Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 05(02): 230 - 240 (2018)

Desingularización de Superficies Casi Ordinarias Irreducibles

Resolution of Irreducibles Quasi Ordinary Surfaces

Rina Roxana Paucar Rojas *

Received, Dec. 31, 2017 *Accepted, Nov. 16, 2018*

Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar y describir la resolución o desingularización de superficies casi ordinarias irreducibles, mediante el enfoque de Lipman ([6], [7]).

Con dicho objetivo, se define a las superficies casi ordinarias y se describe su parametrización por ramas casi ordinarias, también se define a los anillos casi ordinarios, anillos locales de las superficies casi ordinarias irreducibles, luego se estudia la relación que existe entre el cono tangente y lugar singular de un anillo casi ordinario y los pares distinguidos de una rama casi ordinaria normalizada que representa a este anillo. Asimismo, se define a las transformadas especiales de un anillo casi ordinario y se muestra que ellas son otra vez casi ordinarias.

Palabras clave. superficies algebroides casi ordinarias, resolución de singularidades, explosiones, anillo casi ordinario.

Abstract

The aim of this work is to study and describe the resolution or desingularization of irreducible quasi ordinary surfaces, following Lipman's approach ([6], [7]).

To achieve our goal, we define the quasi ordinary surfaces and describe their parametrization by quasi ordinary branches, we also define the quasi ordinary rings, local rings of the quasi ordinary irreducible surfaces, then we study the relationship that exists between the tangent cone and singular locus of a quasi ordinary ring and the distinguished pairs of a quasi ordinary normalized branch that represents this ring. Also, we define the special transforms of a quasi ordinary ring and show that they are again quasi ordinary.

Keywords. quasi ordinary algebroid surfaces, resolution of singularities, blowups, quasi ordinary rings.

1. Introducción. El estudio de las superficies casi ordinarias se inició con Jung en el año 1908, cuando estas aparecieron en su enfoque de desingularización, donde empieza proyectando una superficie arbitraria $V \subset \mathbb{C}^3$ sobre el plano $\mathbb{C}^2$, luego aplica transformaciones cuadráticas al lugar discriminante hasta que esta no tenga singularidades diferentes a los puntos dobles ordinarios. Así, usando solamente la desingularización de curvas planas se puede modificar localmente cualquier superficie a una que solamente tenga singularidades casi ordinarias. De este modo, el problema de resolver singularidades de superficies se reduce al problema de resolver singularidades de superficies casi ordinarias.

Las superficies casi ordinarias irreducibles son aquellas poseen una característica que nos gustaría que tuvieran todas las superficies al momento de estudiar su resolución; es decir, son aquellas que admiten una parametrización, alrededor de un punto singular, por series de potencias fraccionarias en 2 variables del tipo de Puiseux llamadas ramas casi ordinarias, lo cual permite asociar a cada superficie casi ordinaria irreducible unos pares ordenados especiales llamados pares distinguidos que nos guían en el proceso de su resolución.

La resolución de singularidades es aplicado para demostrar teoremas de diversos objetos como por ejemplo: variedades algebraicas, ecuaciones diofánticas, cohomología de grupos, ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos, etc [[3]; p. 324].

Todo lo anterior motiva estudiar la resolución de superficies casi ordinarias, y es el objetivo del presente trabajo en el cual además se da un ejemplo aplicativo.

Finalmente, cabe mencionar que en este trabajo se usa el término *superficie* para referirnos a una *superficie algebroide*.

* Pontificia Universidad Católica del Perú. *rrpaucar@pucp.pe*.

DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2018.02.09

1.1. Superficie Casi Ordinaria.

Definición 1. *Las superficies algebroides son hipersuperficies algebroides de dimensión 2; es decir, esquemas del tipo $V = Spec(A)$, donde A es un anillo noetheriano, local, completo, equicaracterístico, equidimensional, reducido, de dimensión de krull 2 y tal que el ideal maximal de A tiene una base de 3 elementos. A es llamado el anillo local de V.*

Para revisar la definición de hipersuperficies algebroides vea [[11]; sección 2, p. 975] o [[8]; sección 1, p.1].

El ideal maximal de A visto como un punto de V es llamado el *origen de V* y es denotado por O.

Definición 2. *Cualquier base mínimal del ideal maximal de A es llamado un sistema de cordenadas locales para V en O.*

Sea $\{x, y, z\}$ un sistema de coordenadas locales de $V = Spec(A)$ en O, gracias a las propiedades de A y haciendo uso del Teorema de Cohen se tiene que $A \simeq \dfrac{k[[X,Y,Z]]}{\langle f\rangle}$, donde $f \in k[[X, Y, Z]]$. La ecuación $f = 0$ representa un embebimiento de V en $\mathbb{A}^3_k$ y es llamada la *ecuación que define o representa a V* respecto al sistema de coordenadas locales $\{x, y, z\}$ y está unívocamente determinado por este sistema de coordenadas, salvo multiplicación por unidades.

Definición 3. *Sea $f = 0$ la ecuación que representa a V. Un subconjunto $\{x, y\}$ de un sistema de coordenadas locales $\{x, y, z\}$ de V forman un sistema de parámetros locales de V en O si, $f(0, 0, Z) = cZ^s$+términos de orden mayor a s; es decir, cuando f es regular en Z de orden $s \geq \nu = mult(f)$, donde $mult(f)$ denota la multiplicidad de f.*

En el caso de la definición 3, por el Teorema de Preparación de Weierstrass existe $u \in k[[X, Y, Z]]^*$ y f' un polinomio distinguido de grado s (en Z) tal que $f = u.f'$.

Así, se concluye que si $\{x, y\}$ es un sistema de parámetros locales de V en O, siempre podemos tomar una ecuación de V respecto a dicho sistema de parámetros tal que sea un polinomio distinguido y este polinomio es llamado el *polinomio que define o representa a la superficie* $V = Spec(A)$ o simplemente *polinomio que define o representa a* A, respecto a este sistema de parámetros.

Se tiene que ν, de la definición 3, es la *multiplicidad del anillo local A* o equivalentemente, usando la terminología geométrica, O es un punto de multiplicidad ν; mientras que s es la *multiplicidad del ideal $\mathfrak{m}-$primario* $p = \langle x, y\rangle A$ [[9]].

Observación 1. *Usamos el término polinomio distinguido para referirnos a un polinomio de Weierstrass o a un pseudopolinomio.*

Definición 4. *Sea A anillo local de la superficie $V = Spec(A)$. Se dice que un ideal primo p de A es un centro permitido si $\dfrac{A}{p}$ es regular y $mult(A_p) = mult(A)$.*

Si A es el anillo local de la superficie $V = Spec(A)$ y p un ideal de A regular de codimensión 1, entonces existe $\{x, y, z\}$ un sistema de coordenadas de V en O tal que $\{x, y\}$ es un sistema de parámetros transversal y tal que $p = \langle y, z\rangle A$

Definición 5. *Sea $W = Spec\left(\dfrac{A}{p}\right)$. Se dice que $\{x, y, z\}$ es un sistema de coordenadas locales de V adaptado a la subvariedad W si cumple la condición anterior.*

Si $f = 0$ es la ecuación que define a V respecto al sistema de coordenadas de V adaptada a W de la definición 5 , entonces $f \in \langle Y, Z\rangle R$.

