



# Journal of Materials and Engineering Structures

## Research Paper

### Fonction de Green d'une Poutre Rail Courbée

#### Green Function of Curved Rail-Beam

*Mostefa Lecheheb\*, Rachid Lassoued*

*Laboratoire des Matériaux et Durabilité des Constructions, Département de Génie Civil, Université des Frères Mentouri 1, Constantine, Algérie*

#### ARTICLE INFO

*Historique de l'article :*

Recu : 7 octobre 2017

Révisé : 14 décembre 2017

Accépté : 16 décembre 2017

Mots clés:

Vibration

Euler-Bernoulli

Poutre courbée

Fonction de Green

Keywords :

Vibration

Euler-Bernoulli

Curved beam

Green function

#### RESUME

Dans cet article, on étudie le comportement dynamique du rail sous charges inclinées. Le rail est modélisé comme une poutre courbée sous charges latérales. Lorsqu'un train amorce un virage, deux sources conduisent à ces forces latérales qui ont été rarement étudiées par les précédents chercheurs : les forces d'action du train résultent des forces de la barre d'attelage (due les forces centrifuges) et des forces qui se développent en raison de l'interaction dynamique du véhicule et du rail. Le rail est modélisé comme une poutre infinie selon la théorie d'Euler-Bernoulli. L'utilisation d'une section élémentaire courbée permet d'établir les sollicitations qui agissent sur la poutre, et d'écrire l'équation différentielle du système. L'utilisation de la méthode des résidus permet de déterminer la fonction de Green associée à l'équation différentielle régissant le comportement vibratoire du système rail de la poutre libre.

#### ABSTRACT

In this article, we study the dynamic behavior of the rail under inclined loads. The rail is modeled as a curved beam under lateral loads. When a train enters a curve, two sources lead to these lateral forces that have rarely been studied by previous researchers: the forces of action of the train result from the forces of the drawbar (due to centrifugal forces) and forces that develop due to the dynamic interaction of the vehicle and the rail.

The rail is modeled as an infinite beam according to the Euler-Bernoulli theory. The use of a curved elementary section, allows to establish the solicitations that act the beam, and to write the differential equation of the system. The use of the residue theorem allows determining the Green function associated with the differential equation governing the vibration behavior of the rail system of the free beam.

\* Corresponding author. Tel.: +213 663500100.

E-mail address: lecheheb\_m@hotmail.com

## 1 Introduction

Dans les tracés ferroviaires, les limitations de vitesse sont déterminées par la circulation en courbe du véhicule. Les grandes vitesses imposent des contraintes géométriques au tracé des voies. En raison de l'augmentation de l'effet centrifuge avec la vitesse, les véhicules exercent sur la voie des efforts latéraux qui peuvent présenter un danger au-delà d'une certaine vitesse (déplacement ou dégradation de la voie, ou déraillement du véhicule). De ce fait, La voie doit présenter des qualités géométriques et mécaniques très élevées.

Les trains de grandes vitesses nécessitent une infrastructure particulière avec des virages de très grand rayon de courbure car le rail extérieur ne peut être que faiblement relevé (inclinaison du plan des rails par rapport à l'horizontale). Les forces d'interaction grandissent en raison de la cinématique des roues et du déséquilibre entre les forces gravitationnelles et centrifuges. L'analyse des vibrations de poutres courbées a été largement étudiée par de nombreux chercheurs, en raison de son importance dans de nombreuses applications pratiques.

La recherche dans ce domaine remonte à la fin du dix-huitième siècle [1-2]. L'effet de la déformation a d'abord été pris en compte par Timoshenko pour une poutre I symétrique dans deux plans perpendiculaires l'un à l'autre en 1905 [3]. Une théorie complète des poutres générales à paroi mince a été déterminée par Vlasov [4], dans lequel les sections transversales sont capables à se déformer de manière non uniforme le long de l'axe de la poutre.

Beaucoup de chercheurs Markus et al. [5], Laura et al. [6], Chidamparam et al. [7], et Auciello et al. [8] ont étudié le comportement dynamique d'une voie courbée. Cet élément de courbure est considéré comme un élément fini avec des conditions aux limites connus. L'analyse de vibration libres des poutres courbées a été largement étudiée par de nombreux chercheurs Den Hartog [9] a appliqué la méthode de Rayleigh-Ritz sur des arcs circulaires pour déterminer les fréquences naturelles. Kang et al. [10], ont présenté une étude concise sur la vibration couplée des poutres courbées, soit pour poutres libres ou chargées. Kang et al. [11] analyse le comportement de la poutre courbe en vibration libre basé sur la propagation d'onde pour en déduire les fréquences naturelles. Des discontinuités ayant des caractéristiques connues permettent d'analyser les vitesses de réflexion des ondes pour évaluer les champs proches. Kawakami et al. [12] ont étudiés l'analyse à la fois pour les vibrations libres en plan et en dehors du plan de poutres courbées avec des formes arbitraires et des sections transversales variables, en se basant sur la transformation de l'équation différentielle en équation intégrale en se basant sur une solution approximative de l'intégrale.

Une variété d'éléments a été présentée pour l'analyse dynamique des arcs circulaires et des poutres courbées modélisées comme poutres d'Euler parmi lesquels sont ceux des références [13,14]. Les équations du mouvement et des solutions de vibrations libres sont présentées d'abord ils ont utilisés une théorie simple [14]. Ensuite, les effets de l'inertie rotationnelle et de la déformation en cisaillement sont pris en compte [13].

