



## Congruências de esferas geodésicas em $\mathbb{H}^3$ e $\mathbb{S}^3$

### Congruence of geodesic spheres in $\mathbb{H}^3$ and $\mathbb{S}^3$

Edwin O. S. Reyes\* and Carlos M. C. Riveros†

Received, Nov. 30, 2018

Accepted, Dec. 21, 2018

#### Resumo

Em [2], foi obtida uma caracterização das superfícies em  $\mathbb{R}^3$  que são envelopes de uma congruência de esferas em  $\mathbb{R}^3$ , na qual o outro envelope está em  $\mathbb{R}^2$ . Neste artigo, caracterizamos as superfícies de  $\mathbb{H}^3$  e  $\mathbb{S}^3$  que são envelopes de uma congruência de esferas geodésicas em  $\mathbb{H}^3$  e  $\mathbb{S}^3$ , respectivamente, na qual o outro envelope está contido em  $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$  e  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ . Mostramos que esta caracterização permite obter localmente uma parametrização das superfícies contidas em  $\mathbb{H}^3$  e  $\mathbb{S}^3$ , esta caracterização estende o resultado obtido em [2]. Além disso, damos condições suficientes para que estas superfícies estejam associadas localmente por uma transformação de Ribaucour. Também, apresentamos famílias de superfícies parametrizadas por linhas de curvatura em  $\mathbb{H}^3$  e  $\mathbb{S}^3$ , que dependem unicamente de uma função de duas variáveis, a qual é solução de uma equação diferencial. Finalmente, caracterizamos as superfícies  $\Sigma$  de tipo esférico em  $\mathbb{H}^3$  e  $\mathbb{S}^3$ , como as superfícies onde sua função raio é solução da equação de Helmholtz.

**Palavras chave.** Superfícies de tipo esférico, linhas de curvatura, espaço Hiperbólico, congruência de esferas geodésicas.

#### Abstract

In [2], was obtained a characterization of the surfaces in  $\mathbb{R}^3$  which are envelopes of a sphere congruence in  $\mathbb{R}^3$ , in which the other envelope is in  $\mathbb{R}^2$ . In this paper, we characterize the surfaces of  $\mathbb{H}^3$  and  $\mathbb{S}^3$  which are envelopes of a congruence of geodesic spheres in  $\mathbb{H}^3$  and  $\mathbb{S}^3$ , respectively, in which the other envelope is contained in  $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$  and  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ . We show that this characterization allows locally to obtain a parameterization of the surfaces contained in  $\mathbb{H}^3$  and  $\mathbb{S}^3$ , this characterization extends the result obtained in [2]. Moreover, we provide sufficient conditions for these surfaces to be locally associated by a transformation of Ribaucour. Also, we present families of surfaces parameterized by lines of curvature in  $\mathbb{H}^3$  and  $\mathbb{S}^3$ , which depend on a function of two variables which is solution of a differential equation. Finally, we characterize the surfaces of the spherical type  $\Sigma$  in  $\mathbb{H}^3$  and  $\mathbb{S}^3$ , as the surfaces where its radius function is the solution of the Helmholtz equation.

**Keywords** Surfaces of the spherical type, lines of curvature, Hyperbolic space, congruence of geodesic spheres.

**1. Introdução.** Em [2], Corro apresentou uma maneira de parametrizar superfícies de  $\mathbb{R}^3$  como envelopes de uma congruência de esferas na qual um envelope está contido em um plano e com função raio  $h$  associada a um sistema de tipo hidrodinâmico. Como aplicação, ele estuda as superfícies no espaço hiperbólico que satisfazem a igualdade

$$2ach^{\frac{2(c-1)}{c}}(H-1) + (a+b-ach^{\frac{2(c-1)}{c}})K_I = 0,$$

onde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a+b \neq 0$ ,  $c \neq 0$ ,  $H$  é a curvatura média e  $K_I$  é a curvatura Gaussiana. Esta classe de superfícies incluem as superfícies de Bryant e as superfícies flat do espaço hiperbólico, e são chamadas de superfície Weingarten generalizada do tipo Bryant.

\*Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias, Universidade Federal do Oeste da Bahia, 47808-021 Barreiras-BA, Brazil (edwin.reyes@ufob.edu.br).

†Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, 70910-900, Brasília-DF, Brazil (carlos@mat.unb.br).

Uma superfície orientada  $\Psi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  com curvatura Gaussiana não nula  $K$  e curvatura média  $H$  é chamada uma *superfície mínima de Laguerre* se

$$\Delta_{III} \left( \frac{H}{K} \right) = 0,$$

onde  $\Delta_{III}$  é o laplaciano com respeito a terceira forma fundamental  $III$  de  $\Psi$ . O estudo dessas superfícies foi feita por vários autores, entre eles W. Blaschke [1], [3], onde tais superfícies aparecem como pontos críticos do funcional

$$L(\Psi) = \int \frac{H^2 - K}{K} dM,$$

onde  $dM$  é o elemento de área da superfície.

Em [5], os autores estudam superfícies mínimas de Laguerre como gráficos de funções biarmônicas no modelo isotrópico da geometria de Laguerre. Em particular estudam as superfícies mínimas de Laguerre de tipo esférico, a saber as superfícies  $M$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que o conjunto de esferas de centro  $p + \frac{H(p)}{K(p)}N(p)$ ,  $p \in M$ , tangenciam a um plano fixo orientado.

Em [4], as superfícies de tipo esférico em  $\mathbb{R}^3$  são caracterizadas como as superfícies cuja função raio das esferas médias é harmônica, isto é, a função raio  $h$  satisfaz  $\Delta h = 0$ .

Neste artigo, motivados pelos resultados de [2] e [4], caracterizamos as superfícies de  $\mathbb{H}^3$  e  $\mathbb{S}^3$  que são envelopes de uma congruência de esferas geodésicas em  $\mathbb{H}^3$  e  $\mathbb{S}^3$ , respectivamente, na qual o outro envelope está contido em  $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$  e  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ . Mostramos ainda que esta caracterização permite obter localmente uma parametrização das superfícies contidas em  $\mathbb{H}^3$  e  $\mathbb{S}^3$ , esta caracterização estende o resultado obtido em [2]. Além disso, daremos condições suficientes para que estas superfícies estejam associadas por uma transformação de Ribaucour. Também, fornecemos famílias de superfícies parametrizadas por linhas de curvatura em  $\mathbb{H}^3$  e  $\mathbb{S}^3$  que dependem de uma função de duas variáveis, a qual é solução de uma equação diferencial. Finalmente, caracterizamos as superfícies  $\Sigma$  de tipo esférico em  $\mathbb{H}^3$  e  $\mathbb{S}^3$ , como as superfícies onde sua função raio é solução da equação de Helmholtz (ver [6]).

**2. Preliminares.** Denotaremos por  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$ , tal que  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ . Além disso, dada uma função diferenciável  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , a derivada parcial de  $f$  relativa a  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , será denotada por  $f_{,i}$ , isto é,  $f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial u_i}$ .

Denotaremos por  $\overline{M}^3(c)$  a uma variedade Riemanniana simplesmente conexa de dimensão 3 com curvatura seccional constante  $c = -1, 0, 1$ , isto é,  $\overline{M}^3(c)$  denota ao *espaço Hiperbólico*  $\mathbb{H}^3$  se  $c = -1$ , ao *espaço Euclidiano*  $\mathbb{R}^3$  quando  $c = 0$  ou a *esfera*  $\mathbb{S}^3$  se  $c = 1$ .

Seja  $\mathbb{L}^{n+2}$  o conjunto  $u = (u_1, u_2, \dots, u_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}$  munido com a pseudo-métrica

$$(2.1) \quad \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} u_i v_i - u_{n+2} v_{n+2}.$$

Um modelo para o espaço hiperbólico  $(n + 1)$ -dimensional é a subvariedade

$$(2.2) \quad \mathbb{H}^{n+1} = \{u \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle u, u \rangle = -1, u_{n+2} > 0\}.$$

Um modelo para a esfera  $(n + 1)$ -dimensional é o conjunto

$$(2.3) \quad \mathbb{S}^{n+1} = \{u \in \mathbb{R}^{n+2}; \|u\| = 1\}$$

munido com a métrica Euclidiana.

**Observação 1.** De agora em diante, consideraremos  $\overline{M}^3(c) = \mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$  quando  $c = -1$ ,  $\overline{M}^3(c) = \mathbb{R}^3$  se  $c = 0$  e  $\overline{M}^3(c) = \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$  quando  $c = 1$ .

**Definição 1.** Dizemos que  $M$  é *orientável* se for possível determinar um campo vetorial diferenciável unitário  $N$  normal a  $T_p M$ , para cada  $p \in M$ . Neste caso, dizemos que  $N$  é a *aplicação normal de Gauss* de  $M$  e que tal campo determina uma orientação em  $M$ . Em coordenadas locais,

$$N_{,i} = \sum_{j=1}^2 W_{ij} X_{,j}, \quad 1 \leq i \leq 2,$$

onde  $X$  é uma parametrização de  $M$ . A matriz  $W = (W_{ij})$  é chamada de *matriz de Weingarten* de  $M$ .

**Definição 2.** A *Primeira Forma Fundamental I* de  $M$  é a restrição da métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\overline{M}^3(c)$  aos planos tangentes  $T_p M$ . Logo, para cada  $p \in M$

$$I_p(w_1, w_2) = \langle w_1, w_2 \rangle, \quad w_1, w_2 \in T_p M.$$

A *Segunda Forma Fundamental II* e a *Terceira Forma Fundamental III* de  $M$  são dadas por

$$II_p(w_1, w_2) = -\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle, \quad w_1, w_2 \in T_p M,$$

$$III_p(w_1, w_2) = \langle dN_p(w_1), dN_p(w_2) \rangle, \quad w_1, w_2 \in T_p M,$$

onde  $p \in M$  e  $dN_p$  é a diferencial da normal de Gauss em  $p$ .