Si $f = 0$ con $mult(f) = \nu$ es la ecuación que define a V respecto al sistema de coordenadas de V adaptada a W de la definición 5 , entonces se dice que $p = \langle y, z\rangle A$ *es un centro permitido* si y solo si $f \in \langle Y, Z\rangle^{\nu} R$ [[8]; sección 1, p.3]. Cuando esto ocurre ($f \in \langle X, Y, Z\rangle^{\nu} R \rightarrow f \in \langle Y, Z\rangle^{\nu} R$) podemos escribir

$$f = F_{\nu} + F_{\nu+1} + \cdots ,$$

donde F_i es una forma de grado i en Y, Z con coeficientes en $k[[X]]$.

Dada la subvariedad W de $V = Spec(A)$ se le puede hacer corresponder su punto general $p \in V = Spec(A)$. Esta correspondencia permite, al tratar con las propiedades de las subvariedades, que uno se refiera indistintamente a estas o a sus ideales. Así, se dice W es una subvariedad permitida de V o que p es un ideal permitido de A, etc.

Definición 6. *Sea f polinomio que define a V, $D_Z(f)$ el discriminante de f respecto de Z; $\{x, y\}$ un sistema de parámetros locales de V en O y sea $z \in \mathfrak{m}$ tal que $\{x, y, z\}$ es un sistema de coordenadas locales de V. La discriminante de V respecto de este sistema de parámetros es una subvariedad de $Spec(k[[X, Y]])$ cuya ecuación es $red(D_Z(f))$, y es denotado por $\Delta_{x,y}$.*

Definición 7. *La superficie algebroide $V = Spec(A)$, es llamada casi ordinaria si, existe un sistema de parámetros locales de V en O tal que la discriminante de V, respecto a este sistema de parámetros, es una curva lisa o una curva con un punto doble (unión de 2 curvas lisas transversales).*

Cuando V es una superficie casi ordinaria, mediante un cambio de parámetros se puede conseguir que la discriminante de V sea $Spec\left(\frac{k[[X,Y]]}{X.Y}\right)$.

Supongamos que $\{x,y\}$ son parámetros que cumplen la condición anterior con $z \in \mathfrak{m}$ tal que $\{x,y,z\}$ es un sistema de coordenadas locales de V en O y sea f el polinomio que define a V respecto a este sistema de coordenadas, entonces la $Z-$discriminante de f es de la forma $X^a.Y^b\varepsilon(X,Y)$, donde $\varepsilon(X,Y) \in k[[X,Y]]^*$.

Definición 8. *El polinomio f que define a la superficie casi ordinaria $V = Spec(A)$, es llamado un polinomio casi ordinario y el anillo A es llamado anillo casi ordinario.*

1.1.1. Parametrización.

Cuando f es un polinomio casi ordinario de (cierto orden digamos m), y además es irreducible, por el Teorema de Jung-Abhyankar [[5]] posee raíces $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_m \in \phi_n$ que son series de potencias fraccionarias en 2 variables, así en forma análoga al caso de curvas, las cuales admiten una parametrización por series de potencias fraccionarias en una variable llamadas series de Puiseux, las superficies casi ordinarias irreducibles pueden ser parametrizadas o representadas por series de potencias fraccionarias en 2 variables; es decir, existen $n \in \mathbb{Z}^+$ (no necesariamente $n = m$) y $\zeta = \zeta_1, \ldots, \zeta_m \in \phi_n$, tal que

$$f(X,Y,Z) = \prod_{i=1}^{m}(Z - \zeta_i)$$

donde, $\zeta_i = H_i(X^{1/n}, Y^{1/n}) = H(w_{i1}X^{1/n}, w_{i2}Y^{1/n})$, con $w_{i1}^n = w_{i2}^n = 1$ (w_{i1}, w_{i2} son raíces n-ésimas de la unidad), y ϕ_n denota al anillo de series de potencias fraccionarias de orden menor o igual a n.

Definición 9. *Sea f un polinomio casi ordinario irreducible. Si ζ es una raíz de f, decimos que ζ representa a A.*

Definición 10. *Las raíces $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_m$ del polinomio casi ordinario irreducible f, son llamadas ramas casi ordinarias de f.*

Las ramas casi ordinarias se caracterizan por ser no unidades y por que tienen la siguiente propiedad: $\zeta_i - \zeta_j = M_{ij}\varepsilon_{ij}, \forall i \neq j$, donde $M_{ij} = X^{\lambda_{ij}/n}Y^{\mu_{ij}/n}$ es un monomio en $X^{1/n}$, $Y^{1/n}$; donde λ_{ij}, μ_{ij} son enteros que dependen de i, j y $\varepsilon(X^{1/n}, Y^{1/n})$ es una unidad en ϕ_n; recíprocamente, si $\zeta \in \phi_n$ y cumple las dos propiedades anteriores, entonces es una raíz de un polinomio casi ordinario. Los monomios M_{ij} así obtenidos son llamados *monomios distinguidos* de ζ y los pares $\left(\frac{\lambda_{ij}}{n}, \frac{\mu_{ij}}{n}\right)$, exponentes de estos monomios son llamados *pares distinguidos* de ζ.

Los monomios distinguidos satisfacen las siguientes propiedades [[6];Sección 1]

1. Todos los monomios distinguidos aparecen en la expresión de ζ, como serie de potencia fraccionaria.
2. Dados dos monomios distinguidos de la rama ζ, $M_i = X^\lambda Y^\mu$ y $M_j = X^\sigma Y^\tau$ se tiene que $M_i \leq M_j$ ($(\lambda,\mu) \leq (\sigma,\tau)$) o $M_j \leq M_i$ ($(\sigma,\tau) \leq (\lambda,\mu)$).
3. Si $\{M_r\}_{1\leq r\leq s}$ es el conjunto de los monomios distinguidos diferentes de la rama casi ordinaria ζ. Entonces $L(\zeta) = L(M_1, ..., M_s)$.
4. Sea $s \in \mathbb{Z}$ y $M_i = X^{\lambda_i}Y^{\mu_i}$, $i = 1, ..., s$ monomios arbitrarios con exponentes fraccionarias. Entonces $X^\lambda Y^\mu \in L(M_1, ..., M_s)$ si y solo si

$$(\lambda,\mu) = q_1(\lambda_1,\mu_1) + (\lambda_2,\mu_2) + \cdots + q_s(\lambda_s,\mu_s) \text{ mod } \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}.$$

5. Sean $M_i = X^{\lambda_i}Y^{\mu_i}$, $i = 1, ..., s$; los monomios distinguidos de la rama casi ordinaria ζ enumerados de tal forma que $(\lambda_1,\mu_1) < (\lambda_2,\mu_2) < \cdots < (\lambda_s,\mu_s)$. Supongamos que $c_{\lambda\mu}X^\lambda Y^\mu$ es un término de ζ ($c_{\lambda\mu} \neq 0$) tal que $M = X^\lambda Y^\mu \in L(M_1, ..., M_t)$ y $X^\lambda Y^\mu \notin L(M_1, ..., M_{t-1})$. Entonces
    - Existe un automorfismo θ que deja fijo a $M_1, ..., M_{t-1}$ y mueve a M ($\theta(M) \neq M$).
    - θ debe mover a M_t y $(\lambda_t,\mu_t) \leq (\lambda,\mu)$.

de donde se concluye que toda rama casi ordinaria es de una de las 2 formas:

1. $\zeta \in k[[X,Y]]$ o
2. $\zeta = H_0(X,Y) + X^\lambda Y^\mu H(X^{1/n}Y^{1/n})$, donde $H_0(X,Y) \in k[[X,Y]]$, $H(0,0) \neq 0$ y (λ,μ) es el menor par distinguido de ζ.