Récemment, Shahba et al. [15] et Rajasekaran [16] étudient la vibration des poutres courbées à rayon variable en utilisant la méthode des éléments finis avec de nouvelles fonctions de forme. Wu, Lin, and Shaw [17] ont étudié la vibration en plan d'une poutre courbée avec divers éléments concentrés. Plus récemment, les études sur la théorie « poutre courbée » ont été appliquées à différentes applications, telles que les poutres composites courbées à rayon variable rapportées par Luu, Kim et Lee [18] et Ye et al. [19], les poutres minces rapportées par Sadeghpour et al [20].

La fonction de Green [21, 22], constitue une méthode assez générale de résolution des équations différentielles et est un moyen systématique de trouver précisément la solution particulière d'une équation différentielle.

Les méthodes approximatives sont des outils très utiles pour étudier les vibrations des poutres, telles que la matrice de rigidité dynamique, la superposition de modes et les méthodes de transformation différentielle. La méthode des fonctions de Green est plus efficace que ces méthodes, et même plus efficace que les méthodes de la série [23], car elle fournit des solutions exactes dans des formes fermées. Ceci est notamment essentiel pour calculer les contraintes dynamiques et déterminer la réponse dynamique des poutres.

Dans ce papier, nous nous intéressons à la détermination analytique de la fonction de Green associée à l'équation différentielle linéaire d'ordre 6 régissant le comportement vibratoire d'une poutre rail courbée et isolée. On utilise la méthode des résidus pour évaluer la fonction de Green, cette dernière est basée sur le transformé de fourrier, premièrement un transformé temporaire de l'équation différentielle, deuxièmement spatiale, et en fin un transformé de fourrier spatiale inverse.

## 2 Equation différentielle du mouvement

Nous considérons une poutre courbée sur un rayon  $R$  et d'angle  $\theta$ , d'une masse linéique  $m_l$ , et d'une raideur de flexion  $EI$  soumise à un chargement latérale  $P(\theta, t)$  perpendiculaire à l'axe neutre de la poutre, ce chargement est spatio-temporel, et la réponse en terme de déplacement latérales  $w(\theta, t)$  est une fonction de ces mêmes variables, comme indiquer dans la figure 1 :

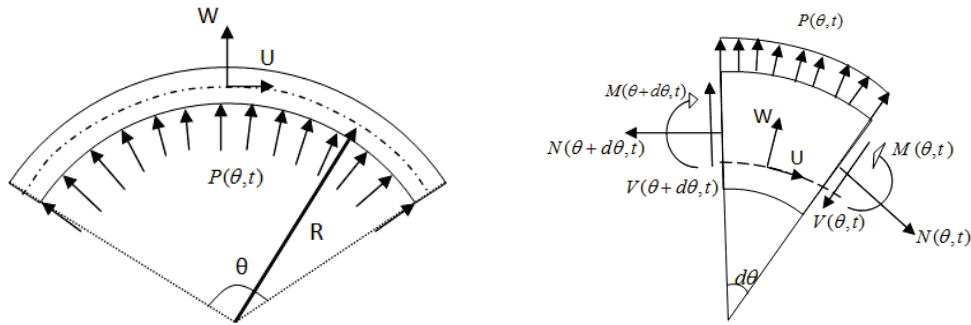


Fig. 1 – élément d'une poutre courbée

L'équation différentielle qui régit le comportement d'une poutre courbée sous charge latérale est déterminée (Annexe A) si l'on considère l'équilibre des forces et des moments qui agissent sur le segment élémentaire représenté à la figure 1 :

$$\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\rho \cdot A \cdot R^4}{EI} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - w) - \frac{R^4}{EI} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1)$$

Où :

$w$  : Le déplacement latéral.

$\rho$  : La masse volumique de la poutre

$A$  : La section transversale de la poutre.

Pour l'analyse des vibrations en fonction de la fréquence. On effectue une transformée de Fourier par rapport au temps.

$$\frac{d^6}{d\theta^6} W(\theta, \omega) + 2 \frac{d^4}{d\theta^4} W(\theta, \omega) + \frac{d^2}{d\theta^2} W(\theta, \omega) - k_b^4 R^4 \frac{d^2}{d\theta^2} W(\theta, \omega) + k_b^4 R^4 W(\theta, \omega) + \frac{R^4 \omega^2 \cdot e^{-i\theta\omega}}{EI} = 0 \quad (2)$$

La solution de cette équation est :

$$W(\theta, \omega) = \frac{R^4 \omega^2}{EI (k_b^4 R^4 - \omega^2 + k_b^4 R^4 \omega^2 + 2\omega^4 - \omega^6)} e^{i\theta\omega} + C_1 \cdot e^{\frac{\sqrt{\psi_1}}{\sqrt{6} \cdot \chi^{(1/3)}} \theta} + C_2 \cdot e^{\frac{\sqrt{\psi_1}}{\sqrt{6} \cdot \chi^{(1/3)}} \theta} + C_3 \cdot e^{\frac{-\sqrt{i \cdot \psi_2}}{\sqrt{12} \cdot \chi^{(1/6)}} \theta} + C_4 \cdot e^{\frac{\sqrt{i \cdot \psi_2}}{\sqrt{12} \cdot \chi^{(1/6)}} \theta} + C_5 \cdot e^{\frac{-\sqrt{i \cdot \psi_3}}{\sqrt{12} \cdot \chi^{(1/6)}} \theta} + C_6 \cdot e^{\frac{\sqrt{i \cdot \psi_3}}{\sqrt{12} \cdot \chi^{(1/6)}} \theta} \quad (3)$$