As seguintes definições são baseadas no artigo [7].

**Definição 3.** Uma *Congruência de esferas geodésicas* em  $\overline{M}^3(c)$  é uma família a 2-parâmetros de esferas geodésicas em  $\overline{M}^3(c)$  tal que o conjunto dos centros das esferas geodésicas é uma superfície  $M$  de  $\overline{M}^3(c)$  e o raio das esferas geodésicas é dado por uma função diferenciável sobre  $M$ .

Um *envelope* de uma congruência de esferas geodésicas em  $\overline{M}^3(c)$  é uma superfície  $M_1$  de  $\overline{M}^3(c)$  tal que cada ponto de  $M_1$  é tangente a uma esfera geodésica da congruência de esferas geodésicas.

**Definição 4.** Sejam  $M_1$  e  $M_2$  superfícies de  $\overline{M}^3(c)$ . Dizemos que  $M_1$  e  $M_2$  estão *Associadas por uma congruência de esferas geodésicas em  $\overline{M}^3(c)$* , se existe um difeomorfismo  $\Psi : M_1 \rightarrow M_2$  tal que os pontos correspondentes  $p$  e  $\Psi(p)$  de  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente, são tangentes à mesma esfera geodésica de uma congruência de esferas geodésicas.

Um caso especial da definição anterior acontece quando  $\Psi$  leva linhas de curvatura de  $M_1$  em linhas de curvatura em  $M_2$ .

**Definição 5.** Seja  $M_1$  uma superfície orientável de  $\overline{M}^3(c)$ . Uma superfície  $M_2$  de  $\overline{M}^3(c)$  é associada a  $M_1$  por uma *Transformação de Ribaucour* se existem uma função diferenciável  $h : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$  e um difeomorfismo  $\Psi : M_1 \rightarrow M_2$ , tais que

1.  $\exp_p(h(p)N_1(p)) = \exp_{\Psi(p)}(h(p)N_2(\Psi(p)))$ , para todo  $p \in M_1$ , onde  $\exp$  é a aplicação exponencial de  $\overline{M}^3(c)$  e  $N_1, N_2$  são os campos de vetores normais unitários de  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente.
2. O subconjunto  $S = \{\exp_p(h(p)N_1(p)); p \in M_1\}$  é uma superfície de  $\overline{M}^3(c)$ .
3.  $\Psi$  leva linhas de curvatura de  $M_1$  em linhas de curvatura de  $M_2$ .

Dizemos ainda que  $M_1$  e  $M_2$  estão *localmente associados por uma transformação de Ribaucour* se  $\forall p \in M_1$ , existe uma vizinhança de  $p$  em  $M_1$  associada por uma transformação de Ribaucour a um aberto de  $M_2$ .

**Observação 2.** Seja  $M$  uma superfície de  $\overline{M}^3(c)$  e  $N$  seu campo normal unitário ao longo de  $\overline{M}^3(c)$ . Se  $c = \pm 1$ , então  $\langle N(p), p \rangle = 0, \forall p \in M$ . De fato, seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{M}^3(c)$  uma parametrização local ortogonal de  $p \in \overline{M}^3(c)$ .

Logo,

$$\langle X(u), X(u) \rangle = \pm 1, \quad \forall u \in U,$$

portanto, derivando parcialmente a equação anterior, obtemos

$$\langle X_{,i}(u), X(u) \rangle = 0, \quad \forall u \in U, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Se  $p \in M$ , então  $N(p) = X_{,i}(u)$  para algum  $i = 1, 2$  e  $X(u) = p$ .

Considerando  $\overline{M}^3(c)$  como  $\mathbb{R}^3, \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$  ou  $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$ , a condição (1) da definição anterior pode ser escrita como

$$(2.4) \quad p + h(p)N_1(p) = \Psi(p) + h(p)N_2(\Psi(p)), \quad \forall p \in M_1,$$

tal que se  $\phi$  é a função raio sobre  $M_1$ , então

$$(2.5) \quad h(p) = \begin{cases} \tan(\phi(p)), & \phi : M_1 \rightarrow (0, \frac{\pi}{2}), \text{ se } c = 1. \\ \tanh(\phi(p)), & \phi : M_1 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ se } c = -1. \end{cases}$$

De fato, um ponto de  $\mathbb{S}^3$  o qual pertence à geodésica que passa pelo  $p \in \mathbb{S}^3$  na direção  $N_1(p)$ , pode ser parametrizado como

$$\cos(\phi(p))p + \sin(\phi(p))N_1(p), \quad \phi : \mathbb{S}^3 \rightarrow (0, \pi).$$

Dado que  $p \in M_1$  e  $\Psi(p) \in M_2$  são tangentes à mesma esfera geodésica, então  $\phi(p) \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

Analogamente, um ponto de  $\mathbb{H}^3$  o qual pertence à geodésica que passa pelo ponto  $p \in \mathbb{H}^3$  na direção  $N_1(p)$ , pode ser parametrizado como

$$\cosh(\phi(p))p + \sinh(\phi(p))N_1(p), \quad \phi : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$(2.6) \quad \phi(p) = \begin{cases} \tan^{-1}(h(p)), & h : M_1 \rightarrow (0, \infty), \text{ se } c = 1. \\ \tanh^{-1}(h(p)), & h : M_1 \rightarrow (-1, 1), \text{ se } c = -1. \end{cases}$$

Definimos agora (localmente) o sistema de coordenadas 3-dimensional de  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$  e  $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{L}^4$  de forma análoga ao sistema de coordenadas esférico no espaço Euclidiano e ao espaço hiperbólico no espaço de Minkowski, respectivamente.

No caso de  $\mathbb{S}^3$ , as coordenadas consistem de 3 ângulos coordenados  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ , onde  $\phi_1, \phi_2 \in (0, \pi)$  e  $\phi_3 \in (-\pi, \pi)$ . Se  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , são as coordenadas cartesianas de  $\mathbb{S}^3$  em  $\mathbb{R}^4$ , então

$$(2.7) \quad \begin{aligned} u_1 &= \cos(\phi_1), \\ u_2 &= \sin(\phi_1)\cos(\phi_2), \\ u_3 &= \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cos(\phi_3), \\ u_4 &= \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\sin(\phi_3). \end{aligned}$$

Se  $\phi_3 = 0$ , então  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$  e as coordenadas cartesianas de  $\mathbb{S}^2$  em  $\mathbb{R}^4$  vem dadas por

$$(2.8) \quad u_1 = \cos(\phi_1), \quad u_2 = \sin(\phi_1)\cos(\phi_2), \quad u_3 = \sin(\phi_1)\sin(\phi_2), \quad u_4 = 0.$$

Para  $\mathbb{H}^3$ , as coordenadas consistem de 3 ângulos coordenados  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ , onde  $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in \mathbb{R}$ . Se  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , são as coordenadas cartesianas de  $\mathbb{H}^3$  em  $\mathbb{L}^4$ , então

$$(2.9) \quad \begin{aligned} u_1 &= \sinh(\phi_1), \\ u_2 &= \cosh(\phi_1)\sinh(\phi_2), \\ u_3 &= \cosh(\phi_1)\cosh(\phi_2)\sinh(\phi_3), \\ u_4 &= \cosh(\phi_1)\cosh(\phi_2)\cosh(\phi_3). \end{aligned}$$

Se  $\phi_3 = 0$ , então  $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$  e as coordenadas cartesianas de  $\mathbb{H}^2$  em  $\mathbb{L}^4$  vem dadas por

$$(2.10) \quad u_1 = \sinh(\phi_1), \quad u_2 = \cosh(\phi_1)\sinh(\phi_2), \quad u_3 = 0, \quad u_4 = \cosh(\phi_1)\cosh(\phi_2).$$

De agora em diante, consideraremos  $M(c)$  como a superfície de  $\overline{M}^3(c)$  tal que  $M(c) = \mathbb{H}^2$  quando  $c = -1$ ,  $M(c) = \mathbb{R}^2$  quando  $c = 0$  ou  $M(c) = \mathbb{S}^2$  quando  $c = 1$ , com campo normal unitário dado por  $N(p) = e_c$ ,  $\forall p \in M(c)$ , onde  $e_c$  é definido por

$$(2.11) \quad e_c = \begin{cases} (0, 0, 1, 0) \in \mathbb{L}^4, & \text{se } c = -1. \\ (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3, & \text{se } c = 0. \\ (0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4, & \text{se } c = 1. \end{cases}$$

Seja  $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M(c)$  uma parametrização local ortogonal de  $M(c)$ , isto é,  $L_{ij} = \langle Y_{,i}, Y_{,j} \rangle = \delta_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ . Então os símbolos de Christoffel de  $L_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ , são dados por

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \Gamma_{ij}^m &= 0, \text{ para } i, j, m \text{ distintos.} \\ \Gamma_{ij}^j &= \frac{L_{jj,i}}{2L_{jj}}, \text{ para todo } i, j. \\ \Gamma_{ii}^j &= -\frac{L_{ii,j}}{2L_{jj}}, \text{ para } i \neq j. \end{aligned}$$

Denotaremos por  $\mathbb{C}$  o corpo dos números complexos. Além disso, identificamos  $\mathbb{C}$  com  $\mathbb{R}^2$  pelo isomorfismo

$$(2.13) \quad G_{\mathbb{R}^2}(z) = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}.$$

A identificação de  $\mathbb{C}$  com  $\mathbb{R}^2$  induz de maneira natural a noção de produto interno de funções holomorfas. Com efeito, dadas as funções holomorfas  $f, g : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  o produto interno  $\langle f, g \rangle$  em  $U$  é dada por

$$\langle f, g \rangle = \operatorname{Re}(f)\operatorname{Re}(g) + \operatorname{Im}(f)\operatorname{Im}(g).$$

Observamos que  $Re(f) = \langle f, 1 \rangle$  e  $Im(f) = \langle f, i \rangle$ .