Lema 1.

1. *Si ζ es un representante del anillo casi ordinario A, entonces $\zeta - h$ con $h \in k[[X,Y]]$ y $h(0,0) = 0$ también es un representante de A.*
2. *ζ y $\zeta - h$ tienen los mismos pares distinguidos.*

Lema 2. *[Lema de inversión] Sea $\zeta = X^{u/n}H(X^{1/n}, Y^{1/n})$, con $0 < u < n$ y $H(0,0) \neq 0$ una rama que define al anillo casi ordinario A, entonces A tiene una rama que la define de la forma $\zeta' = X^{n/u}H'(X^{1/u}, Y^{1/n})$ con $H'(0,0) \neq 0$.*

Estos lemas cuyas demostraciones se encuentran en [[6]; Lema 2.2., p. 24] y [[6]; Lema 2.3., p. 25] respectivamente, muestran que el siguiente teorema es verdadera.

Teorema 1. *cualquier anillo casi ordinario puede ser representado por ramas casi ordinarias normalizadas, las cuales son de la forma*

1. $\zeta = 0$, *o*
2. $\zeta = X^{\lambda}Y^{\mu}H(X^{1/n}, Y^{1/n})$*;* $(n\lambda, n\mu \in \mathbb{Z}$*;* $H(0,0) \neq 0)$ *tal que* λ*,* μ *no pueden ser ambos enteros y si* $\lambda + \mu < 1$ *entonces* $\lambda > 0$ *y* $\mu > 0$*.*

Si además (λ_i, μ_i) $(i = 1, ..., s)$ son los pares distinguidos de ζ y se cumple que $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s) \geq (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_s)$ en el orden lexicográfico, entonces ζ es llamada *rama casi ordinaria fuertemente normalizada*.

Las ramas casi ordinarias normalizadas y fuertemente normalizadas facilitan ciertos cálculos a realizarse con ellas durante la resolución de singularidades de superficies casi ordinarias, siguiendo el enfoque de Lipman.

1.1.2. Cono Tangente y Lugar Singular.

El cono tangente y el lugar singular de un anillo casi ordinario A son invariantes asociados con los sucesivos anillos locales (transformadas especiales de A) que aparecen en la resolución parcial y estricta de A.

Definición 11. *Sea A un anillo local casi ordinario, el cono tangente de A es el esquema afín definido por el anillo graduado asociado* $gr_{\mathfrak{m}}A$ *de A con respecto a su ideal maximal* $\mathfrak{m}$*.*

Sea A un anillo local casi ordinario y f un polinomio que define a A. Entonces $gr_{\mathfrak{m}}A \simeq k[X,Y,Z]/\langle f_I \rangle$, donde f_I es la forma inicial de la serie de potencias f (visto como un elemento de $k[[X,Y,Z]]$).

Definición 12. *Sea A un anillo casi ordinario. El lugar singular de A, el cual será denotado por* $Sing(A)$*, viene dado por*

$$Sing(A) = \{p \in Spec(A) \mid A_p \quad \text{no es un anillo local regular}\}.$$

(A_p es regular si tiene multiplicidad 1).

El siguiente teorema cuya demostración puede encontrarla en [[6]; Lema 2.5, p. 29] dice que el cono tangente de un anillo casi ordinario A esta totalmente determinada por los pares distinguidos de cualquier representante normalizada de A.

Teorema 2. *Sean A un anillo local casi ordinario,* ζ *una rama normalizada representante de A,* f *el polinomio mínimo de* ζ *sobre L y* f_I *la forma inicial de* f *cuando* f *es visto como una serie de potencias en* X, Y, Z*. Entonces una de las afirmaciones siguientes se cumple:*

1. $\lambda + \mu > 1$*, y* $f_I = Z^m$*; donde* $m = [L(\zeta) : L]$*.*
2. $\lambda + \mu = 1$*, y* $f_I = (Z^t - X^{t\lambda}Y^{t\mu})^r$*; donde* $t = [L(X^{\lambda}Y^{\mu}) : L]$ *y* $r = [L(\zeta) : L(X^{\lambda}Y^{\mu})]$*.*
3. $\lambda + \mu < 1$*, y* $f_I = cX^{m\lambda}Y^{m\mu}$*; donde* $c \in k$*,* $m\lambda > 0$*,* $m\mu > 0$*,* $m = [L(\zeta) : L]$*.*

El siguiente teorema cuya demostración puede encontrarla en [[6]; Teorema 2.6, p. 31] describe la relación entre la naturaleza del lugar singular del anillo casi ordinario A y los pares distinguidos de cualquier representante normalizada $\zeta = X^{\lambda}Y^{\mu}H(X^{1/n}, Y^{1/n})$ de A.

Uno de los hechos importantes que afirma este teorema es que las únicas curvas o centros permitidos que pueden aparecer son las que están asociadas a los ideales $\langle X, \zeta \rangle A$, $\langle Y, \zeta \rangle A$. Más precisamente, si $\lambda \geq 1$ entonces $\langle X, \zeta \rangle A$ es un centro permitido de A y si $\mu \geq 1$, entonces $\langle Y, \zeta \rangle A$ es un centro permitido de A.

Teorema 3. *Sea A un anillo local, entonces una de las siguientes afirmaciones se cumple.*

1. $Sing(A)$ *es vacío, esto es, A es un anillo regular.*
2. *El único miembro de* $Sing(A)$ *es el ideal maximal* m *de A.*
3. $Sing(A)$ *tiene precisamente una componente* $p \neq m$ *y* p *es una curva plana no singular.*
4. $Sing(A)$ *tiene 2 componentes las cuales son curvas planas que se interceptan transversalmente. Si una de las curvas tiene multiplicidad* $\nu > 1$ *en su origen, entonces esta componente tiene multiplicidad* $< e = mult(A)$ *en A, mientras que la otra componente es no singular y tiene multiplicidad* e *en A.*
   Por otro lado, los pares distinguidos nos dicen además: cual de las 4 afirmaciones se cumple para A, cual es la multiplicidad de A, cuales son las multiplicidades en A de las curvas en el lugar singular de A, la multiplicidad del origen de cada curva.

Así, los pares distinguidos de cualquier rama casi ordinaria normalizada representando a un anillo casi ordinario A determinan el cono tangente y la naturaleza del lugar singular de este anillo.

2. Explosiones (Transformación cuadrática y Monoidal).

Definición 13. *El morfismo estructural de esquemas* $\pi : T = Proj(C) \longrightarrow S = Spec(R)$ *es llamada la aplicación explosión del esquema afín S con centro en P, y el S−esquema T es llamada la explosión de S con centro en P (R anillo noetheriano, local; M ideal maximal de R;* $P \in S$*;* $C = Bl_P R = \bigoplus_{n \geq 0} P^n$ *el álgebra explosión de P en R [[1]; Sección 5, p.148]).* Se tiene que $\pi^{-1}(M)$, la pre imagen del origen vía la explosión, como espacio topológico es un subespacio cerrado.