Où:

$$\chi = -180k_b^4 R^4 + 8 + 12\sqrt{3} \sqrt{-k_b^4 R^4 (8 - 71k_b^4 R^4 + 4k_b^8 R^8)}$$

$$\psi_1 = -4\chi^{1/3} + \chi^{2/3} + 4 + 12k_b^4 R^4$$

$$\psi_2 = 8i\chi^{1/3} + i\chi^{2/3} + 4i + 12ik_b^4 R^4 - \sqrt{3}\chi^{2/3} + 4\sqrt{3} + 12\sqrt{3}k_b^4 R^4$$

$$\psi_3 = 8i\chi^{1/3} + i\chi^{2/3} + 4i + 12ik_b^4 R^4 + \sqrt{3}\chi^{2/3} - 4\sqrt{3} - 12\sqrt{3}k_b^4 R^4$$

Pour la vibration libre le déplacement latéral s'écrit :

$$W(\theta, \omega) = C_1.e^{-\frac{\sqrt{\psi_1}}{\sqrt{6}.\chi^{(1/3)}}.\theta} + C_2.e^{\frac{\sqrt{\psi_1}}{\sqrt{6}.\chi^{(1/3)}}.\theta} + C_3.e^{-\frac{\sqrt{i.\psi_2}}{\sqrt{12}.\chi^{(1/6)}}.\theta} + C_4.e^{\frac{\sqrt{i.\psi_2}}{\sqrt{12}.\chi^{(1/6)}}.\theta} + C_5.e^{-\frac{\sqrt{i.\psi_3}}{\sqrt{12}.\chi^{(1/6)}}.\theta} + C_6.e^{\frac{\sqrt{i.\psi_3}}{\sqrt{12}.\chi^{(1/6)}}.\theta} \quad (4)$$

### 3 Calcul la fonction de Green

La transformé de Fourier spatiale de l'équation (2), donne :

$$(-\mu^6 + 2\mu^4 - \mu^2 + k_b^4 R^4 \mu^2 + k_b^4 R^4) \widehat{G}(\mu, \theta_0) + \frac{R^4 \mu^2 e^{-i\theta_0 \mu}}{EI} = 0 \quad (5)$$

Donc :

$$\widehat{G}(\mu, \theta_0) = -\frac{R^4 \mu^2 e^{-i\theta_0 \mu}}{EI(-\mu^6 + 2\mu^4 - \mu^2 + k_b^4 R^4 \mu^2 + k_b^4 R^4)} \quad (6)$$

Pour trouver la fonction de Green, on réalise une transformée de Fourier inverse de l'équation (6) :

$$G(\theta, \theta_0) = -\frac{R^4}{2\pi EI} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2 e^{-i\mu(\theta-\theta_0)}}{(-\mu^6 + 2\mu^4 - \mu^2 + k_b^4 R^4 \mu^2 + k_b^4 R^4)} d\mu \quad (7)$$

Il est impératif d'appliquer le théorème de résidu pour calculer l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2 e^{-i\mu(\theta-\theta_0)}}{(-\mu^6 + 2\mu^4 - \mu^2 + k_b^4 R^4 \mu^2 + k_b^4 R^4)} d\mu \quad (8)$$

La formule :

$$-\mu^6 + 2\mu^4 - \mu^2 + k_b^4 R^4 \mu^2 + k_b^4 R^4 \quad (9)$$

Est de la forme :

$$(\mu - a)(\mu + a)(\mu - b)(\mu + b)(\mu - c)(\mu + c) \quad (10)$$

Où : a, b, c, sont des solutions de l'équation (9) :

$$a = \pm \frac{\sqrt{\psi_1}}{\sqrt{6}.\chi^{(1/3)}} \quad (11)$$

$$b = \pm \frac{\sqrt{i.\psi_2}}{\sqrt{12}.\chi^{(1/6)}} \quad (12)$$

$$c = \pm \frac{\sqrt{i.\psi_3}}{\sqrt{12}.\chi^{(1/6)}} \quad (13)$$

Pour trouver l'intégrale dans (8), il faut trouver les résidus des : a, b, c :

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\mu=a} \left( \frac{\mu^2 e^{-i\mu(\theta-\theta_0)}}{(\mu^2 - a^2)(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)} \right) &= \text{Res}_{\mu=a} \left( \frac{\mu^2 e^{-i\mu(\theta-\theta_0)}}{(\mu^2 - a^2)(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)} \right) + \\ &+ \text{Res}_{\mu=a} \left( \frac{\mu^2 e^{-i\mu(\theta-\theta_0)}}{(\mu^2 - a^2)(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)} \right) + \text{Res}_{\mu=a} \left( \frac{\mu^2 e^{-i\mu(\theta-\theta_0)}}{(\mu^2 - a^2)(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

Le résidu de a :