**Observação 3.** Consideremos a esfera  $\mathbb{S}^{n+1} = \{u \in \mathbb{R}^{n+2}; \|u\| = 1\}$  munida com a métrica Euclidiana de  $\mathbb{R}^{n+2}$ . As *Projeções estereográficas esféricas*  $P_- : \mathbb{S}^{n+1} - \{-e_{n+2}\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  e  $P_+ : \mathbb{S}^{n+1} - \{e_{n+2}\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  são difeomorfismos definidos por

$$(2.14) \quad P_-(q) = \frac{q - \langle q, e_{n+2} \rangle e_{n+2}}{1 + \langle q, e_{n+2} \rangle}, \quad q \in \mathbb{S}^{n+1},$$

$$(2.15) \quad P_+(q) = \frac{q - \langle q, e_{n+2} \rangle e_{n+2}}{1 - \langle q, e_{n+2} \rangle}, \quad q \in \mathbb{S}^{n+1}.$$

Além disso, as respectivas aplicações inversas  $P_-^{-1}$  e  $P_+^{-1}$ , são dadas por

$$(2.16) \quad P_-^{-1}(p) = \frac{(2p, 1 - \langle p, p \rangle)}{1 + \langle p, p \rangle}, \quad p \in \mathbb{R}^{n+1},$$

$$(2.17) \quad P_+^{-1}(p) = \frac{(2p, \langle p, p \rangle - 1)}{1 + \langle p, p \rangle}, \quad p \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Um modelo conforme para a esfera  $\mathbb{S}^2$  é dada pelo conjunto  $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , munida da estrutura analítica dada pelas parametrizações

$$(2.18) \quad X_1(z) = z, \quad z \in \mathbb{C} \quad e \quad X_2(z) = \begin{cases} \infty, & \text{se } z = 0, \\ \frac{1}{z}, & \text{se } z \in \mathbb{C} - \{0\}. \end{cases}$$

De fato, a aplicação  $G_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{S}^2$ , dada por

$$(2.19) \quad G_{\mathbb{S}^2}(z) = \begin{cases} P_+^{-1}(z), & \text{se } z \neq \infty, \\ e_3, & \text{se } z = \infty. \end{cases}$$

define um difeomorfismo conforme entre  $\mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{C}_\infty$ . Com a estrutura dada por (2.18),  $\mathbb{C}_\infty$  é chamada de *esfera de Riemann*.

O modelo que apresentaremos a seguir é conhecido, na geometria hiperbólica, como o *modelo de Klein*. Consideremos  $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ , a aplicação

$$(2.20) \quad \begin{aligned} P : \mathbb{H}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ u &\rightarrow P(u), \end{aligned}$$

definida pela interseção do hiperplano

$$\mathbb{R}^{n+1} = \{(u_1, u_2, \dots, u_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}; u_{n+2} = 0\},$$

com a reta que passa por  $u$  e  $(0, 0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{R}^{n+2}$  é dada por

$$(2.21) \quad P(u) = \left( \frac{u_1}{1 + u_{n+2}}, \frac{u_2}{1 + u_{n+2}}, \dots, \frac{u_{n+1}}{1 + u_{n+2}} \right), \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_{n+2}) \in \mathbb{H}^{n+1}.$$

$P$  é chamada de *projeção estereográfica hiperbólica* e é um difeomorfismo de  $\mathbb{H}^{n+1}$  sobre  $B^{n+1}(1) = \{u \in \mathbb{R}^{n+1}; |u| < 1\}$ . Como  $P$  é um difeomorfismo, a métrica em  $\mathbb{H}^{n+1}$  induz uma métrica em  $B^{n+1}(1)$  de modo que  $P : \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow B^{n+1}(1)$  seja uma isometria. Um modelo conhecido acontece quando  $n = 1$ , neste caso,  $B^2(1)$  com a métrica induzida por  $P$  é chamada de *Disco de Poincare*. Dessa forma, uma parametrização para  $\mathbb{H}^2$  é a aplicação  $P^{-1} : B^2(1) \rightarrow \mathbb{H}^2$  dada por

$$(2.22) \quad P^{-1}(u_1, u_2) = \frac{1}{1 - (u_1^2 + u_2^2)} (2u_1, 2u_2, 1 + u_1^2 + u_2^2), \quad (u_1, u_2) \in B^2(1).$$

Identificaremos  $B^2(1)$  com o conjunto  $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ , assim, definimos

$$(2.23) \quad G_{\mathbb{H}^2}(z) = P^{-1}(z) = \frac{1}{1 - \langle z, z \rangle} (2z, 1 + \langle z, z \rangle), \quad z \in B^2(1).$$

As projeções estereográficas (esférica e hiperbólica) são usadas para definir no plano complexo  $\mathbb{C}$  uma métrica não Euclidiana.

**Definição 6.** A *equação de Helmholtz* é uma equação diferencial elíptica da forma

$$(2.24) \quad \Delta \psi(x, y) + k(x, y) \psi(x, y) = 0,$$

onde  $\Delta$  é o Laplaciano Euclidiano e  $k$  é uma função real conhecida num aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ . Se  $k = 0$ , então (2.24) é chamada *equação de Laplace*.

**3. Superfícies de  $\overline{M}^3(c)$  associadas a  $M(c)$  por uma congruência de esferas geodésicas.** O seguinte resultado estabelece condições suficientes para que uma superfície  $\Sigma$  de  $\overline{M}^3(c)$  esteja localmente associada a  $M(c) \subset \overline{M}^3(c)$  por meio de uma congruência de esferas geodésicas em  $\overline{M}^3(c)$ .

**Proposição 1.** *Sejam  $\Sigma$  uma superfície orientável de  $\overline{M}^3(c)$  e  $N$  o campo normal unitário de  $\Sigma$  em  $\overline{M}^3(c)$  tal que  $N(p) \neq e_c, \forall p \in \Sigma$ . Então,*

$$(3.1) \quad v + h(p)dN_p(v) \neq 0, \forall p \in \Sigma \text{ e } v \in T_p\Sigma \text{ com } v \neq 0,$$

se, e somente se,  $\Sigma$  e  $M(c)$  estão localmente associadas por uma congruência de esferas geodésicas em  $\overline{M}^3(c)$ , onde  $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  é a função diferenciável definida por

$$(3.2) \quad h(p) = \frac{\langle p, e_c \rangle}{1 - \langle N(p), e_c \rangle}, p \in \Sigma.$$

**Prova:** Sejam  $h$  a função diferenciável definida por (3.2) e  $\Psi$  a aplicação diferenciável definida por

$$(3.3) \quad \Psi(p) = p + h(p)[N(p) - e_c], p \in \Sigma.$$

Então,  $\Psi$  é um difeomorfismo local, tal que  $p + h(p)N(p) = \Psi(p) + h(p)e_c, p \in \Sigma$  e  $\Psi(\Sigma) \subset M(c)$ . De fato, pela definição de  $\Psi$ , temos que

$$(3.4) \quad d\Psi_p(v) = v + dh_p(v)[N(p) - e_c] + h(p)dN_p(v), p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma.$$

Daí,

$$\langle d\Psi_p(v), N(p) \rangle = dh_p(v)[1 - \langle N(p), e_c \rangle], p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma,$$

logo,

$$(3.5) \quad dh_p(v) = \frac{\langle d\Psi_p(v), N(p) \rangle}{1 - \langle N(p), e_c \rangle}, p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma.$$

Se existem  $p \in \Sigma$  e  $v \in T_p\Sigma$  com  $v \neq 0$ , tais que  $d\Psi_p(v) = 0$ , segue de (3.4) e (3.5) que  $v + h(p)dN_p(v) = 0$  o qual é uma contradição com (3.1).

Por outro lado, de (3.2) e (3.3), obtemos

$$(3.6) \quad \langle \Psi(p), e_c \rangle = \langle p + h(p)[N(p) - e_c], e_c \rangle = \langle p, e_c \rangle - h(p)[1 - \langle N(p), e_c \rangle] = 0, \forall p \in \Sigma.$$

Se  $c = 0$ , então  $\Psi(\Sigma) \subset \mathbb{R}^2$ . Se  $c = \pm 1$ , pela Observação 2, temos que  $\langle N(p), p \rangle = 0, \forall p \in \Sigma$ , então

$$\begin{aligned} \langle \Psi(p), \Psi(p) \rangle &= \langle p + h(p)[N(p) - e_c], p + h(p)[N(p) - e_c] \rangle \\ &= \pm 1 - 2h(p)\langle p, e_c \rangle + 2h(p)^2(1 - \langle N(p), e_c \rangle) = \pm 1, \forall p \in \Sigma. \end{aligned}$$

Daí,  $\Psi$  é um difeomorfismo local tal que  $\Psi(\Sigma) \subset M(c)$ .

Seja  $X^0 = \{p + h(p)N(p); p \in \Sigma\} \subset \overline{M}^3(c)$ , mostraremos que  $X^0$  é uma superfície de  $\overline{M}^3(c)$ .

Para isso, sejam  $p \in \Sigma$  e  $v \in T_p\Sigma$  com  $v \neq 0$ , então, por hipótese temos que  $v + h(p)dN_p(v) \neq 0$ , daí,

$$\begin{aligned} \langle dX_p^0(v), dX_p^0(v) \rangle &= \langle v + h(p)dN_p(v) + dh_p(v)N(p), v + h(p)dN_p(v) + dh_p(v)N(p) \rangle \\ &= |v + h(p)dN_p(v)|^2 + |dh_p(v)|^2 > 0, \forall p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma, v \neq 0, \end{aligned}$$

logo  $dX_p^0(v) \neq 0, \forall p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma$  e  $v \neq 0$ . Portanto,  $X^0$  é uma superfície de  $\overline{M}^3(c)$ .

Assim, concluímos que  $\Sigma$  e  $M(c)$  estão localmente associadas por uma congruência de esferas geodésicas em  $\overline{M}^3(c)$ .