Cuando el centro de explosión es un ideal primo $P \neq M$, π es llamada la *transformación monoidal de S con centro en P*, y T es llamada la *transformada monoidal de S con centro en P*. Cuando el centro es $P = M$, π es llamada la *transformación cuadrática de S*, y T es llamada la *transformada cuadrática de S*.

Definición 14. *La explosión del anillo R es definida como el anillo R', la cual es el anillo local de algún punto cerrado de $\pi^{-1}(M)$.*

A continuación, estudiamos la explosión del esquema $S = Spec(R)$, para $R = k[[X,Y,Z]]$ que geométricamente se le puede pensar como una vecindad arbitrariamente pequeña del origen del espacio afín [[2]; Sección 2, p. 52].

2.1. Transformación Cuadrática.

Sea $\pi : T \longrightarrow S = Spec(k[[X,Y,Z]])$ la transformación cuadrática de S. En este caso, T es cubierta por 3 abiertos isomorfos a los 3 esquemas afines

$$T_X = Spec\left(R\left[\frac{Y}{X},\frac{Z}{X}\right]\right), T_Y = Spec\left(R\left[\frac{X}{Y},\frac{Z}{Y}\right]\right), T_Z = Spec\left(R\left[\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right]\right)$$

(abiertos isomorfos al espacio afín) y $\pi^{-1}(M)$ es isomorfo al plano proyectivo y por tanto sus puntos cerrados están en correspondencia uno a uno con las direcciones $(\alpha : \beta : \gamma)$ ($(0:0:0)$ siendo excluido de la consideración), además se tiene que cualquier punto de $\pi^{-1}(M)$ digamos η correspondiente a la dirección $(\alpha : \beta : \gamma)$, esta en T_X si y solo si $\alpha \neq 0$, esta en T_Y si y solo si $\beta \neq 0$, esta en T_Z si y solo si $\gamma \neq 0$.

Puesto que la transformación cuadrática es un fenómeno local, a continuación pasamos a estudiar su representación local en el abierto T_X; es decir, en un punto cerrado η de $\pi^{-1}(M)$ correspondiente a la dirección $(\alpha : \beta : \gamma)$, con $\alpha \neq 0$, en este caso se tiene que la transformada cuadrática de $R = k[[X,Y,Z]]$ es R', anillo regular de dimensión 3 con parámetros regulares $\left\{X, \frac{Y}{X} - \frac{\beta}{\alpha}, \frac{Z}{X} - \frac{\gamma}{\alpha}\right\}$. Si $f \in M$, la transformada estricta de f viene dada por

$$f' = \frac{f}{X^s} = f_s\left(1, Y' + \frac{\beta}{\alpha}, Z' + \frac{\gamma}{\alpha}\right) + X' f_{s+1}\left(1, Y' + \frac{\beta}{\alpha}, Z' + \frac{\gamma}{\alpha}\right) + \dots,$$

y si además f' no es unidad ($f(\alpha,\beta,\gamma) = 0$), $\frac{\hat{R}'}{\langle f' \rangle}$, donde $\hat{R}'$ es la completación de R', es llamada la *transformada cuadrática formal de* $\frac{R}{\langle f \rangle}$ en el punto $(\alpha : \beta : \gamma)$, $\alpha \neq 0$ [[6]; Proposición-Definición 3.1., p. 49].

Desde que $\frac{\hat{R}'}{\langle f' \rangle} \simeq \frac{R}{\langle f' \rangle}$, $\frac{R}{\langle f' \rangle}$ también es llamada la la *transformada cuadrática formal de* $\frac{R}{\langle f \rangle}$ en el punto $(\alpha : \beta : \gamma)$, $\alpha \neq 0$. Resultados análogos se tiene en los otros abiertos.

Definición 15. *Cuando $A \simeq \frac{R}{\langle f \rangle}$ usamos el término transformación cuadrática formal de A, para referirnos a la transformación cuadrática formal de $\frac{R}{\langle f \rangle}$.*

Observe que si f es el polinomio que define a una superficie casi ordinaria irreducible $V = Spec(A)$, respecto a algún sistema de parámetros, lo anterior nos da la transformada estricta de f y la transformada cuadrática formal del anillo casi ordinario A.

2.2. Transformación monoidal.

Sea $\pi : T \longrightarrow S = Spec(k[[X,Y,Z]])$ la transformación monoidal de S con centro en $P \neq M$ y supongamos que $P = \langle X, Y \rangle$, entonces en este caso T está cubierta por 2 esquemas afines:

$$T_X = Spec\left(R\left[\frac{Y}{X}\right]\right), T_Y = Spec\left(R\left[\frac{X}{Y}\right]\right)$$

(abiertos isomorfos al espacio afín) y $\pi^{-1}(M)$ es isomorfo a la línea proyectiva y por tanto cualquier punto cerrado de $\pi^{-1}(M)$ esta en correspondencia uno a uno con las direcciones $(\alpha : \beta)$ ($(0:0)$ siendo excluido de la consideración), además si η es un punto cerrado de $\pi^{-1}(M)$ correspondiente a la dirección $(\alpha : \beta)$, se tiene que $\eta \in T_X$ ($\eta \in T_Y$) si y solo si $\alpha \neq 0$ ($\beta \neq 0$) respectivamente.

Desde que la transformación monoidal es un fenómeno local, a continuación estudiamos su representación local en el abierto T_X, en este caso se tiene que: la transformada monoidal de $R = k[[X,Y,Z]]$ en este abierto es R'', anillo regular de dimensión 3 con parámetros regulares $\left\{X, \frac{Y}{X} - \frac{\beta}{\alpha}, Z\right\}$.

Si $f \in P \subset R$ y usando la suposición adicional de que existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que si $f \in M^t$, entonces $f \in P^t$. La transformada estricta de f es

$$f'' = \frac{f}{X^s} = f_s\left(1, Y'' + \frac{\beta}{\alpha}, Z''\right) + X'' f_{s+1}\left(1, Y'' + \frac{\beta}{\alpha}, Z''\right)\dots$$

y si además f'' no es unidad ($f(\alpha,\beta)=0$), $\dfrac{\hat{R}''}{\langle f''\rangle}$, donde $\hat{R}''$ es la completación de R'', es llamada la *transformada monoidal formal de* $\dfrac{R}{\langle f\rangle}$ *con centro en* $\dfrac{P}{\langle f\rangle}$.

Desde que $\dfrac{\hat{R}''}{\langle f''\rangle} \simeq \dfrac{R}{\langle f''\rangle}$, $\dfrac{R}{\langle f''\rangle}$ también es llamada la *transformada monoidal formal de* $\dfrac{R}{\langle f\rangle}$ *con centro en* $\dfrac{P}{\langle f\rangle}$ [[6]; Proposición-Definición 3.1., p. 49].

Definición 16. *Si* $A \simeq \dfrac{R}{\langle f\rangle}$ *y* $\overline{P} = \dfrac{P}{\langle f\rangle}$ *en* A *es la imagen de* $P \subset R$*, usamos el término transformación monoidal formal de A con centro* $\overline{\boldsymbol{P}}$ *para referirnos a cualquiera de las transformaciones monoidales formales de* $\dfrac{R}{\langle f\rangle}$ *con centro* $\dfrac{P}{\langle f\rangle}$.