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\mu=a} \left( \frac{\mu^2 e^{-i\mu(\theta-\theta_0)}}{(\mu^2 - a^2)(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)} \right) &= (\mu^2 - a^2) \lim_{\mu \rightarrow a} \left( \frac{\mu^2 e^{-i\mu(\theta-\theta_0)}}{(\mu^2 - a^2)(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)} \right) \\ \text{Res}_{\mu=a} \left( \frac{\mu^2 e^{-i\mu(\theta-\theta_0)}}{(\mu^2 - a^2)(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)} \right) &= \frac{a^2 e^{-i.a.(\theta-\theta_0)}}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \end{aligned} \quad (15)$$

Le résidu de b :

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\mu=b} \left( \frac{\mu^2 \cdot e^{-i\mu(\theta-\theta_0)}}{(\mu^2 - a^2)(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)} \right) &= (\mu^2 - b^2) \lim_{\mu \rightarrow b} \left( \frac{\mu^2 \cdot e^{-i\mu(\theta-\theta_0)}}{(\mu^2 - a^2)(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)} \right) \\ \operatorname{Res}_{\mu=b} \left( \frac{\mu^2 \cdot e^{-i\mu(\theta-\theta_0)}}{(\mu^2 - a^2)(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)} \right) &= \frac{b^2 \cdot e^{-i.b.(\theta-\theta_0)}}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} \end{aligned} \quad (16)$$

Le résidu de c :

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\mu=c} \left( \frac{\mu^2 \cdot e^{-i\mu(\theta-\theta_0)}}{(\mu^2 - a^2)(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)} \right) &= (\mu^2 - c^2) \lim_{\mu \rightarrow c} \left( \frac{\mu^2 \cdot e^{-i\mu(\theta-\theta_0)}}{(\mu^2 - a^2)(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)} \right) \\ \operatorname{Res}_{\mu=c} \left( \frac{\mu^2 \cdot e^{-i\mu(\theta-\theta_0)}}{(\mu^2 - a^2)(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)} \right) &= \frac{c^2 \cdot e^{-i.c.(\theta-\theta_0)}}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \end{aligned} \quad (17)$$

Donc :

$$\operatorname{Res} \left( \frac{\mu^2 \cdot e^{-i\theta_0 \mu}}{(\mu^2 - a^2)(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)} \right) = \frac{I.R^4 \left( -\frac{i.a^2 \cdot e^{-I.a.(\theta-\theta_0)}}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} - \frac{i.b^2 \cdot e^{-I.b.(\theta-\theta_0)}}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} - \frac{i.c^2 \cdot e^{-I.c.(\theta-\theta_0)}}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \right)}{EI} \quad (18)$$

On injecte les valeurs de a, b, et c dans cette équation, on trouve la fonction de Green :

$$G(\theta, \theta_0) = \frac{12i.R^4 \cdot \chi}{EI(2\psi_1 + \psi_2 \cdot \chi^{1/3})(2\psi_1 + \psi_3 \cdot \chi^{1/3})(\psi_1 - \psi_2)} \times \left[ \begin{aligned} &\left( (\psi_3 - \psi_2) \left( \frac{2\psi_1}{\chi^{1/3}} \right) \cdot e^{-\frac{i\sqrt{\psi_1}}{\sqrt{6} \cdot \chi^{1/3}} |\theta - \theta_0|} \right) + \\ &\left( (2\psi_1 + \psi_3 \cdot \chi^{1/3}) \left( \frac{\psi_2}{\chi^{1/3}} \right) \cdot e^{-\frac{\sqrt{\psi_2}}{\sqrt{12} \cdot \chi^{1/6}} |\theta - \theta_0|} \right) - \\ &\left( (2\psi_1 + \psi_2 \cdot \chi^{1/3}) \left( \frac{\psi_3}{\chi^{1/3}} \right) \cdot e^{-\frac{\sqrt{\psi_3}}{\sqrt{12} \cdot \chi^{1/6}} |\theta - \theta_0|} \right) \end{aligned} \right] \quad (19)$$

On sait que  $\theta = \frac{x}{R}$  donc, on peut écrire :