Reciprocamente, de (3.4) e (3.6), obtemos

$$(3.7) \quad \begin{aligned} 0 &= \langle d\Psi_p(v), e_c \rangle \\ &= \langle v + dh_p(v)[N(p) - e_c] + h(p)dN_p(v), e_c \rangle \\ &= \langle (v + h(p)dN_p(v)), e_c \rangle + dh_p(v)(\langle N(p), e_c \rangle - 1), p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma. \end{aligned}$$

Consideremos a superfície  $X^0 = \{p + h(p)N(p), p \in \Sigma\}$  de  $\overline{M}^3(c)$ , segue disto que

$$dX_p^0(v) = v + h(p)dN_p(v) + dh_p(v)N(p), p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma.$$

Assumamos que  $v+h(p)dN_p(v) = 0$  num ponto  $p \in \Sigma$  e  $v \in T_p\Sigma$  com  $v \neq 0$ . Segue de (3.7) que  $dh_p(v)(\langle N(p), e_c \rangle - 1) = 0$ , logo,  $dh_p(v) = 0$ , de outra forma  $\langle N(p), e_c \rangle = 1$ , daqui teríamos que  $N(p) = e_c$ , o qual é uma contradição. Portanto, temos que  $dh_p(v) = 0$  e  $dX_p^0(v) = 0$ , o qual é uma contradição com o fato de que  $X^0$  é uma superfície de  $\overline{M}^3(c)$ . Assim,  $v + h(p)dN_p(v) \neq 0$ ,  $\forall p \in \Sigma$ ,  $v \in T_p\Sigma$ ,  $v \neq 0$ .  $\square$

**Observação 4.** Pela definição de  $h$  em (3.2), temos que

$$(3.8) \quad dh_p(v) = \frac{\langle v + h(p)dN_p(v), e_c \rangle}{1 - \langle N(p), e_c \rangle}, \quad p \in \Sigma, \quad v \in T_p\Sigma.$$

Sejam  $\Sigma$  uma superfície orientável de  $\overline{M}^3(c)$  e  $N$  o campo normal unitário de  $\Sigma$  em  $\overline{M}^3(c)$ , tal que  $N(p) \neq e_c$ ,  $\forall p \in \Sigma$ . Observamos que  $\Sigma$  está localmente associada a  $M(c)$  por uma congruência de esferas geodésicas sempre que  $v + h(p)dN_p(v) \neq 0$ ,  $\forall p \in \Sigma$  e  $v \in T_p\Sigma$  com  $v \neq 0$ , onde  $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  é a função diferenciável definida por (3.2).

O seguinte teorema garante que  $\Sigma$  e  $M(c)$  estão localmente associadas por uma transformação de Ribaucour.

**Teorema 1.** *Sejam  $\Sigma$  uma superfície orientável de  $\overline{M}^3(c)$ ,  $N$  o campo normal unitário de  $\Sigma$  em  $\overline{M}^3(c)$  tal que  $N(p) \neq e_c$ ,  $\forall p \in \Sigma$  e  $\{e_1, e_2\}$  campos de vetores locais ortonormais de direções principais de  $\Sigma$  em  $p$ . Além disso, sejam  $h$  e  $\Psi$  definidas por (3.2) e (3.3), respectivamente. Então  $1 + h(p)k_i \neq 0$ ,  $\forall p \in \Sigma$ ,  $1 \leq i \leq 2$ , onde  $k_i$  são as curvaturas principais de  $\Sigma$  em  $\overline{M}^3(c)$  se, e somente se,  $\Sigma$  e  $M(c)$  estão localmente associadas por uma transformação de Ribaucour em  $\overline{M}^3(c)$ .*

**Prova:** Mostremos que  $v + h(p)dN_p(v) \neq 0$ ,  $\forall p \in \Sigma$ ,  $v \in T_p\Sigma$  com  $v \neq 0$  e  $\langle d\Psi_p(e_1), d\Psi_p(e_2) \rangle = 0$ ,  $\forall p \in \Sigma$ . Seja  $v \in T_p\Sigma$ , tal que  $v \neq 0$ , então, existem  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ , tais que  $v = \sum_{i=1}^2 v_i e_i$ , onde  $v_i \neq 0$  para algum  $i \in \{1, 2\}$ .

Suponha que  $v + h(p)dN_p(v) = 0$ , assim

$$0 = v + h(p)dN_p(v) = \sum_{i=1}^2 v_i e_i + h(p)dN_p \left( \sum_{i=1}^2 v_i e_i \right) = \sum_{i=1}^2 (1 + h(p)k_i) v_i e_i,$$

como  $\{e_1, e_2\}$  é um conjunto linearmente independente, temos que

$$(1 + h(p)k_i)v_i = 0, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Porém, por hipótese, existe pelo menos um  $v_i \neq 0$ , então  $1 + h(p)k_i = 0$  para algum  $i \in \{1, 2\}$ , isto é uma contradição. Portanto, concluímos que  $v + h(p)dN_p(v) \neq 0$ ,  $\forall p \in \Sigma$ ,  $v \in T_p\Sigma$  com  $v \neq 0$ . Pela Proposição 1, temos que  $\Sigma$  e  $M(c)$  estão associadas por uma congruência de esferas geodésicas.

Por outro lado, observe que por (3.4) e (3.8), temos que

$$(3.9) \quad d\Psi_p(e_i) = (1 + h(p)k_i)e_i + dh_p(e_i)[N(p) - e_c].$$

$$(3.10) \quad dh_p(e_i) = \frac{(1 + h(p)k_i)\langle e_i, e_c \rangle}{1 - \langle N(p), e_c \rangle}, \quad p \in \Sigma, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Daí, para  $1 \leq i, j \leq 2$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle d\Psi_p(e_i), d\Psi_p(e_j) \rangle &= (1 + h(p)k_i)(1 + h(p)k_j)\delta_{ij} - (1 + h(p)k_i)dh_p(e_j)\langle e_i, e_c \rangle \\ &\quad - (1 + h(p)k_j)dh_p(e_i)\langle e_j, e_c \rangle + 2dh_p(e_i)dh_p(e_j)(1 - \langle N(p), e_c \rangle). \end{aligned}$$

Substituindo (3.10) na equação anterior, temos que  $\langle d\Psi_p(e_i), d\Psi_p(e_j) \rangle = 0$  para  $1 \leq i \neq j \leq 2$ . Logo,  $\{d\Psi(e_1), d\Psi(e_2)\}$  é uma base ortogonal de direções principais de  $M(c)$  em  $\overline{M}^3(c)$ . Portanto,  $\Sigma$  e  $M(c)$  estão localmente associadas por uma transformação de Ribaucour em  $\overline{M}^3(c)$ .  $\square$

**exemplo 1.** Seja  $X : \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \times \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^3$  dada por

$$(3.11) \quad X(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(u_1), \sin(u_1), \cos(u_2), \sin(u_2)).$$

O vetor normal unitário de  $X$  em  $\mathbb{S}^3$  é dado por

$$(3.12) \quad N(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\cos(u_1), -\sin(u_1), \cos(u_2), \sin(u_2)).$$

Uma base ortonormal local de direções principais para o espaço tangente de  $X$  em  $\mathbb{S}^3$  é dada por

$$X_{,1} = (-\text{sen}(u_1), \cos(u_1), 0, 0), \quad X_{,2} = (0, 0, -\text{sen}(u_2), \cos(u_2)).$$

Seja  $Y : (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \times (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$  a parametrização local da esfera dada por

$$Y(u_1, u_2) = \frac{1}{2 - \sqrt{2}\text{sen}(u_2)} \left( \cos(u_1) \left( \sqrt{2} - 2\text{sen}(u_2) \right), \text{sen}(u_1) \left( \sqrt{2} - 2\text{sen}(u_2) \right), \sqrt{2}\cos(u_2), 0 \right).$$

O vetor normal unitario de  $Y$  em  $\mathbb{S}^3$  é dado por  $e_1 = (0, 0, 0, 1)$ . Uma base ortogonal para o espaço tangente de  $Y$  em  $\mathbb{S}^3$  é dada por

$$Y_{,1} = \frac{\sqrt{2} - 2\text{sen}(u_2)}{2 - \sqrt{2}\text{sen}(u_2)} (-\text{sen}(u_1), \cos(u_1), 0, 0),$$

$$Y_{,2} = \frac{2}{(2 - \sqrt{2}\text{sen}(u_2))^2} \left( -\cos(u_2)\cos(u_1), -\cos(u_2)\text{sen}(u_1), 1 - \sqrt{2}\text{sen}(u_2), 0 \right).$$

Substituindo (3.11) e (3.12) em (3.2), obtemos

$$h(u_1, u_2) = \frac{\text{sen}(u_2)}{\sqrt{2} - \text{sen}(u_2)}.$$

Observe que  $X(u_1, u_2) + h(u_1, u_2)N(u_1, u_2) = Y(u_1, u_2) + h(u_1, u_2)e_1$ , portanto,  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  está associado localmente por uma transformação de Ribaucour a  $\mathbb{S}^2$ , sempre que  $1 \pm h \neq 0$ , se, e somente se,  $u_2 \neq \frac{\pi}{4}$ .

A seguinte Proposição estende o resultado obtido em [2] para  $\mathbb{H}^3$  e  $\mathbb{S}^3$ .