Observe que si f es el polinomio de una superficie casi ordinaria irreducible $V = Spec(A)$, respecto de algún sistema de coordenadas locales de V en O adaptada a $W = Spec\left(\dfrac{A}{\overline{P}}\right)$, lo anterior nos da la transformada monoidal formal del anillo casi ordinario A con centro $\overline{P}$.

3. Resolución (parcial y estricta) de un anillo casi ordinario .

Definición 17. *Sea A un anillo local casi ordinario representada por una rama casi ordinaria normalizada. A' es una transformada especial de A si A' es un anillo local no regular y si una de las siguientes condiciones se cumple:*

1. *Si A tiene centro permitido $\mathfrak{p}$ el cual es una curva, entonces A' es la transformada monoidal formal de A con centro en $\mathfrak{p}$.*
2. *Si A no tiene centro permitido que es una curva, entonces A' es la transformada cuadrática formal de A en cualquiera de las direcciones* $(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1)$.

Definición 18. *La resolución parcial del anillo casi ordinario A, es una sucesión $A_0, A_1, \dots A_t$, donde $A = A_0$ y A_i es isomorfo a una transformada especial de A_{i-1}, para todo $i = 1, ..., t$.*

Con la finalidad de asegurar que esta resolución tiene un número finito de miembros, lo cual es una consecuencia del teorema de resolución de una superficie algebroide embebida dada por Zariski en [10], usando inducción sobre la multiplicidad del anillo A; se muestra que las transformadas especiales de A son otra vez casi ordinarias. A continuación, mostramos como se hace este análisis para un caso particular. El análisis de los demás casos lo puede encontrar en [[6], Sección 3].

Sea A un anillo casi ordinario representada por $\zeta = X^{u/n}Y^{v/n}H(X^{1/n}, Y^{1/n})$, $u, v \in \mathbb{Z}$, $H(0,0) \neq 0$ una rama casi ordinaria normalizada, y sean $\zeta = \zeta_1, ..., \zeta_m$ conjugadas de ζ_i, entonces

$$f = \prod_{i=1}^{m}(Z - \zeta_i) = \prod_{i=1}^{m}(Z - X^{u/n}Y^{v/n}H_i(X^{1/n}, Y^{1/n})),$$

es un polinomio casi ordinario que define a A. Supongamos que estamos en el siguiente caso particular: A tiene centro permitido $p = \langle X, \zeta\rangle A$, entonces por el Teorema 3 se tiene que $\dfrac{u}{n} + \dfrac{v}{n} > 1$ y además que $\dfrac{u}{n} \geq 1$, de donde tenemos que f'' el polinomio representante de A'', transformada monoidal formal de A con centro en p, viene dado por $f'' = \prod_{i=1}^{m}\left(Z - \dfrac{\zeta_i}{X}\right)$, cuyas raíces son de la forma $\zeta_i'' = \dfrac{\zeta_i}{X}$, los cuales no son unidades y son conjugados entre si, de donde f'' es un polinomio irreducible. Además, se tiene que los ζ_i'' son casi ordinarios de donde f'' es un polinomio casi ordinario y por lo tanto A'' es casi ordinario, pues esta representada por un polinomio casi ordinario e irreducible y además si (λ_i, μ_i) son los pares distinguidos de la rama original ζ, entonces $(\lambda_i - 1, \mu_i)$ son los pares distinguidos de ζ''.

En resumen, del análisis de todos los casos, se tiene que si A es un anillo casi ordinario, cualquier transformada especial A' de A es otra vez casi ordinaria y si ζ es una rama casi ordinaria representando a A, entonces ζ'

representante de A' no necesariamente es normalizado y sus pares distinguidos dependen de los pares distinguidos de ζ y del proceso (transformación cuadrática o monoidal) empleado.

La siguiente proposición nos da una descripción más exacta de la forma de los pares distinguidos de las transformadas especiales de un anillo casi ordinario A. Esta proposición también nos dice cual será la forma de los pares distinguidos de un anillo casi ordinario luego de aplicarle el Lema 2 también conocido como el Lema de Inversión.

Proposición 1. *Sea A un anillo casi ordinario y A' una transformada especial de A. Si (λ_i, μ_i) son los pares distinguidos de la rama casi ordinaria normalizada original ζ representante de A, entonces los pares distinguidos de la rama transformada ζ', representante de A', son dadas como se muestra a continuación, para $i = 1, ..., s$ (a menos que suceda que el primer par ordenado ($i = 1$) resulte ser un par de enteros, en dicho caso, este primer par es omitido).*

1. *Transformada Monoidal:*
   (a) *Con centro (X, ζ). En este caso, los pares distinguidos de ζ' son de la forma:*
   $$(\lambda_i - 1, \mu_i).$$
   (b) *Con centro (Y, ζ). En este caso, los pares distinguidos de ζ' son de la forma:*
   $$(\lambda_i, \mu_i - 1).$$
2. *Transformada Cuadrática:*
   - *Caso Transversal*
     (a) *En la dirección $(1 : 0 : 0)$. En este caso, los pares distinguidos de la rama resultante son de la forma:*
     $$(\lambda_i + \mu_i - 1, \mu_i).$$
     (b) *En la dirección $(0 : 1 : 0)$. En este caso, los pares distinguidos de la rama resultante son de la forma:*
     $$(\lambda_i, \lambda_i + \mu_i - 1).$$
   - *Caso no Transversal*
     (a) *En la dirección $(1 : 0 : 0)$. En este caso, los pares distinguidos de la rama resultante son de la forma:*
     $$\left(\lambda_i + \left(\frac{(1 + \mu_i)(1 - \lambda_1)}{\mu_1}\right) - 2; \left(\frac{1 + \mu_i}{\mu_1}\right) - 1\right).$$
     (b) *En la dirección $(0 : 1 : 0)$. En este caso, los pares distinguidos de la rama resultante son de la forma:*
     $$\left(\mu_i + \left(\frac{(1 + \lambda_i)(1 - \mu_1)}{\lambda_1}\right) - 2; \left(\frac{1 + \lambda_i}{\lambda_1}\right) - 1\right).$$
     (c) *En la dirección $(0 : 0 : 1)$. En este caso, los pares distinguidos de la rama resultante son de la forma:*
     $$\left(\frac{\lambda_i(1 - \mu_1) + \mu_i\lambda_1}{1 - \lambda_1 - \mu_1}; \frac{\lambda_i\mu_1 + \mu_i(1 - \lambda_1)}{1 - \lambda_1 - \mu_1}\right).$$
3. *Lema 2*
   En este caso, los pares distinguidos de la rama resultante ζ'; es decir, luego de aplicar el Lema 2 a ζ, son de la forma:
   $$\left(\frac{\lambda_i + 1 - \lambda_1}{\lambda_1}, \mu_i\right).$$

La siguiente proposición cuya demostración fue adaptada de la dada en [[6]; Proposición 3.6, p.65] garantiza que toda resolución parcial de un anillo casi ordinario tiene un número finito de miembros.

Proposición 2. *Para cualquier anillo local casi ordinario A, existe un entero n tal que cualquier resolución parcial de A tiene menos de n miembros.*

Demostración: La demostración esta basada en la inducción sobre la multiplicidad de A.

Si la multiplicidad del anillo casi ordinario A es 1, entonces A no tiene transformaciones especiales y el números de miembros de su resolución parcial sería igual a cero.