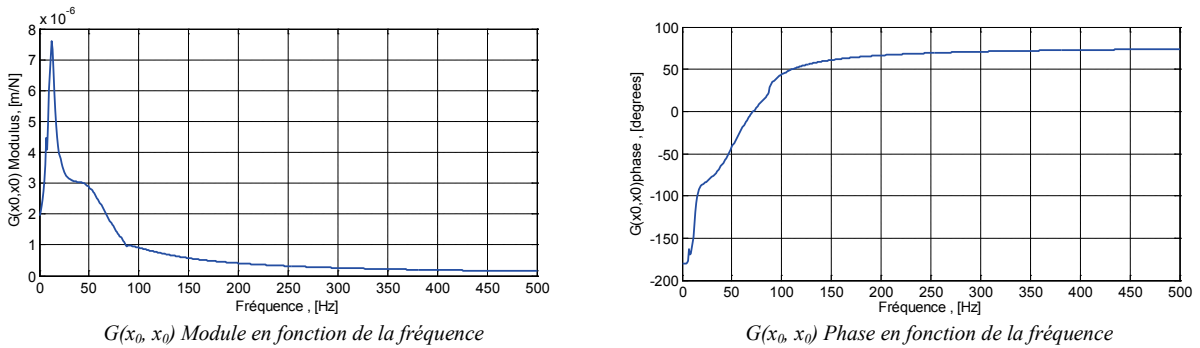
$$G(x, x_0) = \frac{12i.R^4 \cdot \chi}{EI(2\psi_1 + \psi_2 \cdot \chi^{1/3})(2\psi_1 + \psi_3 \cdot \chi^{1/3})(\psi_1 - \psi_2)} \times \left[ \begin{aligned} &\left( (\psi_3 - \psi_2) \left( \frac{2\psi_1}{\chi^{1/3}} \right) \cdot e^{-\frac{i\sqrt{\psi_1}}{R\sqrt{6} \cdot \chi^{1/3}} |x - x_0|} \right) + \\ &\left( (2\psi_1 + \psi_3 \cdot \chi^{1/3}) \left( \frac{\psi_2}{\chi^{1/3}} \right) \cdot e^{-\frac{\sqrt{\psi_2}}{R\sqrt{12} \cdot \chi^{1/6}} |x - x_0|} \right) - \\ &\left( (2\psi_1 + \psi_2 \cdot \chi^{1/3}) \left( \frac{\psi_3}{\chi^{1/3}} \right) \cdot e^{-\frac{\sqrt{\psi_3}}{R\sqrt{12} \cdot \chi^{1/6}} |x - x_0|} \right) \end{aligned} \right] \quad (20)$$

Pour valider notre démarche nous traitons un exemple d’une poutre-rail, ses paramètres physiques sont :

**Table 1 - Les paramètres physiques du rail**

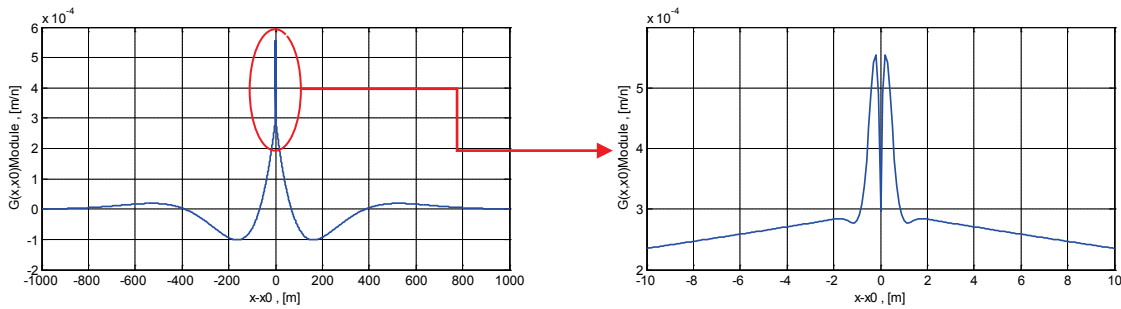
RAIL TYPE 60 KG UIC - E 1 (NORME DIN 5901)		
Hauteur	172	mm
Patin	150	mm
Boudin	72	mm
Masse linéique	60,21	kg/m
Moment d’inertie Ix	3055	cm <sup>4</sup>
Module d’inertie Iy	512	cm <sup>4</sup>
Section	76,86	cm <sup>2</sup>
Masse volumique	7870	kg/m <sup>3</sup>

L’évolution de réceptance  $G(x_0, x_0)$  en fonction de la fréquence est donnée dans la figure 2.

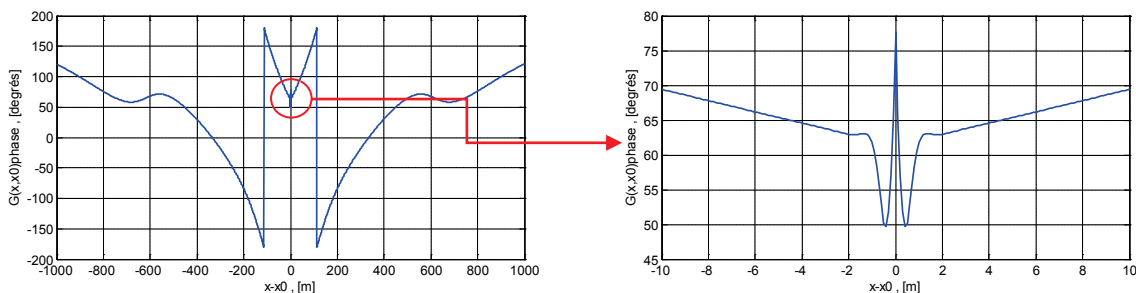


**Fig. 2 – Fonction de Green en fonction de la fréquence pour R=1m.**

L’évolution de réceptance  $G(x, x_0)$  module et phase en fonction de  $(x - x_0)$  pour la fréquence 500Hz et un rayon de 100m est donnée dans la figure 3 et la figure 4. L’effet de champ proche se fait sentir aux points de courbure et au voisinage de la courbe. Au-delà (dès 400 mètre de distance du point d’excitation) l’amplitude de la vibration reste constante.