**Proposição 2.** *Sejam  $\Sigma$  uma superfície orientável de  $\overline{M}^3(c)$ ,  $N$  o campo normal unitário de  $\Sigma$  em  $\overline{M}^3(c)$ , tal que  $N(p) \neq e_c, \forall p \in \Sigma$  e  $X : U \rightarrow \Sigma$  uma parametrização local de  $\Sigma$  em  $p$ . Suponha que vale (3.1), Então existe uma parametrização local  $Y : U \rightarrow M(c)$  tal que*

$$(3.13) \quad X(u) = Y(u) + h(u) [e_c - N(u)], \quad u \in U.$$

Além disso, se  $Y$  é uma parametrização local ortogonal de  $M(c)$ , então

$$(3.14) \quad X = Y - \frac{2h}{S} \left( \sum_{i=1}^2 \frac{h_{,i}}{L_{ii}} Y_{,i} - e_c + chY \right),$$

$$(3.15) \quad N = \frac{2}{S} \left( \sum_{i=1}^2 \frac{h_{,i}}{L_{ii}} Y_{,i} - e_c + chY \right) + e_c,$$

onde

$$(3.16) \quad S = \sum_{i=1}^2 \frac{h_{,i}^2}{L_{ii}} + ch^2 + 1.$$

As formas fundamentais I, II e III de  $\Sigma$  em  $\overline{M}^3(c)$  são dadas por

$$(3.17) \quad I = \langle X_{,i}, X_{,j} \rangle = L_{ij} - \frac{2h}{S} (V_{ji}L_{ii} + V_{ij}L_{jj}) + \frac{4h^2}{S^2} \sum_{k=1}^2 V_{ik}V_{jk}L_{kk},$$

$$(3.18) \quad II = -\langle N_{,i}, X_{,j} \rangle = \frac{4h}{S^2} \sum_{k=1}^2 V_{ik}V_{jk}L_{kk} - \frac{2}{S} V_{ji}L_{ii},$$

$$(3.19) \quad III = \langle N_{,i}, N_{,j} \rangle = \frac{4}{S^2} \sum_{k=1}^2 V_{ik}V_{jk}L_{kk},$$

onde

$$(3.20) \quad V_{ij} = \frac{1}{L_{jj}} \left( h_{,ij} - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l h_{,l} \right) + c\delta_{ij}h, \quad 1 \leq i, j \leq 2,$$

$\Gamma_{ij}^l$  os símbolos de Christoffel da métrica  $L_{ij} = \langle Y_{,i}, Y_{,j} \rangle$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ .  
A matriz de Weingarten  $W = (W_{ij})$  é dada por

$$(3.21) \quad W = 2V(SI_2 - 2hV)^{-1},$$

onde  $I_2$  é a matriz identidade e  $V = (V_{ij})$ .  
A condição de regularidade é dada por

$$(3.22) \quad \det(SI_2 - 2hV) \neq 0.$$

Reciprocamente, dada uma parametrização local ortogonal  $Y : U \rightarrow M(c) \subset \overline{M}^3(c)$ , onde  $U$  é um aberto conexo de  $\mathbb{R}^2$  e uma função diferenciável  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ , então (3.14) define uma superfície em  $\overline{M}^3(c)$  com aplicação normal de Gauss dada por (3.15). Além disso, (3.16)-(3.21) são satisfeitas.

**Prova:** Sejam  $Y : U \rightarrow M(c)$  uma parametrização local ortogonal de  $M(c)$  tal que vale (3.13) e  $N$  o campo normal unitário de  $\Sigma$  em  $\overline{M}^3(c)$  dado por

$$(3.23) \quad N = \sum_{i=1}^2 b_i Y_{,i} + b_3 e_c + b_4 Y, \text{ se } c = \pm 1$$

e

$$(3.24) \quad N = \sum_{i=1}^2 b_i Y_{,i} + b_3 e_c, \text{ se } c = 0,$$

tal que

$$(3.25) \quad \langle N, N \rangle = \sum_{i=1}^2 b_i^2 L_{ii} + b_3^2 + cb_4^2 = 1.$$

Calculando a derivada parcial de (3.13), obtemos

$$(3.26) \quad X_{,i} = Y_{,i} + h_{,i}(e_c - N) - hN_{,i}, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Usando (3.23) e (3.26), temos que

$$0 = \langle N, X_{,i} \rangle = b_i L_{ii} + h_{,i}(b_3 - 1), \quad 1 \leq i \leq 2,$$

daqui segue que

$$(3.27) \quad b_i = \frac{h_{,i}(1 - b_3)}{L_{ii}}, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Por outro lado, se  $c = \pm 1$ , usando (3.13) e o fato que  $\langle X, N \rangle = 0$ , obtemos

$$0 = \langle X, N \rangle = \langle Y + h(e_c - N), N \rangle = \langle Y, N \rangle + h(\langle e_c, N \rangle - 1),$$

segue disto que

$$(3.28) \quad b_4 = ch(1 - b_3).$$

Substituindo (3.27), (3.28) em (3.25), obtemos

$$\sum_{i=1}^2 \left[ \left( \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \right)^2 (1 - b_3)^2 L_{ii} \right] + b_3^2 + ch^2(1 - b_3)^2 = 1,$$

daí,

$$\left( \sum_{i=1}^2 \frac{h_{,i}^2}{L_{ii}} + ch^2 - 1 \right) - 2 \left( \sum_{i=1}^2 \frac{h_{,i}^2}{L_{ii}} + ch^2 \right) b_3 + \left( \sum_{i=1}^2 \frac{h_{,i}^2}{L_{ii}} + ch^2 + 1 \right) b_3^2 = 0.$$

Substituindo (3.16) na equação anterior

$$(3.29) \quad (S - 2) - 2(S - 1)b_3 + Sb_3^2 = 0.$$

As soluções da equação (3.29) com respeito a  $b_3$  são dadas por

$$b_3 = 1 \text{ ou } b_3 = 1 - \frac{2}{S}.$$

Se  $b_3 = 1$ , então  $N = e_c$  o qual é uma contradição, logo

$$(3.30) \quad b_3 = 1 - \frac{2}{S}.$$

Assim, substituindo (3.27), (3.28) e (3.30) em (3.23) e (3.24), obtemos (3.15). Substituindo (3.15) em (3.13), obtemos (3.14).

Agora, derivando  $S$  dada por (3.16)

$$\begin{aligned} S_{,i} &= \sum_{j=1}^2 \frac{2h_{,j}h_{,ji}L_{jj} - L_{jj,i}h_{,j}^2}{L_{jj}^2} + 2ch_{,i}, \\ &= \frac{2}{L_{ii}} \left( h_{,ii} - \frac{L_{ii,i}h_{,i}}{2L_{ii}} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^2 \frac{L_{ii,l}h_{,l}}{2L_{ii}} \right) h_{,i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{2}{L_{jj}} \left( h_{,ji} - \frac{L_{jj,i}h_{,j}}{2L_{jj}} - \frac{L_{ii,j}h_{,i}}{2L_{ii}} \right) h_{,j} + 2ch_{,i}, \\ &= \frac{2}{L_{ii}} \left( h_{,ii} - \Gamma_{ii}^i h_{,i} - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^2 \Gamma_{ii}^l h_{,l} \right) h_{,i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{2}{L_{jj}} \left( h_{,ji} - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l h_{,l} \right) h_{,j} + 2ch_{,i} \\ &= 2 \sum_{j=1}^2 \left[ \frac{1}{L_{jj}} \left( h_{,ji} - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l h_{,l} \right) + c\delta_{ij}h \right] h_{,j}, \quad 1 \leq i \leq 2. \end{aligned}$$

Logo, substituindo (3.20) na equação anterior, obtemos

$$(3.31) \quad S_{,i} = 2 \sum_{j=1}^2 V_{ij}h_{,j}, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Observemos que

$$(3.32) \quad Y_{,ij} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k Y_{,k} + b_3 e_c + b_4 Y, \text{ se } c = \pm 1, \quad 1 \leq i, j \leq 2,$$

e

$$(3.33) \quad Y_{,ij} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k Y_{,k} + b_3 e_c, \text{ se } c = 0, \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Se  $c = \pm 1$ , então  $\langle Y, Y_{,j} \rangle = 0, 1 \leq j \leq 2$ , daí,  $\langle Y_{,i}, Y_{,j} \rangle + \langle Y, Y_{,ji} \rangle = 0$ , logo  $b_4 = -cL_{ij}, 1 \leq i, j \leq 2$ .

Por outra parte, como  $\langle Y_{,j}, e_c \rangle = 0, 1 \leq j \leq 2$ , então  $\langle Y_{,ji}, e_c \rangle = 0$ , daí,  $b_3 = 0$ .

Substituindo  $b_3 = 0$  e  $b_4 = -cL_{ij}$  em (3.32) e (3.33), obtemos

$$(3.34) \quad Y_{,ij} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k Y_{,k} - cL_{ij}Y, \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Assim, usando (3.34)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,ji} &= \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ji}^j Y_{,j} + \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^2 \Gamma_{ji}^k Y_{,k} - c \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}L_{ji}}{L_{jj}} Y, \\ &= \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ji}^j Y_{,j} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^2 \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \Gamma_{ii}^k Y_{,k} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^2 \Gamma_{ji}^k Y_{,k} - ch_{,i}Y, \\ &= \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ji}^j Y_{,j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \Gamma_{ii}^j Y_{,j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ji}^i Y_{,i} - ch_{,i}Y. \end{aligned}$$

Usando as relações (2.12) na equação anterior, temos que

$$\sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,ji} = \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j} L_{jj,i}}{2L_{jj}^2} Y_{,j} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{h_{,i} L_{ii,j}}{2L_{jj} L_{ii}} Y_{,j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{h_{,j} L_{ii,j}}{2L_{ii} L_{jj}} Y_{,i} - ch_{,i} Y,$$

logo,

$$(3.35) \quad \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,ji} = \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j} L_{jj,i}}{2L_{jj}^2} Y_{,j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{L_{ii,j}}{2L_{ii} L_{jj}} (h_{,j} Y_{,i} - h_{,i} Y_{,j}) - ch_{,i} Y.$$

Definimos

$$(3.36) \quad C = Y + h e_c, \quad D = \sum_{i=1}^2 \frac{h_{,i}}{L_{ii}} Y_{,i} + chY + \left( \frac{S}{2} - 1 \right) e_c.$$