Supongamos que la multiplicidad del anillo casi ordinario A es j, entonces por inducción asumimos como verdadera la proposición para todo $1 \leq j \leq k$, $k \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$; es decir, existe un entero N_j tal que cualquier resolución parcial de A tiene menos de N_j elementos. Supongamos que la multiplicidad del anillo casi ordinario A es $k+1$, entonces debemos probar que existe un entero N tal que la resolución parcial de A tiene menos de N elementos. En efecto: sea A un anillo casi ordinario de multiplicidad $k+1$.

- Si A tiene centros permitidos los cuales son curvas, entonces luego de un número finito de transformaciones monoidales obtenemos un anillo local casi ordinario que ya no tiene centros permitidos o bien cuya multiplicidad es menor que la de A, en el segundo caso aplicando la hipótesis inductiva y la proposición queda demostrada.
- Supongamos que A no tiene centros permitidos que son curvas.
  - $*$ Si el cono tangente de A es irreducible estamos en el caso transversal, entonces luego de un número finito de transformaciones cuadráticas en cualquiera de las direcciones $(1:0:0)$ y $(0:1:0)$ hay una disminución en la multiplicidad y mientras no haya dicha disminución estaremos en el caso transversal y no se crean centros permitidos que sean curvas.
  - $*$ Si el cono tangente de A es reducible estamos en el caso no transversal, entonces una transformación en cualquiera de las direcciones $(1:0:0)$ o $(0:1:0)$ produce una disminución en la multiplicidad de A, y que luego de un número finito de transformaciones en la dirección $(0:0:1)$ (bajo el cual el cono tangente permanece reducible) produce una disminución de la multiplicidad de A o en caso contrario llegamos al caso transversal. En cualquier caso por inducción se completa la demostración.

□

Así, en el caso de superficies casi ordinarias, según el enfoque de Lipman, en cada etapa de la resolución se explota una curva permitida, siempre que sea posible y un punto en otro caso.

Definición 19. *Sea un anillo local casi ordinario. Una resolución estricta de A es una sucesión $A = A_0, A_1, \ldots, A_r$ tal que:*

1. *A_r es normal o no tiene transformaciones especiales.*
2. *A_{i+1} $(0 \leq i < r)$ es una transformación especial de A_i sujeto a las siguientes condiciones de exactitud:*
   - *A_{i+1} contiene exactamente una curva excepcional.*
   - *Si A_i $(0 < i < r)$ tiene dos curvas en su lugar singular, ninguna de las cuales es un centro permitido, entonces A_{i+1} es una transformación cuadrática formal de A_i a través de la cual pasa la transformada estricta o propia de la curva excepcional para la transformación de A_{i-1} a A_i.*
   - *Si A_i $(0 < i < r)$ tiene dos centros permitidos los cuales son curvas, entonces A_{i+1} es una transformada monoidal formal de A_i y el centro de la transformación de A_i a A_{i+1} es la curva excepcional de la transformación de A_{i-1} a A_i.*

4. Ejemplo Aplicativo.

Como resultado de todo lo estudiado obtenemos el proceso de resolución estricta para la siguiente superficie: Considere la superficie casi ordinaria $V : f(X,Y,Z) = 0$, donde

$$\begin{aligned} f(X,Y,Z) = Z^4 &+ (-2XY^3 - 4XY^4 - 2XY^5)Z^2 + (-4X^2Y^6 - 4X^2Y^7)Z \\ &+ (X^2Y^6 + 4X^2Y^7 + 6X^2Y^8 + 4X^2Y^9 + X^2Y^{10} - X^3Y^9). \end{aligned}$$

cuyas raíces de f, visto como un polinomio en Z, son:

$$\begin{aligned} &\zeta_1 = X^{2/4}Y^{6/4} + X^{2/4}Y^{10/4} + X^{3/4}Y^{9/4} \\ &\zeta_2 = X^{2/4}Y^{6/4} + X^{2/4}Y^{10/4} - (X^{3/4}Y^{9/4}) \\ &\zeta_3 - (X^{2/4}Y^{6/4}) - (X^{2/4}Y^{10/4}) + i(X^{3/4}Y^{9/4}) \\ &\zeta_4 = -(X^{2/4}Y^{6/4}) - (X^{2/4}Y^{10/4}) - i(X^{3/4}Y^{9/4}). \end{aligned}$$

Sea $A = \dfrac{k[[X,Y,Z]]}{\langle f \rangle}$ el anillo local de superficie casi ordinario irreducible $V = Spec(A)$ y denotemos por $\zeta = \zeta_1 = X^{2/4}Y^{6/4} + X^{2/4}Y^{10/4} + X^{3/4}Y^{9/4}$ a una raíz de f y por tanto rama representante del anillo casi ordinario A, tenemos que:

$$\begin{aligned} M_{12} &= \zeta_1 - \zeta_2 = X^{3/4}Y^{9/4}(2) \\ M_{13} &= \zeta_1 - \zeta_3 = X^{2/4}Y^{6/4}(2 + 2Y + (1-i)X^{1/4}Y^{3/4}) \\ M_{14} &= \zeta_1 - \zeta_4 = X^{2/4}Y^{6/4}(2 + 2Y + (1+i)X^{1/4}Y^{3/4}) \end{aligned}$$

Así, los monomios distinguidos de ζ son: $M_1 = X^{2/4}Y^{6/4}$, $M_2 = X^{3/4}Y^{9/4}$, y los pares distinguidos son: $(2/4, 6/4)$, $(3/4, 9/4)$. De aquí, vemos que ζ es una rama casi ordinaria normalizada pero no es fuertemente normalizada y para realizar la resolución estricta de A, procedemos a hacerla fuertemente normalizada.

Denotemos por ζ' a la rama fuertemente normalizada asociada a ζ (la cuál aún representa a A), sus pares distinguidos serán: $(\lambda_1', \mu_1') = (6/4, 2/4)$ y $(\lambda_2', \mu_2') = (9/4, 3/4)$.

Así, el menor par distinguido de ζ' es: $(\lambda', \mu') = (6/4, 2/4)$, y este par nos da toda la información de A, que mostramos a continuación, necesarias para realizar la primera explosión.

- Desde que $\lambda' + \mu' = 6/4 + 2/4 = 2 > 1$, se tiene que: $f_I = Z^m = Z^4$, pues $m = [L(\zeta') : L] = 4$, ver Teorema 2. De aquí,
  - $mult(A) = 4$.
- $Sing(A) = \{(X, \zeta'), (Y, \zeta'), (X, Y, \zeta')\}$. Esto es debido a lo siguiente:
  - El origen $((X, Y, \zeta))$ es un punto de multiplicidad 4, pues $mult(A) = 4$.
  - $mult(X, \zeta') = min\{m, m\lambda'\} = 4$ (Teorema 3).
  - $mult(Y, \zeta') = min\{m, m\mu'\} = 2$ (Teorema 3).
- Desde que $\lambda' = 6/4 = 2 > 1$, centro permitido de A es la curva (X, ζ').

Como A tiene un centro permitido a la curva (X, ζ'), por la Proposición 2 la primera explosión será la transformación monoidal con centro en la curva (X, Z).