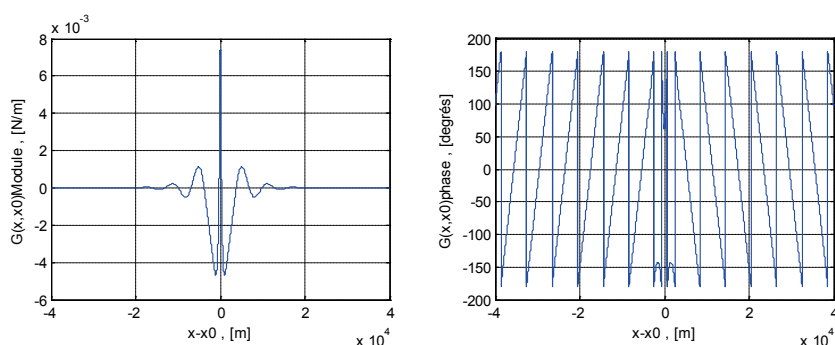


**Fig. 3 – Fonction de Green (Module) en fonction de  $(x-x_0)$ , pour la fréquence 500Hz, et un rayon de 100m.**

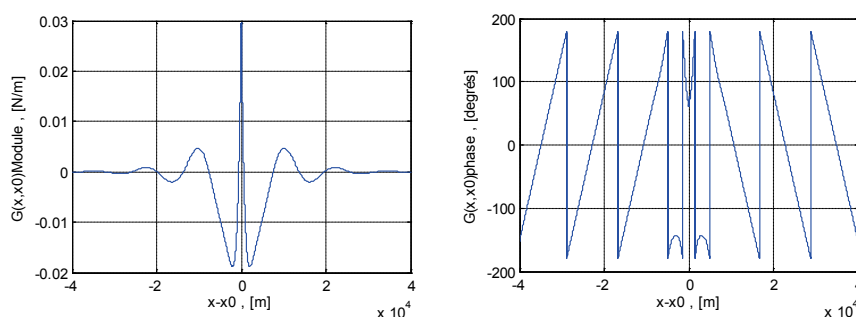


**Fig. 4 – Fonction de Green (Phase) en fonction de  $(x-x_0)$ , pour la fréquence 500Hz, et un rayon de 100m.**

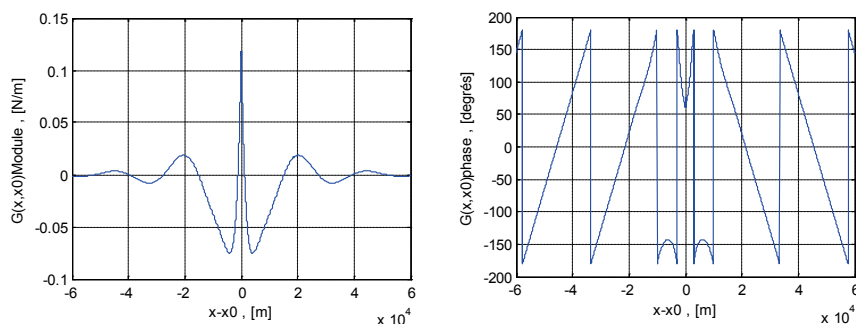
L'évolution de réceptance  $G(x, x_0)$  module et phase en fonction de  $(x - x_0)$  pour des rayons de 500 m, 1000 m, et 2000 m en fonction d'une fréquence de 500 Hz sont données dans les figures 5, 6, et 7 respectivement.



**Fig. 5 – Fonction de Green (Module et Phase) en fonction de  $(x-x_0)$ , pour la fréquence 500Hz, et un rayon de 500m.**



**Fig. 6 – Fonction de Green (Module et Phase) en fonction de  $(x-x_0)$ , pour la fréquence 500Hz, et un rayon de 1000m.**



**Fig. 7 – Fonction de Green (Module et Phase) en fonction de  $(x-x_0)$ , pour la fréquence 500Hz, et un rayon de 2000m.**

## 4 Conclusion

Les vitesses ainsi que les tonnages des trains sont en nette croissance et les forces générées par le mouvement des trains deviennent plus complexes à maîtriser dans le tracé curviligne. C'est dans ce contexte que notre étude s'inscrit dans la détermination de la fonction de Green lors de la circulation du train dans un tronçon courbé sous l'effet des forces latérales, qui sont dues à l'effet des forces centrifuges. Dans ce papier, la poutre rail est modélisée par une poutre Euler infinie courbée (cas des rails de chemin de fer), nous présentons une nouvelle approche pour la détermination de la fonction de Green qui décrit convenablement la physique du problème. Une transformée temporaire de l'équation différentielle est réalisée dans un premier temps, une deuxième transformée est obtenue par rapport à la variable spatiale. La fonction de Green est alors déterminée par l'évaluation de la transformée inverse après application du théorème des résidus. Une analyse paramétrique montre une amplification du module de la fonction de Green fonction de l'évolution du rayon de courbure.