Derivando as expressões (3.36)

$$(3.37) \quad C_{,i} = Y_{,i} + h_{,i} e_c, \quad 1 \leq i \leq 2,$$

$$\begin{aligned} D_{,i} &= \sum_{j=1}^2 \left[ \left( \frac{h_{,ji} L_{jj} - L_{jj,i} h_{,j}}{L_{jj}^2} \right) Y_{,j} + \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,ji} \right] + ch_{,i} Y + chY_{,i} + \frac{S_{,i}}{2} e_c, \\ &= \sum_{j=1}^2 \left[ \left( \frac{h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{L_{jj,i} h_{,j}}{L_{jj}^2} \right) Y_{,j} + \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,ji} \right] + ch_{,i} Y + chY_{,i} + \sum_{j=1}^2 \left( \frac{2h_{,j} h_{,ji} L_{jj} - L_{jj,i} h_{,j}^2}{2L_{jj}^2} \right) e_c \\ &\quad + chh_{,i} e_c, \\ &= \sum_{j=1}^2 \left[ \left( \frac{h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{L_{jj,i} h_{,j}}{L_{jj}^2} \right) Y_{,j} + \frac{h_{,j}}{L_{jj}} Y_{,ji} + \left( \frac{h_{,j} h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{L_{jj,i} h_{,j}^2}{2L_{jj}^2} \right) e_c \right] + chC_{,i} + ch_{,i} Y. \end{aligned}$$

Usando (3.35) na equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} D_{,i} &= \sum_{j=1}^2 \left[ \left( \frac{h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{L_{jj,i} h_{,j}}{L_{jj}^2} \right) Y_{,j} + \frac{h_{,j} L_{jj,i}}{2L_{jj}^2} Y_{,j} + \left( \frac{h_{,j} h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{L_{jj,i} h_{,j}^2}{2L_{jj}^2} \right) e_c \right] + chC_{,i} + ch_{,i} Y \\ &\quad + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{L_{ii,j}}{2L_{ii} L_{jj}} (h_{,j} Y_{,i} - h_{,i} Y_{,j}) - ch_{,i} Y, \\ &= \sum_{j=1}^2 \left( \frac{h_{,ji}}{L_{jj}} Y_{,j} - \frac{L_{jj,i} h_{,j}}{2L_{jj}^2} Y_{,j} + \frac{h_{,j} h_{,ji}}{L_{jj}} e_c - \frac{L_{jj,i} h_{,j}^2}{2L_{jj}^2} e_c \right) + chC_{,i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{L_{ii,j}}{2L_{ii} L_{jj}} (h_{,j} Y_{,i} - h_{,i} Y_{,j}), \\ &= \sum_{j=1}^2 \left( \frac{h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{L_{jj,i} h_{,j}}{2L_{jj}^2} \right) C_{,j} + chC_{,i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{L_{ii,j}}{2L_{ii} L_{jj}} (h_{,j} Y_{,i} - h_{,i} Y_{,j}), \end{aligned}$$

somando zero na igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
 D_i &= \frac{h_{,ii}}{L_{ii}} C_{,i} - \frac{L_{ii,i} h_{,i}}{2L_{ii} L_{ii}} C_{,i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{1}{L_{jj}} \left( h_{,ji} - \frac{L_{jj,i} h_{,j}}{2L_{jj}} \right) C_{,j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{L_{ii,j} h_{,j}}{2L_{ii} L_{jj}} C_{,i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{L_{ii,j} h_{,i}}{2L_{ii} L_{jj}} C_{,j} \\
 &\quad + ch C_{,i}, \\
 &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{1}{L_{jj}} \left( h_{,ji} - \frac{L_{jj,i} h_{,j}}{2L_{jj}} - \frac{L_{ii,j} h_{,i}}{2L_{ii}} \right) C_{,j} + \frac{1}{L_{ii}} \left( h_{,ii} - \frac{L_{ii,i} h_{,i}}{2L_{ii}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{L_{ii,j} h_{,j}}{2L_{jj}} \right) C_{,i} \\
 &\quad + ch C_{,i}, \\
 &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{1}{L_{jj}} \left( h_{,ji} - \Gamma_{ij}^j h_{,j} - \Gamma_{ij}^i h_{,i} \right) C_{,j} + \frac{1}{L_{ii}} \left( h_{,ii} - \Gamma_{ii}^i h_{,i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \Gamma_{ii}^j h_{,j} \right) C_{,i} + ch C_{,i}, \\
 &= \sum_{j=1}^2 \frac{1}{L_{jj}} \left( h_{,ji} - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l h_{,l} \right) C_{,j} + ch C_{,i}, \\
 &= \sum_{j=1}^2 \left[ \frac{1}{L_{jj}} \left( h_{,ji} - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l h_{,l} \right) + c \delta_{ij} h \right] C_{,j}.
 \end{aligned}$$

Logo, substituindo (3.20) na equação anterior, obtemos

$$(3.38) \quad D_{,i} = \sum_{j=1}^2 V_{ij} C_{,j}, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Observemos que

$$(3.39) \quad X = C - \frac{2Dh}{S} \quad e \quad N = \frac{2D}{S}.$$

Derivando as expressões (3.39) e usando (3.31), (3.37) e (3.38), obtemos

$$\begin{aligned}
 (3.40) \quad X_{,i} &= C_{,i} - \frac{2h_{,i} D}{S} + \left( 2 \sum_{j=1}^2 V_{ij} h_{,j} \right) \frac{2hD}{S^2} - \frac{2h}{S} \sum_{j=1}^2 V_{ij} C_{,j}, \\
 &= C_{,i} - h_{,i} N + \left( \sum_{j=1}^2 V_{ij} h_{,j} \right) \frac{2hN}{S} - \frac{2h}{S} \sum_{j=1}^2 V_{ij} C_{,j}, \\
 &= C_{,i} - h_{,i} N + \frac{2h}{S} \sum_{j=1}^2 V_{ij} (h_{,j} N - C_{,j}), \quad 1 \leq i \leq 2,
 \end{aligned}$$

$$(3.41) \quad N_{,i} = \frac{2}{S} \left( \sum_{j=1}^2 V_{ij} C_{,j} - \left( \sum_{j=1}^2 V_{ij} h_{,j} \right) \frac{2D}{S} \right) = \frac{2}{S} \sum_{j=1}^2 V_{ij} (C_{,j} - h_{,j} N), \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Como  $X_{,i} + h_{,i} N + h N_{,i} = C_{,i}$ , para  $1 \leq i \leq 2$ , então

$$(3.42) \quad C_{,i} - h_{,i} N = X_{,i} + h N_{,i}, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Substituindo (3.42) em (3.41) e lembrando que  $N_{,i} = \sum_{k=1}^2 W_{ik} X_{,k}$ , obtemos

$$S \sum_{k=1}^2 W_{ik} X_{,k} - 2h \sum_{j=1}^2 V_{ij} \sum_{k=1}^2 W_{jk} X_{,k} = 2 \sum_{k=1}^2 V_{ik} X_{,k},$$

logo

$$\sum_{k=1}^2 \left[ S W_{ik} - 2h \sum_{j=1}^2 V_{ij} W_{jk} \right] X_{,k} = 2 \sum_{k=1}^2 V_{ik} X_{,k}.$$

Como o conjunto  $\{X_{,1}, X_{,2}\}$  é uma base, da equação anterior obtemos

$$SW_{ik} - 2h \sum_{j=1}^2 V_{ij}W_{jk} = 2V_{ik}.$$

Em notação matricial a equação anterior é escrita como

$$(SI_2 - 2hV)W = 2V,$$

daquí obtemos (3.21), desde que  $\det(SI_2 - 2hV) \neq 0$  (condição de regularidade).

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle C_{,k}, C_{,l} \rangle &= L_{kl} + h_{,k}h_{,l}, \quad 1 \leq k, l \leq 2, \\ \langle C_{,k}, N \rangle &= h_{,k}, \quad 1 \leq k \leq 2. \end{aligned}$$

De (3.40) a forma fundamental  $I$  é dada por

$$\begin{aligned} \langle X_{,i}, X_{,j} \rangle &= \left\langle C_{,i} - h_{,i}N + \frac{2h}{S} \sum_{k=1}^2 V_{ik}(h_{,k}N - C_{,k}), C_{,j} - h_{,j}N + \frac{2h}{S} \sum_{l=1}^2 V_{jl}(h_{,l}N - C_{,l}) \right\rangle, \\ &= L_{ij} - \frac{2h}{S} \sum_{l=1}^2 V_{jl}L_{il} - \frac{2h}{S} \sum_{k=1}^2 V_{ik}L_{jk} + \frac{4h^2}{S^2} \sum_{k,l=1}^2 V_{ik}V_{jl}L_{kl}, \\ &= L_{ij} - \frac{2h}{S} V_{ji}L_{ii} - \frac{2h}{S} V_{ij}L_{jj} + \frac{4h^2}{S^2} \sum_{k=1}^2 V_{ik}V_{jk}L_{kk}, \end{aligned}$$

esta equação é equivalente a (3.17).

Também, de (3.40) e (3.41) a forma fundamental  $II$  é dada por

$$\begin{aligned} -\langle X_{,i}, N_{,j} \rangle &= \left\langle C_{,i} - h_{,i}N + \frac{2h}{S} \sum_{k=1}^2 V_{ik}(h_{,k}N - C_{,k}), -\frac{2}{S} \sum_{l=1}^2 V_{jl}(C_{,l} - h_{,l}N) \right\rangle, \\ &= -\frac{2}{S} \sum_{l=1}^2 V_{jl}L_{il} + \frac{4h}{S^2} \sum_{k,l=1}^2 V_{ik}V_{jl}L_{kl}, \end{aligned}$$

esta equação é equivalente a (3.18).