1. **Primera Explosión: Transformación Monoidal con centro en (X, Z).**
   Por la Proposición 1, tenemos que los pares distinguidos de $\zeta^{(1)}$, rama representante de $A^{(1)}$, son:
   $$(\lambda_1^{(1)}, \mu_1^{(1)}) = (\lambda_1' - 1, \mu_1') = (2/4, 2/4) \quad \text{y}$$
   $$(\lambda_2^{(1)}, \mu_2^{(1)}) = (\lambda_2' - 1, \mu_2') = (5/4, 3/4).$$
   Luego, el menor par distinguido de $\zeta^{(1)}$ es: $(\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}) = (2/4, 2/4)$. El cual nos da toda la información, que mostramos a continuación, sobre el anillo casi ordinario $A^{(1)}$ necesarias para realizar la segunda explosión.
   - Como $\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} = 2/4 + 2/4 = 1$, se tiene que: $f_I^{(1)} = (Z^t - X^{\lambda t} Y^{\mu t})^r = (Z^2 - cXY)^2$ (pues $t = [L(X^{2/4} Y^{2/4}) : L] = 2$ y $r = [L(\zeta^{(1)}) : L(X^{2/4} Y^{2/4})] = 2$, ver Teorema 2). De aquí, se tiene que: $mult(A^{(1)}) = 4$.
   - $Sing(A^{(1)}) = \{(X, \zeta^{(1)}), (Y, \zeta^{(1)}), (X, Y, \zeta^{(1)})\}$, pues el origen $((X, Y, \zeta^{(1)}))$ es un punto de multiplicidad 4, $mult((X, \zeta^{(1)})) = 2$ y $mult((Y, \zeta^{(1)})) = 2$.
   - Desde que $\lambda^{(1)} = 2/4 < 1$ y $\mu^{(1)} = 2/4 < 1$, $A^{(1)}$ no tiene centros permitidos que sean curvas.

   Como $A^{(1)}$ no tiene centros permitidos que sean curvas y además el cono tangente de $A^{(1)}$ es irreducible, estamos en el caso transversal ($\lambda^{(1)} + \mu^{(1)} = 2/4 + 2/4 = 1$), luego por la demostración de la Proposición 2 debemos realizar transformaciones cuadráticas en cualquiera de las direcciones $(1 : 0 : 0)$ o $(0 : 1 : 0)$, pero de acuerdo a la definición de resolución estricta, $A^{(2)}$ debe ser la transformada cuadrática de $A^{(1)}$ a través de la cual pase la transformada propia de la curva excepcional de la transformación de A a $A^{(1)}$; es decir, debemos realizar la transformación cuadrática en la dirección $(0 : 1 : 0)$ el cual es un punto en el abierto T_Y.
2. **Segunda Explosión: Transformación Cuadrática en la dirección $(0 : 1 : 0)$.**
   Por la Proposición 1, tenemos que los pares distinguidos de $\zeta^{(2)}$, rama representante de $A^{(2)}$, son:
   $$(\lambda_1^{(2)}, \mu_1^{(2)}) = (2/4, 0) \quad \text{y} \quad (\lambda_2^{(2)}, \mu_2^{(2)}) = (5/4, 1).$$
   Luego, el menor par distinguido de $\zeta^{(2)}$ es: $(\lambda^{(2)}, \mu^{(2)}) = (2/4, 0)$.
   En este caso, como $\lambda^{(2)} = 2/4 < 1$ y $\mu^{(2)} = 0$, $\zeta^{(2)}$ es una rama casi ordinaria no normalizada y para continuar con el proceso de resolución estricta debemos normalizar fuertemente a esta rama.
   Denotemos por $\overline{\zeta}^{(2)}$ a la normalización de $\zeta^{(2)}$. Por la Proposición 1 o más exactamente por el Lema 2, tenemos que los pares distinguidos de $\overline{\zeta}^{(2)}$ son:
   $$(\overline{\lambda}_1^{(2)}, \overline{\mu}_1^{(2)}) = (2, 0) \quad \text{y} \quad (\overline{\lambda}_2^{(2)}, \overline{\mu}_2^{(2)}) = (7/2, 1).$$
   Como $(\overline{\lambda}_1^{(2)}, \overline{\mu}_1^{(2)}) = (2, 0)$ tiene ambas coordenadas enteros este par distinguido debe ser eliminado, vea Proposición 1. Así, el menor y único par distinguido de $\overline{\zeta}^{(2)}$ es: $(\overline{\lambda}^{(2)}, \overline{\mu}^{(2)}) = (7/2, 1)$, y $\overline{\zeta}^{(2)}$ es una rama fuertemente normalizado que aún representa a $A^{(2)}$.
   Este menor par distinguido de $\overline{\zeta}^{(2)}$ nos da toda la información, que mostramos a continuación, sobre el anillo casi ordinario $A^{(2)} = \dfrac{k[[X, Y, Z]]}{\langle \overline{f^{(2)}} \rangle}$ necesarias para realizar la tercera explosión.
   - Desde que $\overline{\lambda}^{(2)} + \overline{\mu}^{(2)} = 7/2 + 1 > 1$, se tiene que: $\overline{f}_I^{(2)} = Z^m = Z^2$, pues $m = [L(\overline{\zeta}^{(2)}) : L] = 2$. Luego, $mult(A^{(2)}) = 2$.
   - $Sing(A^{(2)}) = \{(X, \overline{\zeta}^{(2)}), (Y, \overline{\zeta}^{(2)}), (X, Y, \overline{\zeta}^{(2)})\}$, pues el origen $((X, Y, \overline{\zeta}^{(2)}))$ es un punto de multiplicidad 2, $mult((X, \overline{\zeta}^{(2)})) = 2$ y $mult((Y, \overline{\zeta}^{(2)})) = 2$.

- Desde que $\overline{\lambda}^{(2)} = 7/2 > 1$ y $\overline{\mu}^{(2)} = 1 \geq 1$ las curvas $(X, \overline{\zeta}^{(2)})$, $(Y, \overline{\zeta}^{(2)})$ son centros permitidos de $A^{(2)}$.

Como $A^{(2)}$ tiene 2 centros permitidos, por definición de resolución estricta debemos elegir como centro de transformación monoidal a la curva que fue excepcional de la transformación de $A^{(1)}$ a $A^{(2)}$; que en este caso, es la línea proyectiva definida en el plano proyectivo por $Y = 0$.

3. **Tercera Explosión: Transformación Monoidal con centro en (X, Z).**
Por la Proposición 1, tenemos que el único par distinguido y por lo tanto el menor de $\zeta^{(3)}$ rama representante de $A^{(3)}$ es: $(\lambda^{(3)}, \mu^{(3)}) = (\overline{\lambda^{(2)}}_1 - 1, \overline{\mu^{(2)}}_1) = (5/2, 1)$.
Observe que este par distinguido corresponde a una rama fuertemente normalizada. Este par distinguido nos da toda la información, que mostramos a continuación, sobre el anillo casi ordinario $A^{(3)}$ necesarias para realizar la cuarta explosión.
   - Desde que $\lambda^{(3)} + \mu^{(3)} = 5/2 + 1 > 1$, se tiene que: $f_I^{(3)} = Z^m = Z^2$, pues $m = [L(\zeta^{(3)}) : L] = 2$. Luego, $mult(A^{(3)}) = 2$.
   - $Sing(A^{(3)}) = \{(X, \zeta^{(3)}), (Y, \zeta^{(3)}), (X, Y, \zeta^{(3)})\}$, pues el origen $((X, Y, \zeta^{(3)}))$ es un punto de multiplicidad 2, $mult((X, \zeta^{(3)})) = 2$ y $mult((Y, \zeta^{(3)})) = 2$.
   - $A^{(3)}$ tiene centros permitidos que son las curvas $(X, \zeta^{(3)})$, $(Y, \zeta^{(3)})$.