## RÉFÉRENCES

- [1]- J.H. Michel, The Small Deformation of Curves and Surfaces with Application to the Vibrations of a Helix and a Circular Ring. *Messenger Math.* 19(1890) 68–76.
- [2]- A.E.H. Love, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. 4th Edition, Dover Publications, Inc., 1944.
- [3]- S. Timoshenko, Strength of Materials, Part II: Advanced Theory and Problem. 3rd Edition, Van Nostrand, 1963
- [4]- V.Z. Vlasov, Thin-Walled Elastic Beams. National Technical Information Service, 2<sup>nd</sup> Edition, 1984
- [5]- S. Markus, T. Nanasi, Vibrations of Curved Beams. *Shock Vib. Digest* 13(1981) 3–14.
- [6]- P.A.A. Laura, M.J. Maurizi, Recent Research on Vibrations of Arch-Type Structures. *Shock Vib. Digest* 19(1) (1987) 6–9.
- [7]- P. Childamparam, A.W. Leissa, Vibrations of Planar Curved Beams, Rings and Arches. *Appl. Mech. Rev.* 46(1993) 467–483. doi:10.1115/1.3120374
- [8]- N.M. Auciello, M.A. De Rosa, Free Vibrations of Circular Arches: A Review. *J. Sound Vib.* 174(4) (1994) 433–458. doi:10.1006/jsvi.1994.1388
- [9]- J.P. Den Hartog, Mechanical Vibrations. McGraw-Hill, New York, fourth edition, 1956
- [10]- C.-S. Chang, D.H. Hodges, Vibration Characteristics of Curved Beams. *J. Mech. Mater. Struct.* 4(4) (2009) 675–692. doi:10.2140/jomms.2009.4.675
- [11]- B. Kang, C.H. Riedel, C.A. Tan, Free vibration analysis of planar curved beams by wave propagation. *J. Sound Vib.* 260(1) (2003) 19–44. doi:10.1016/S0022-460X(02)00898-2
- [12]- M. Kawakami, T. Sakiyama, H. Matsuda, C. Morita, In-Plane and Out-of-Plane Free Vibrations of Curved Beams with Variable Sections. *J. Sound Vib.* 187(3) (1995) 381–401. doi:10.1006/jsvi.1995.0531
- [13]- S.S. Rao, Vibration of Continuous Systems. John Wiley & Sons, Inc., 2007. ISBN: 978-0-471-77171-5
- [14]- K.F. Graff, Wave Motion in Elastic Solids. Dover Publications, Inc., 1975.
- [15]- A. Shahba, R. Attarnejad, S.J. Semnani, New shape functions for non-uniform curved Timoshenko beam with arbitrarily varying curvature using basic displacement functions. *Meccanica* 48(1) (2013) 159–174. doi:10.1007/s11012-012-9591-9
- [16]- S. Rajasekaran, Analysis of curved beam using new differential transformation based curved beam element. *Meccanica* 49(4) (2014) 863–886. doi:10.1007/s11012-013-9835-3
- [17]- J.S. Wu, F.T. Lin, H.J. Shaw, Free in-plan vibration analysis of a curved beam (arch) with arbitrary various concentrated elements. *Appl. Math. Model.* 37(14-15) (2013) 7588–7610. doi:10.1016/j.apm.2013.02.029
- [18]- A.T. Luu, N.I. Kim, J. Lee, NURBS-based isogeometric vibration analysis of generally laminated deep curved beams with variable curvature. *Compos. Struct.* 119(2015) 150–165. doi:10.1016/j.compstruct.2014.08.014
- [19]- T. Ye, G. Jin, X. Ye, X. Wang, A series solution for the vibrations of composite laminated deep curved beams with general boundaries. *Compos. Struct.* 127(1) (2015) 450–465. doi:10.1016/j.compstruct.2015.03.020
- [20]- E. Sadeghpour, M. Sadighi, A. Ohadi, Free vibration analysis of a debonded curved sandwich beam. *Eur. J. Mech. A-Solids* 57(2016) 71–84. doi:10.1016/j.euromechsol.2015.11.006
- [21]- K. Watanabe, Integral Transform Techniques for Green's Function. *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, Vol. 71, Springer International Publishing, 2014. doi:10.1007/978-3-319-00879-0
- [22]- D.G. Duffy, Green's Functions with Applications. Second edition, Chapman and Hall/CRC, 2001.
- [23]- S.T. Mau, A.N. Williams, Green's function solution for arch vibration. *J. Eng. Mech.* 114(7) (1988) 1259–1264. doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(1988)114:7(1259)

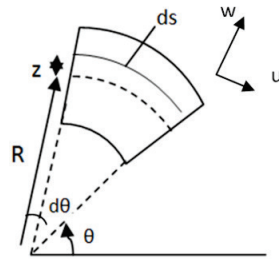
### Annexe A. Equation différentielle régissant le comportement vibratoire latéral d'une poutre courbée isolée chargée latéralement

Equation différentielle linéaire pour une poutre isolée courbée :

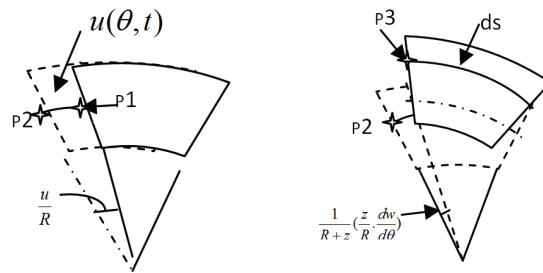
$$ds = (R + z)d\theta \quad (\text{A.1})$$



Avant déformation :



Après déformation :



$$\theta' = \theta + \frac{u}{R} - \frac{1}{R+y} \left( \frac{y}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \tag{A.2}$$

$$ds' = (R+y-w)d\theta' = (R+y-w) \left[ d\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta - \frac{1}{R+z} \frac{y}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \tag{A.3}$$

$$\varepsilon = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{1}{R+y} \left[ -w + \left(1 + \frac{y}{R}\right) \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{y}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \approx \frac{1}{R} \left[ -w + \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{y}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \tag{A.4}$$