Finalmente, de (3.41) a forma fundamental  $III$  é dada por

$$\begin{aligned} \langle N_{,i}, N_{,j} \rangle &= \frac{4}{S^2} \left\langle \sum_{k=1}^2 V_{ik}(C_{,k} - h_{,k}N), \sum_{l=1}^2 V_{jl}(C_{,l} - h_{,l}N) \right\rangle, \\ &= \frac{4}{S^2} \sum_{k,l=1}^2 V_{ik}V_{jl}L_{kl}, \end{aligned}$$

esta equação é equivalente a (3.19). Assim a prova esta completa.  $\square$

**Corolário 1.** *Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma \subset \overline{M}^3(c)$  uma parametrização de uma superfície dada por (3.14). Então a sua curvatura de Gaussiana  $K$ , é dada por*

$$(3.43) \quad K = \frac{4}{P} \det(V),$$

onde  $P = \det(SI_2 - 2hV)$ .

**Prova:** Como a matriz de Weingarten  $W$  associada a  $\Sigma$  é dada por (3.21), então

$$K = \det(W) = \det(2V [SI_2 - 2hV]^{-1}) = 4\det(V)\det([SI_2 - 2hV]^{-1}),$$

de onde segue o resultado.  $\square$

**4. Aplicações.** O seguinte resultado estabelece algumas equivalências quando  $X$  está parametrizada por linhas de curvatura.

**Corolário 2.** *Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma \subset \overline{M}^3(c)$  uma parametrização de uma superfície dada por (3.14). Então as seguintes afirmações são equivalentes*

1.  $X$  está parametrizada por linhas de curvatura,
2.  $V_{ij} = 0$  para  $1 \leq i \neq j \leq 2$ ,
3.  $N_{,i} = -k_i X_{,i}$ ,  $1 \leq i \leq 2$ ,

onde

$$(4.1) \quad k_i = \frac{2V_{ii}}{2hV_{ii} - S}, \quad 1 \leq i \leq 2,$$

são as curvaturas principais de  $X$ .

**Prova:** Pela equação (3.21), se a matriz de Weingarten  $W$  é diagonal, então a matriz  $V$ , também é diagonal. Portanto,  $V$  é diagonal se, e somente se,  $X$  está parametrizada por linhas de curvatura.

Se  $V_{ij} = 0$  para  $1 \leq i \neq j \leq 2$ , então pelas equações (3.41) e (3.42) obtemos

$$N_{,i} = \frac{2}{S} V_{ii} (X_{,i} + hN_{,i}),$$

isolando  $N_{,i}$  da equação anterior, temos

$$N_{,i} = \left( \frac{2V_{ii}}{S - 2hV_{ii}} \right) X_{,i}, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Como  $V$  é uma matriz diagonal,  $V_{ii}$  são os autovalores da matriz  $V$ . Pela equação (3.21) temos

$$-k_i = \frac{2V_{ii}}{S - 2hV_{ii}}, \quad 1 \leq i \leq 2,$$

o qual conclui a prova.  $\square$

**Observação 5.** Pela equação (4.1) obtemos os autovalores  $\sigma_i$  da matriz  $V$  os quais são dados por

$$(4.2) \quad \sigma_i = \frac{Sk_i}{2(hk_i - 1)}, \quad 1 \leq i \leq 2,$$

onde  $k_i$  são os autovalores da matriz de Weingarten  $W$ .

A seguir apresentamos famílias de superfícies parametrizadas por linhas de curvatura em  $\mathbb{S}^3$  e  $\mathbb{H}^3$ .

**exemplo 2.** Seja  $Y : (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$  uma parametrização local ortogonal de  $\mathbb{S}^2$  dada por

$$Y(u_1, u_2) = (\cos(u_1), \operatorname{sen}(u_1)\cos(u_2), \operatorname{sen}(u_1)\operatorname{sen}(u_2), 0).$$

A base local ortogonal para o plano tangente associado a  $Y$  é dada por

$$\begin{aligned} Y_{,1} &= (-\operatorname{sen}(u_1), \cos(u_1)\cos(u_2), \cos(u_1)\operatorname{sen}(u_2), 0), \\ Y_{,2} &= (0, -\operatorname{sen}(u_1)\operatorname{sen}(u_2), \operatorname{sen}(u_1)\cos(u_2), 0). \end{aligned}$$

O campo normal unitário de  $Y$  ao longo de  $\mathbb{S}^3$  é dado por  $e_1 = (0, 0, 0, 1)$ .

Observe que a métrica de  $Y$  é dada por

$$(4.3) \quad L_{12} = L_{21} = 0, \quad L_{11} = 1, \quad L_{22} = \operatorname{sen}^2(u_1).$$

Daí, os símbolos de Christoffel associados à métrica  $L_{ij}$  são dados por

$$(4.4) \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \cot(u_1), \quad \Gamma_{22}^1 = -\operatorname{sen}(u_1)\cos(u_1).$$

Substituindo (4.3) e (4.4) em (3.20), obtemos

$$\begin{aligned} V_{11} &= h_{,11} + h, \\ V_{12} &= \operatorname{csc}^2(u_1) [h_{,12} - \cot(u_1)h_{,2}], \\ V_{21} &= h_{,21} - \cot(u_1)h_{,2}, \\ V_{22} &= \operatorname{csc}^2(u_1) [h_{,22} + \operatorname{sen}(u_1)\cos(u_1)h_{,1}] + h. \end{aligned}$$

Pela Proposição 2 e Corolário 2, a superfície  $X$  dada por (3.14) será parametrizada por linhas de curvatura em  $\mathbb{S}^3$  se, e somente se,  $h_{,12} - \cot(u_1)h_{,2} = 0$ , cujas soluções são dadas por

$$h(u_1, u_2) = \text{sen}(u_1)f(u_2) + g(u_1),$$

onde  $f, g$  são funções reais.

**exemplo 3.** Seja  $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$  uma parametrização local ortogonal de  $\mathbb{H}^2$  dada por

$$Y(u_1, u_2) = (\text{senh}(u_1), \text{cosh}(u_1)\text{senh}(u_2), 0, \text{cosh}(u_1)\text{cosh}(u_2)).$$

A base local ortogonal para o plano tangente associado a  $Y$  é dada por

$$\begin{aligned} Y_{,1} &= (\text{cosh}(u_1), \text{senh}(u_1)\text{senh}(u_2), 0, \text{senh}(u_1)\text{cosh}(u_2)), \\ Y_{,2} &= (0, \text{cosh}(u_1)\text{cosh}(u_2), 0, \text{cosh}(u_1)\text{senh}(u_2)). \end{aligned}$$

O campo normal unitário de  $Y$  ao longo de  $\mathbb{H}^3$  é dado por  $e_{-1} = (0, 0, 1, 0)$ .

Observe que

$$(4.5) \quad L_{12} = L_{21} = 0, \quad L_{11} = 1, \quad L_{22} = \text{cosh}^2(u_1).$$

Daí, os símbolos de Christoffel associados à metrica  $L_{ij}$  são dados por

$$(4.6) \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \tanh(u_1), \quad \Gamma_{22}^1 = -\text{cosh}(u_1)\text{senh}(u_1).$$

Substituindo (4.5) e (4.6) em (3.20), obtemos

$$\begin{aligned} V_{11} &= h_{,11} - h, \\ V_{12} &= \text{sech}^2(u_1) [h_{,12} - \tanh(u_1)h_{,2}], \\ V_{21} &= h_{,21} - \tanh(u_1)h_{,2}, \\ V_{22} &= \text{sech}^2(u_1) [h_{,22} + \text{cosh}(u_1)\text{senh}(u_1)h_{,1}] - h. \end{aligned}$$

Pela Proposição 2 e Corolário 2, a superfície  $X$  dada por (3.14) será parametrizada por linhas de curvatura em  $\mathbb{H}^3$  se, e somente se,  $h_{,12} - \tanh(u_1)h_{,2} = 0$ , cujas soluções são dadas por

$$h(u_1, u_2) = \text{cosh}(u_1)f(u_2) + g(u_1),$$

onde  $f, g$  são funções reais.

Como as projeções estereográficas (esférica e hiperbólica), são difeomorfismos conformes, as imagens das projeções estereográficas das superfícies  $\Sigma \subset \overline{M}^3(c)$  com  $c = -1, 1$ , são superfícies de  $\mathbb{R}^3$  conformes a  $\Sigma$ .

A seguir damos alguns gráficos de superfícies conformes em  $\mathbb{R}^3$  a uma superfície dada em  $\mathbb{S}^3(c = 1)$  ou em  $\mathbb{H}^3(c = -1)$ .

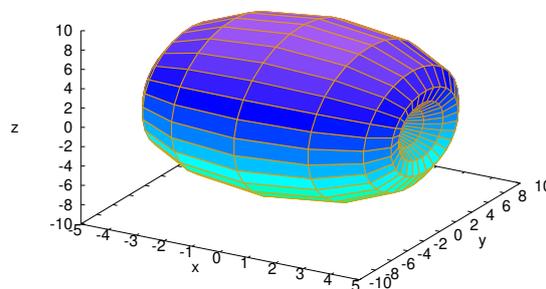


FIGURE 4.1. *Projeção esférica.*  $c = 1$ ,  $\phi(u_1, u_2) = \tan^{-1}(\sin(u_1))$ .

Pela Observação 5, segue que

$$V_{11} + V_{22} = \frac{S(hK - H)}{(hk_1 - 1)(hk_2 - 1)},$$

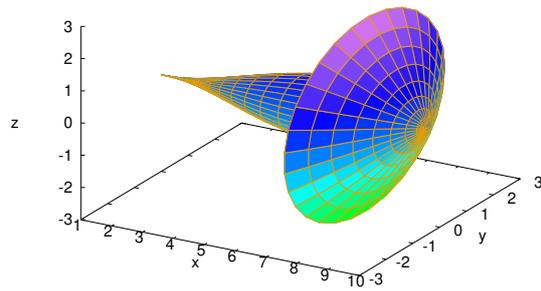


FIGURE 4.2. *Projeção esférica.*  $c = 1$ ,  $\phi(u_1, u_2) = \tan^{-1}(u_1)$ .

