUINTO: Podemos algebrizar el proceso geométrico de calcular el vector reflexión, $r_u(w) \in \mathbb{R}^2$ de un vector $w \in \mathbb{R}^2$, respecto a una recta l que pasa por el origen y es ortogonal al vector unitario $u \in S^1$, mediante la siguiente aplicación, construida utilizando el producto geométrico de AG(2),

$$\rho_u : v \in \mathbb{R}^2 \mapsto \rho_u(v) = -uvu \in \mathbb{R}^2.$$

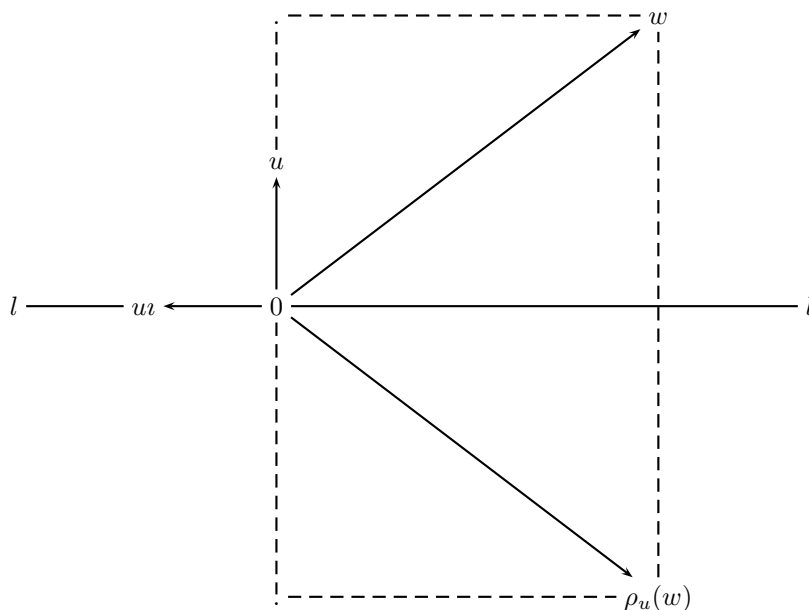
En efecto, el diagrama dado abajo nos ayuda a ver que

$$w = (w.u)u + (w.(u))u \implies r_u(w) = -(w.u)u + (w.(u))u$$

De otro lado, calculando en el contexto de AG(2) y usando $-uu = u, uu = 1$, tenemos

$$\rho_u(v) = -uvw = -u((w.u)u + (w.(u))u)u = -(w.u)u + (w.(u))u$$

notar que $w.u$ y $w.(u)$ son escalares y conmutan con todo número geométrico.



SEXTO: Usaremos el Álgebra Geométrica Afin para dar una demostración algebraica del siguiente resultado que, a rigor, corresponde a la Geometría Euclideana Afin:

En todo polígono convexo de $n \geq 3$ lados la suma de las medidas de sus ángulos interiores, orientados positivamente, es igual a $\pi(n - 2)$.

Denotando con $A_j \in \mathbb{E}^2, 1 \leq j \leq n$, los vértices del polígono convexo (considerados secuencialmente de tal modo que recorremos el polígono en el sentido antihorario) y con α_j el ángulo interior, positivamente orientado, correspondiente al vértice A_j , lo que debemos demostrar es:

$$(4.6) \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j = \pi(n - 2)$$

Este tipo de aplicación requiere unificar previamente lo hecho en las dos secciones anteriores y presentar resultados que nos permita extender el Álgebra Geométrica AG(2), del Espacio Vectorial Euclideano \mathbb{R}^2 , al Álgebra Geométrica Afin AGA(2) del Espacio Afin Euclideano \mathbb{E}^2 ; por ejemplo,

- Ampliar el producto geométrico de vectores libres mediante

$$(PX)(QY) = (\underline{PX})(\underline{QY})$$

- Ampliar la Identidad Geométrica de Euler (3.7), a la Identidad Geométrica de Euler Afin: Dados los vectores libres no nulos $AB \in T_A\mathbb{E}^2$ y $XY \in T_X\mathbb{E}^2$ se cumple:

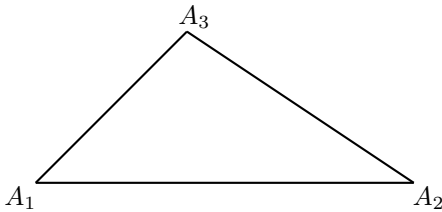
$$(4.7) \quad (AB)(XY) = ||AB|| ||XY|| e^{\theta}$$

donde $\theta = \mu \angle (\underline{AB}, \underline{XY}) \in] - \pi, \pi]$ (ángulo orientado)

