

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 330.46
JEL Classification: C51; C61

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ МЕХАНИЗМОВ ОБЪЕДИНЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2018 ДИЛЕНКО В. А., ОСИПОВ В. Н.

УДК 330.46
JEL Classification: C51; C61

Диленко В. А., Осипов В. Н.

Математическое моделирование некоторых механизмов объединения экономических систем

В статье обоснована актуальность, и намечены основные направления решения важнейших проблем объединения территориальных общин Украины, которое является одним из основных элементов реализуемой в стране реформы децентрализации. В рамках данной тематики для теоретического исследования возможных механизмов объединения экономических систем с целью их рационального выбора сформулированы простейшие математические модели процессов интеграции данных систем. Построенные модели являются определенным развитием известных математических моделей экономической динамики и оптимального экономического роста для случая функционирования двух экономических подсистем, имеющих некоторый общий механизм перераспределения между ними произведенного продукта. Причем указанный механизм может задаваться экзогенно или определяться в результате решения соответствующей математической задачи оптимального управления. Описанный экономико-математический инструментарий дает возможность на качественном уровне анализировать различные сценарии развития экономической системы при некоторых гипотетических механизмах ее формирования. Проведено численное и аналитическое исследование построенных моделей, которое позволило выявить возможные негативные моменты эволюции рассматриваемых систем, являющиеся следствием их объединения, например, несбалансированное развитие отдельных подсистем, релейная природа оптимального механизма их объединения, кардинальное изменение результатов объединения экономических систем при незначительном варьировании параметров их функционирования и т. п. В качестве перспективного направления развития полученных результатов может рассматриваться разработка экономико-математических приемов решения задачи определения рациональных механизмов объединения экономических систем для некоторых типичных условий их функционирования.

Ключевые слова: экономические системы, механизм объединения, математические модели, экономико-математический анализ.

Рис.: 4. Формул.: 19. Библ.: 9.

Диленко Виктор Алексеевич – доктор экономических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики и информационных технологий, Одесский национальный политехнический университет (просп. Шевченко, 1, Одесса, 65044, Украина)

E-mail: v.dilenko@gmail.com

ORCID: 0000-0002-3777-5358

Researcher ID: O-1704-2018

Осипов Владимир Николаевич – доктор экономических наук, профессор, старший научный сотрудник отдела межрегионального экономического развития Украинского Причерноморья, Институт проблем рынка и экономико-экологических исследований НАН Украины (Французский бульвар, 29, Одесса, 65044, Украина)

E-mail: osipovugkonver@gmail.com

ORCID: 0000-0003-1657-9849

УДК 330.46
JEL Classification: C51; C61

Діленко В. О., Осипов В. М. Математичне моделювання деяких механізмів об'єднання економічних систем

У статті обґрунтовано актуальність і намічені основні напрямки вирішення найважливіших проблем об'єднання територіальних громад України, яке є одним з основних елементів реалізованої у країні реформи децентралізації. В рамках цієї тематики для теоретичного дослідження можливих механізмів об'єднання економічних систем з метою їх раціонального вибору сформульовані найпростіші математичні моделі процесів інтеграції цих систем. Побудовані моделі є певним розвитком відомих математичних моделей економічної динаміки й оптимального економічного зростання для випадку функціонування двох економічних підсистем, що мають певний спільний механізм перерозподілу між ними виробленого продукту. Причому зазначений механізм може задаватися екзогенно або визначатися в результаті рішення відповідної математичної задачі оптимального управління.

UDC 330.46
JEL Classification: C51; C61

Dilenko V. O., Osipov V. M. The Mathematical Modeling of Some Mechanisms for Integrating Economic Systems

The article substantiates the urgency, and outlines the main directions for solving the most important problems of uniting the territorial communities of Ukraine, which is one of the main elements of the decentralization reform implemented in the country. Within the scope of this topic, there formulated the simplest mathematical models of the processes of integrating economic systems, to conduct a theoretical study of possible mechanisms for integrating economic systems for the purpose of their rational choice. The constructed models present a definite development of well-known mathematical models of economic dynamics and optimal economic growth for the case of the functioning of two economic subsystems that have some common mechanism of redistribution of the produced product between them. It should be noted that this mechanism can be set exogenously or determined as a result of solving the corresponding mathematical problem of optimal control. The described

Описаний економіко-математичний інструментарій дає можливість на якісному рівні аналізувати різні сценарії розвитку економічної системи при деяких гіпотетичних механізмах її формування. Проведено чисельне й аналітичне дослідження побудованих моделей, яке дозволило виявити можливі негативні моменти еволюції розглянутих систем, які є наслідком їх об'єднання, наприклад, незбалансований розвиток окремих підсистем, релейний характер оптимального механізму їх об'єднання, кардинальна зміна результатів об'єднання економічних систем при незначному варіюванні параметрів їх функціонування тощо. Як перспективний напрям розвитку отриманих результатів може розглядатися розробка економіко-математичних прийомів розв'язання задачі визначення раціональних механізмів об'єднання економічних систем для типових умов їх функціонування.