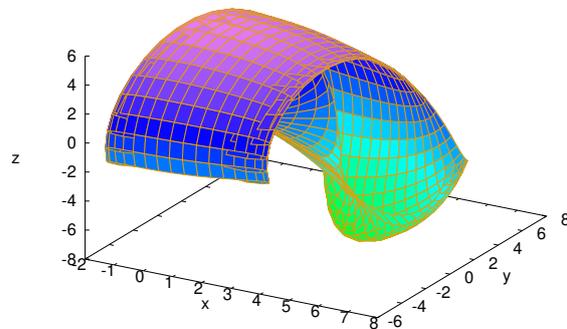


FIGURE 4.3. *Projeção esférica.*  $c = 1$ ,  $\phi(u_1, u_2) = \tan^{-1}(\sin(u_1)u_2 + u_1)$ .

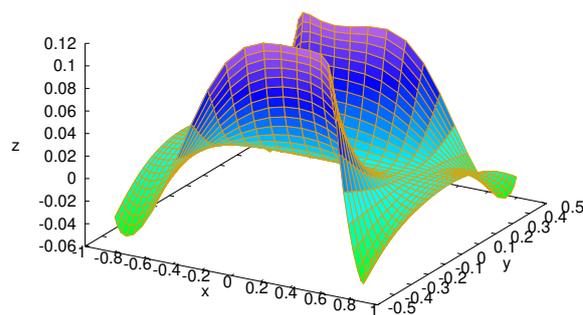


FIGURE 4.4. *Projeção hiperbólica.*  $c = -1$ ,  $\phi(u_1, u_2) = \tanh^{-1}(\cosh(u_1)v^2)$ .

onde  $H$  é a curvatura média,  $K$  é a curvatura Gaussiana de  $\Sigma$  em  $\overline{M}^3(c)$ ,  $h$  é a função raio e  $S$  é dado por (3.16).

Assim,  $\text{tra}(V) = V_{11} + V_{22} = 0$ , se, e somente se,  $h = \frac{H}{K}$ , sempre que  $K \neq 0$ .

**Definição 7.** Dizemos que uma superfície  $\Sigma$  de  $\overline{M}^3(c)$  é uma *superfície de tipo esférico em  $\overline{M}^3(c)$*  se existe

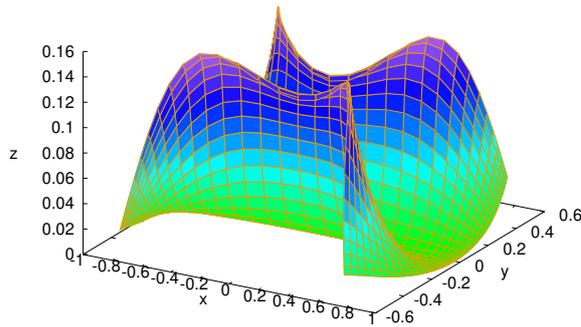


FIGURE 4.5. *Projeção hiperbólica.*  $c = -1$ ,  $\phi(u_1, u_2) = \tanh^{-1}(u_1^2)$ .

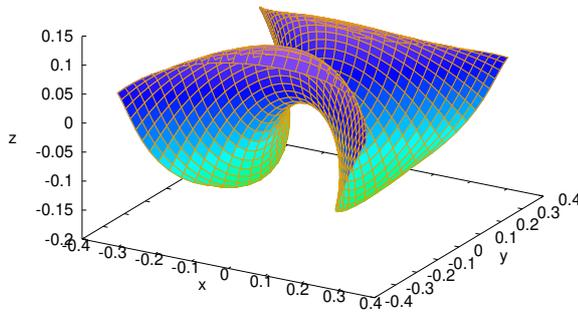


FIGURE 4.6. *Projeção hiperbólica.*  $c = -1$ ,  $\phi(u_1, u_2) = \tanh^{-1}(\cosh(u_1)u_2^2 - u_1^2)$ .

uma congruência de esferas geodésicas entre  $\Sigma$  e  $M(c)$  com função raio  $h$  dada por

$$h = \frac{H}{K}$$

onde  $H$  e  $K$  são a curvatura média e Gaussiana da superfície  $\Sigma$  em  $\overline{M}^3(c)$ .

**Observação 6.** Seja  $Y(z) = g(z)$  a parametrização de  $M(c) \subset \overline{M}^3(c)$ , definida por (2.13), (2.19) e (2.23), isto é,

$$(4.7) \quad g(z) := \begin{cases} G_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{S}^2, & \text{se } c = 1, \\ G_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2, & \text{se } c = 0, \\ G_{\mathbb{H}^2} : B^2(1) \rightarrow \mathbb{H}^2, & \text{se } c = -1. \end{cases}$$

Se  $c = 0$ , temos que  $Y_{,1} = g'$  e  $Y_{,2} = ig'$ . Daí, obtemos  $L_{11} = L_{22} = 1$  e  $L_{12} = 0$ , logo,  $Y$  é uma parametrização ortogonal de  $\mathbb{R}^2$  com símbolos de Christoffel identicamente nulos, isto é,  $\Gamma_{ij}^m = 0$ , para todo  $1 \leq i, j, m \leq 2$ . Daí, por (3.20) obtemos:  $V_{11} = h_{,11}$ ,  $V_{12} = V_{21} = h_{,12}$ ,  $V_{22} = h_{,22}$ . Consequentemente,

$$\text{tra}(V) = h_{,11} + h_{,22} = \Delta h.$$

Se  $c = \pm 1$ , então  $L_{12} = 0$  e  $L_{11} = L_{22} = J_c$ , onde  $J_c$  é a função definida por

$$(4.8) \quad J_c = \begin{cases} \frac{4}{(1+\langle z, z \rangle)^2}, & \text{se } c = 1 \\ \frac{4}{(1-\langle z, z \rangle)^2}, & \text{se } c = -1. \end{cases}$$

Logo,  $Y$  é uma parametrização ortogonal de  $\mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{H}^2$ , respectivamente.  
Por (2.12), os símbolos de Christoffel são dados por

$$(4.9) \quad \Gamma_{ii}^i = \frac{J_{c,i}}{2J_c} \quad e \quad \Gamma_{ij}^i = \frac{J_{c,j}}{2J_c} = -\Gamma_{ii}^j, \quad 1 \leq i \neq j \leq 2.$$

Segue de (4.9) que os coeficientes da matriz  $V$  são dados por

$$(4.10) \quad \begin{aligned} V_{11} &= \frac{1}{J_c} \left( h_{,11} - \frac{J_{c,1}}{2J_c} h_{,1} + \frac{J_{c,2}}{2J_c} h_{,2} \right) + ch, \\ V_{12} &= V_{21} = \frac{1}{J_c} \left( h_{,12} - \frac{J_{c,2}}{2J_c} h_{,1} - \frac{J_{c,1}}{2J_c} h_{,2} \right), \\ V_{22} &= \frac{1}{J_c} \left( h_{,22} + \frac{J_{c,1}}{2J_c} h_{,1} - \frac{J_{c,2}}{2J_c} h_{,2} \right) + ch. \end{aligned}$$

Consequentemente, de (4.10) temos

$$\text{tra}(V) = \frac{h_{,11} + h_{,22}}{J_c} + 2ch = \frac{\Delta h}{J_c} + 2ch.$$

**Proposição 3.** *Seja  $\Sigma$  uma superfície de  $\overline{M}^3(c)$  dada pela parametrização (3.14). Então,  $\Sigma$  é uma superfície de tipo esférico em  $\overline{M}^3(c)$  se, e somente se,  $\text{tra}(V)=0$ . Equivalentemente,  $\Sigma$  é uma superfície de tipo esférico em  $\overline{M}^3(c)$  se, e somente se,  $h$  é solução da equação de Helmholtz dada por*

$$\Delta h + 2J_c ch = 0,$$

onde  $J_c$  é definida por (4.8).

**Prova:** Segue da Observação 6.  $\square$

**5. Conclusões.** Dos resultados obtidos neste artigo podemos fazer as seguintes conclusões:

Dada uma superfície orientável  $\Sigma \subset \overline{M}^3(c)$  satisfazendo as condições da Proposição 1, então  $\Sigma$  e  $M(c)$  estão localmente associadas por uma congruência de esferas geodésicas em  $\overline{M}^3(c)$ . Também, dada uma superfície orientável  $\Sigma \subset \overline{M}^3(c)$  satisfazendo as condições do Teorema 1, então  $\Sigma$  e  $M(c)$  estão localmente associadas por uma transformação de Ribaucour em  $\overline{M}^3(c)$ . A Proposição 2, é uma extensão do resultado obtido em [2] para os espaços  $\mathbb{H}^3$  e  $\mathbb{S}^3$ . Finalmente, a Proposição 3, estende o resultado obtido em [4] para o caso de superfícies.

#### REFERENCES

- [1] Blaschke, W. *Über die geometrie von Laguerre: I. grundformeln der flächentheorie*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg., 1924; 3: 176 - 194.
- [2] Corro, A. V. *Generalized Weingarten surfaces of bryant type in hyperbolic 3-space*, Matemática Contemporânea, 2006; 30: 71 - 89.
- [3] Li, T. Z. *Laguerre geometry of surfaces in  $\mathbb{R}^3$* , Acta Mathematica Sinica, 2005; 21(6): 1525 - 1534.
- [4] Machado, C. D. F. *Hipersuperfícies Weingarten de tipo esférico*, Tese de doutorado, Universidade de Brasília, 2018.
- [5] Pottmann, H., Grohs P. and Mitra, N. J. *Laguerre minimal surfaces, isotropic geometry and linear elasticity*, Advances in computational mathematics, 2009; 31(4): 391 - 419.
- [6] Sarkar, T. K., Chung, Y. S. and Palma, M. S. *Solution of the general Helmholtz equation starting from Laplace's equation*, Applied Computational Electromagnetics Society Journal, 2002; 17(3): 187 - 197.
- [7] Tenenblat, K. and Wang, Q. *Ribaucour transformations for hypersurfaces in space forms*, Annals of Global Analysis and Geometry, 2006; 29(2): 157 - 185.