Como $A^{(3)}$ tiene 2 centros permitidos, por definición de resolución estricta, debemos elegir como centro de la transformación monoidal a la curva que fue excepcional de la transformación de $A^{(2)}$ a $A^{(3)}$, es decir, a la línea proyectiva definida en el plano proyectivo por $X = 0$.
4. **Cuarta Explosión: Transformación Monoidal con centro en (Y, Z).** Por la Proposición 1, tenemos que el único par distinguido y por tanto el menor de $\zeta^{(4)}$ la rama representante de $A^{(4)}$ es:

$$(\lambda^{(4)}, \mu^{(4)}) = (\lambda^{(3)}, \mu^{(3)} - 1) = (3/2, 1 - 1) = (5/2, 0),$$

Observe que este par distinguido corresponde a una rama fuertemente normalizada. Este par distinguido nos da toda la información sobre el anillo casi ordinario $A^{(4)}$, necesarias para realizar la quinta explosión.
   - Desde que $\lambda^{(4)} + \mu^{(4)} = 3/2 + 0 > 1$, se tiene que: $f_I^{(4)} = Z^m = Z^2$, pues $m = [L(\zeta^{(4)}) : L] = 2$. De aquí, $mult(A^{(4)}) = 2$.
   - $Sing(A^{(4)}) = \{(X, \zeta^{(4)}), (X, Y, \zeta^{(4)})\}$, pues el origen $((X, Y, \zeta^{(4)}))$ es un punto de multiplicidad 2 y $mult((X, \zeta^{(4)})) = 2$.
   - $A^{(4)}$ tiene como centro permitido a la curva $(X, \zeta^{(4)})$.

Como $A^{(4)}$ tiene como centro permitido a la curva $(X, \zeta^{(4)})$ la Proposición 2 nos indica que la quinta explosión debe ser una transformación monoidal con centro en (X, Z).
5. **Quinta Explosión: Transformación Monoidal con centro en (X, Z).**
Por la Proposición 1, tenemos que el único par distinguido y por lo tanto el menor de $\zeta^{(5)}$ la rama representante de $A^{(5)}$ es:

$$(\lambda_1^{(5)}, \mu_1^{(5)}) = (\lambda^{(4)} - 1, \mu^{(4)}) = (5/2 - 1, 0) = (3/2, 0).$$

Observe que este par distinguido corresponde a una rama fuertemente normalizada. Este par distinguido nos da toda la información sobre el anillo casi ordinario $A^{(5)}$, necesarias para realizar la sexta explosión.
   - Desde que $\lambda^{(5)} + \mu^{(5)} = 3/2 + 0 > 1$, se tiene que: $f_I^{(5)} = Z^m = Z^2$, pues $m = [L(\zeta^{(5)}) : L] = 2$. De aquí, $mult(A^{(5)}) = 2$.
   - $Sing(A^{(5)}) = \{(X, \zeta^{(5)}), (X, Y, \zeta^{(5)})\}$, pues el origen $((X, Y, \zeta^{(5)}))$ es un punto de multiplicidad 2 y $mult((X, \zeta^{(5)})) = 2$.
   - $A^{(5)}$ tiene como centro permitido a la curva $(X, \zeta^{(5)})$.

Como $A^{(5)}$ tiene como centro permitido a la curva $(X, \zeta^{(5)})$, la sexta explosión debe ser una transformación monoidal con centro en la curva (X, Z).
6. **Sexta Explosión: Transformación Monoidal con centro en (X, Z).**
Por la Proposición 1, tenemos que el único par distinguido y por lo tanto el menor de $\zeta^{(6)}$ la rama representante de $A^{(6)}$ es:

$$(\lambda_1^{(6)}, \mu_1^{(6)}) = (\lambda^{(5)} - 1, \mu^{(5)}) = (3/2 - 1, 0) = (1/2, 0).$$

y él nos da toda la información sobre el anillo casi ordinario $A^{(6)}$.
   - Como $\lambda^{(6)} + \mu^{(6)} = 1/2 + 0 < 1$, se tiene que: $f_I^{(6)} = X^{2(1/2)}Y^{2(0)} = X$, pues $m = [L(\zeta^{(6)}) : L] = 2$, vea Teorema 2. De aquí, $mult(A^{(6)}) = 1$

Luego, A^6 es regular.

Así, la resolución estricta del anillo A es: $A, A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)}, A^{(5)}$. Note que $A^{(5)}$ es el último miembro de la resolución estricta de A, pues es un anillo casi ordinario que tiene un centro permitido que es una curva y que A^6, su correspondiente transformada monoidal formal, es regular.

5. Conclusiones.

Del estudio realizado y ejemplo aplicativo se tiene que es posible adjuntar información a cada anillo A_i apareciendo en la resolución estricta del anillo casi ordinario A de a una superficie casi ordinaria e irreducible $V = Spec(A)$, información que solamente dependen de los pares distinguidos de cualquier rama casi ordinaria fuertemente normalizada que representa a A. Así, la resolución estricta de un anillo casi ordinario A o equivalentemente de la superficie casi ordinaria e irreducible V, esta totalmente determinada por los pares distinguidos de una rama casi ordinaria fuertemente normalizada que representa A.

Agradecimientos. El autor agradece de forma especial al Dr. Hernán Neciosup, Dr. Percy Fernández, Dra. Evelia García Barroso y al Dr. Andrés Beltran quienes durante la realización de este trabajo me han enseñado, inspirado y ayudado de diferentes maneras.

Referencias

[1] Eisenbud, D., *Commutative Algebra: with a view toward algebraic geometry* (Vol. 150). Springer Science-Business Media, (2013).
[2] Eisenbud D., Harris J., *The geometry of schemes*. Springer-Verlag, New York, (2000).
[3] Hauser, H., *The Hironaka theorem on resolution of singularities (or: A proof we always wanted to understand)*. Bulletin of the American Mathematical Society, 40(3), (2003), 323-403.
[4] Hironaka, H., *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I-II. Annals of Mathematics*, (1964), 109-326.
[5] Kiyek, K., Vicente, J. L., *Resolution of curve and surface singularities in characteristic zero. Algebras and Applications*. Springer Science-Business Media. (2004).
[6] Lipman, J., *Quasi-ordinary singularities of embedded surfaces*, Thesis, Harvard University, (1965).
[7] Lipman, J., *Quasi-ordinary singularities of surfaces in C3*. In Proceedings of Symposia in Pure Mathematics (Vol. 40, No. Part 2, (1983), pp. 161-172).
[8] Luengo, I., *On the structure of embedded algebroid surfaces. In Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* (Vol. 40, pp. 185-192). 201 Charles ST, Providence, RI 02940-2213: Amer Mathematical Soc. (1983).
[9] Nagata, M. *Local rings*, Interscience, New York, 1962. MR, 27, 5790.
[10] Zariski, O. *La resoluzione delle singolarità delle superficie algebriche immerse*. Accademia Nazionale dei Lincei, Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Serie, 8, (1962), 97-102.
[11] Zariski, O. *Studies in equisingularity II. Equisingularity in codimension 1 (and characteristic zero)*. American Journal of Mathematics, 87(4), (1965). 972-1006.