D'après la loi de Hooke :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{A.5}$$

$$N = \int_A \varepsilon \cdot E \cdot dA = \frac{EA}{R} \left( w + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \tag{A.6}$$

$$M = \int_A \varepsilon \cdot E \cdot x \cdot dA = \frac{EI_x}{R^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \tag{A.7}$$

L'effort de l'inertie répartie radiale et tangentielle pour la section élémentaire d'une poutre courbée donnés ci-dessous :

$$m_l \cdot R \cdot d\theta \frac{\partial^2 u(\theta, t)}{\partial t^2} = \rho \cdot A \cdot R \cdot d\theta \frac{\partial^2 u(\theta, t)}{\partial t^2} \quad \text{Et} \quad m_l \cdot R \cdot d\theta \frac{\partial^2 w(\theta, t)}{\partial t^2} = \rho \cdot A \cdot R \cdot d\theta \frac{\partial^2 w(\theta, t)}{\partial t^2} \tag{A.8}$$

Donc la somme des forces pour les directions u et w :

$$-N + \left( N + \frac{\partial N}{\partial \theta} d\theta \right) \cos(d\theta) - \left( V + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta \right) \sin(d\theta) = \rho \cdot A \cdot R \cdot d\theta \frac{\partial^2 u(\theta, t)}{\partial t^2} \tag{A.9}$$

$$-V - P + \left( V + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta \right) \cos(d\theta) - \left( N + \frac{\partial N}{\partial \theta} d\theta \right) \sin(d\theta) = \rho \cdot A \cdot R \cdot d\theta \frac{\partial^2 w(\theta, t)}{\partial t^2} \tag{A.10}$$

Pour les petites angles de  $d\theta$  :  $\cos(d\theta) \approx 1$  et  $\sin(d\theta) \approx d\theta$

Donc :

$$-N + \left( N + \frac{\partial N}{\partial \theta} d\theta \right) - \left( V + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta \right) d\theta = \rho \cdot A \cdot R \cdot d\theta \frac{\partial^2 u(\theta, t)}{\partial t^2} \tag{A.11}$$

et

$$-V + P + \left( V + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta \right) - \left( N + \frac{\partial N}{\partial \theta} d\theta \right) d\theta = \rho \cdot A \cdot R \cdot d\theta \frac{\partial^2 w(\theta, t)}{\partial t^2} \tag{A.12}$$

La somme des moments :

$$M - (M + \frac{\partial M}{\partial \theta} d\theta) - (V + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta) R d\theta = 0 \quad (\text{A.13})$$

Ceci réduit à :

$$\frac{\partial N}{\partial \theta} - V = \rho.A.R. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} - N + p.R = \rho.A.R. \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} + R.V = 0 \quad (\text{A.16})$$

(A.16) →

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2} + R \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2} \quad (\text{A.17})$$

(A.14) →

$$\frac{\partial N}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial M}{\partial \theta} = \rho.A.R. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{A.18})$$

(A.15) →

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2} - N + p.R = \rho.A.R. \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{A.19})$$

$$ds = (R+z).d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{ds}{(R+z)} \approx \frac{ds}{R} \text{ (Parce que } z \ll R \text{)}$$

$$\frac{\partial N}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial M}{\partial s} = \rho.A. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{A.20})$$

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial s^2} - \frac{N}{R} + p = \rho.A. \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{A.21})$$

Nous injectons les équations (A.6) et (A.7) dans les équations (A.18) et (A.19) :

$$\frac{EI}{R^3} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (u + \frac{\partial w}{\partial \theta}) + \frac{EA}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (-w + \frac{\partial u}{\partial \theta}) - \rho.A.R. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$-\frac{EI}{R^3} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} (u + \frac{\partial w}{\partial \theta}) - \frac{EA}{R} (-w + \frac{\partial u}{\partial \theta}) - \rho.A.R. \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p.R = 0 \quad (\text{A.23})$$

Pour les petites quantités de  $\varepsilon$  :  $\frac{\partial u}{\partial \theta} = w$ . On trouve :

$$\frac{EI}{R^3} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (u + \frac{\partial w}{\partial \theta}) + \frac{EA}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (-w + \frac{\partial u}{\partial \theta}) - \rho.A.R. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.24})$$

L'équation (A.22) nous donne :

$$\frac{EI}{R^3} (\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3}) + \frac{EA}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (-w + w) - \rho.A.R. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.25})$$

(A.23) →

$$-\frac{EI}{R^3} (\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4}) - \frac{EA}{R} (-w + w) - \rho.A.R. \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p.R = 0 \quad (\text{A.26})$$

(A.25) →

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\rho.A.R^4}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.27})$$

(A.23) →

$$\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\rho.A.R^4}{EI} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} - \frac{R^4}{EI} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{A.28})$$

On additionne l'équation (A.27) avec l'équation (A.28), on trouve l'équation différentielle régissant le comportement vibratoire latéral d'une poutre courbée isolée chargée latéralement :

$$\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\rho.A.R^4}{EI} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - w) - \frac{R^4}{EI} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{A.29})$$