Aquí nos conviene reescribir la identidad Geométrica de Euler Afin (4.7) del siguiente modo: Dado los vectores libres no nulos $AB \in T_A\mathbb{E}^2$ y $XY \in T_X\mathbb{E}^2$ se cumple:

$$(4.8) \quad \frac{(AB)(XY)}{\|AB\|\|XY\|} = e^{\theta i}$$

Veamos ahora la demostración de (4.6) para el caso de un triángulo:



Con

$$\alpha_1 = \mu\angle(A_1A_2, A_1A_3), \alpha_2 = \mu\angle(A_2A_3, A_2A_1) \text{ y } \alpha_3 = \mu\angle(A_3A_1, A_3A_2).$$

Aplicando tres veces la identidad (4.8), resulta:

$$\begin{aligned} e^{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)i} &= e^{\alpha_1 i} e^{\alpha_2 i} e^{\alpha_3 i} \\ &= \frac{(A_1A_2)(A_1A_3)}{\|A_1A_2\|\|A_1A_3\|} \frac{(A_2A_3)(A_2A_1)}{\|A_2A_3\|\|A_2A_1\|} \frac{(A_3A_1)(A_3A_2)}{\|A_3A_1\|\|A_3A_2\|} \\ &= \frac{(A_2A_3)(A_2A_1)}{\|A_2A_3\|\|A_2A_1\|} \frac{(A_1A_2)(A_1A_3)}{\|A_1A_2\|\|A_1A_3\|} \frac{(A_3A_1)(A_3A_2)}{\|A_3A_1\|\|A_3A_2\|} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Para simplificar hemos usado la anticonmutatividad $YX = -XY$ y, de la Identidad de Euler (4.7), $(XY)(XY) = \|XY\|^2$.

Podemos entonces concluir que para el caso de un triángulo; es decir, $n = 3$,

$$e^{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)i} = -1 \implies \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi = (3 - 2)\pi$$

Para el caso $n > 3$ usaremos el proceso de inducción:

Considerando el segmento que une los vértices A_2 y A_n tendremos un triángulo T, que une los vértices A_1, A_2 y A_3 y un polígono convexo P de $n-1$ lados, que une los vértices de $A_2, A_3 \dots A_n$. Hecho esto, aplicando inducción tendremos que la suma de las medidas de los ángulos interiores del polígono convexo de n lados, $\pi(n - 2)$, resulta de sumar $\pi(n - 1 - 2)$ (la suma de las medidas de los ángulos interiores del polígono convexo de $n-1$ lados P) con π (la suma de las medidas de los ángulos interiores del triángulo T).

5. Conclusiones. Permiten explicar el nombre Álgebra Geométrica, dado por William K. Clifford, quién fue su creador en el periodo comprendido entre 1873 y 1879.

- La estructura afin del espacio euclidean bidimensional nos ha permitido, por ejemplo, matematizar la suma de vectores libres (2.1) mediante la suma de vectores en \mathbb{R}^2 .
- El Álgebra Geométrica AG(2) amplía y optimiza la relación álgebra-geometría y torna mucho más amigable el conocimiento y uso de los complejos. Nos ha permitido, por ejemplo, presentar la Identidad Geométrica de Euler (3.7), llamada así porque, considerando u y v unitarios se obtiene la conocida identidad de Euler

$$(5.1) \quad e^{\theta i} = \cos\theta + (\sin\theta)i ; \quad \theta \in \mathbb{R},$$

cuyo caso particular (u unitario y $v = -u$, en cuyo caso $\theta = \mu\angle(u, -u) = \pi$) es la famosa Ecuación de Euler, conocida desde antes de 1748,

$$(5.2) \quad e^{\pi i} + 1 = 0.$$

- El producto geométrico de AG(2) permite algebrizar no solo el concepto geométrico de ortogonalidad (ver (4.2)), sino también los conceptos de paralelismo (ver (4.3)), base ortonormal (ver el Ejemplo TERCERO) y las reflexiones en \mathbb{R}^2 (ver el Ejemplo QUINTO).

En este proceso se redefine el producto interior de vectores: $u \cdot v = \frac{1}{2}(uv + vu)$, que algebriza la ortogonalidad. Se introduce el producto exterior de los mismos: $u \wedge v = \frac{1}{2}(uv - vu)$, que algebriza el paralelismo y finalmente se obtiene la relación unificadora $uv = u \cdot v + u \wedge v$.

Agradecimientos. Al Comité Editor de SELECCIONES MATEMÁTICAS por su amable acogida, en particular, al Dr. Obidio Rubio por su gentil apoyo.

Referencias

- [1] Artin E., *Algebra Geométrica*; Limusa, Méjico 1992.
- [2] Berger M., *Geometry I*; Springer, Heildelberg, 1987.
- [3] Barker - Howe *Continuous Symmetry (From Euclid to Klein)*; American Mathematical Society, 2007.
- [4] Vera E. *Matemática Básica para Docentes Universitarios de Matemática*; Notas de Clase, 2017.