Ключові слова: економічні системи, механізм об'єднання, математичні моделі, економіко-математичний аналіз.

Рис.: 4. **Формул:** 19. **Бібл.:** 9.

Діленко Віктор Олексійович – доктор економічних наук, доцент, професор кафедри прикладної математики та інформаційних технологій, Одеський національний політехнічний університет (просп. Шевченка, 1, Одеса, 65044, Україна)

E-mail: v.dilenko@gmail.com

ORCID: 0000-0002-3777-5358

Researcher ID: O-1704-2018

Осіпов Володимир Миколайович – доктор економічних наук, професор, старший науковий співробітник відділу міжрегіонального економічного розвитку Українського Причорномор'я, Інститут проблем ринку та економіко-екологічних досліджень НАН України (Французький бульвар, 29, Одеса, 65044, Україна)

E-mail: osipovugkonver@gmail.com

ORCID: 0000-0003-1657-9849

economic and mathematical tools make it possible to analyze, at a qualitative level, various scenarios for the development of an economic system at functioning of certain hypothetical mechanisms of its formation. A numerical and analytical study of the constructed models was carried out, which made it possible to identify possible negative moments in the evolution of the systems under consideration that are a consequence of their unification, for example, the unbalanced development of individual subsystems, the relay nature of the optimal mechanism for their unification, a dramatic change in the results of the unification of economic systems with a slight variation in the parameters of their functioning, etc. A promising direction for the development of the results obtained can be elaborating economic and mathematical methods to solve the problem of determining rational mechanisms for combining economic systems for some typical conditions of their functioning.

Keywords: economic systems, integration mechanism, mathematical models, economic and mathematical analysis.

Fig.: 4. **Formulae:** 19. **Bibl.:** 9.

Dilenko Viktor O. – Doctor of Science (Economics), Associate Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Information Technologies, Odesa National Polytechnic University (1 Shevchenko Ave., Odessa, 65044, Ukraine)

E-mail: v.dilenko@gmail.com

ORCID: 0000-0002-3777-5358

Researcher ID: O-1704-2018

Osipov Volodymyr M. – Doctor of Science (Economics), Professor, Senior Research Fellow of the Department of Interregional Economic Development of the Ukrainian Black Sea Region, Institute of Market Problems and Economic-Ecological Research of NAS of Ukraine (29 Frantsuzkyi Blvd., Odessa, 65044, Ukraine)

E-mail: osipovugkonver@gmail.com

ORCID: 0000-0003-1657-9849

Введение. Характерной чертой современной мировой экономики является ее глобализация, ядром которой выступают интеграционные процессы. Для Украины значимость данных процессов существенно возрастает в связи с реформой децентрализации, предполагающей решение задач объединения территориальных общин [9].

Для достижения эффективного и устойчивого развития объединения территориальных образований крайне необходима разработка долгосрочных стратегических документов, определяющих векторы социального, экономического и, что не менее важно в последнее время, экологического развития. В условиях децентрализации основная нагрузка стратегического планирования ложится на местный или базовый уровень. Однако существует иерархия стратегий социо-эко-экологического развития территориальных образований, в которой стратегия высшего уровня должна базироваться на стратегии низшего. Региональная политика в условиях децентрализации управления должна быть ориентирована на обеспечение экономической самодостаточности территориальных общин и разработку стратегий их устойчивого развития, в частности:

- достижения баланса централизации и децентрализации власти через обеспечение наиболее эффективного приспособления институтов – государства и громады – к условиям развития страны, то есть через механизмы гибкой децентрализации и многоуровневого управления;

- согласования приоритетов социально-экономического развития страны, задекларированных в стратегических документах национального уровня, Государственной стратегии регионального развития и региональных стратегиях, что позволит повысить эффективность их реализации, обеспечит консолидацию усилий всех уровней власти на решении проблем территориального развития и будет способствовать согласованию интересов государства, региона, территориальной общины;
- совершенствования методики разработки стратегий различных уровней, которая обеспечила бы возможности их сравнения, оценки и соответственно максимального использования конкурентных преимуществ данных территорий;
- обновления инструментов механизма преодоления диспропорций развития территорий и стимулирования их экономической активности, действие которых должно быть направлено на развитие государственно-частного партнерства, повышение их инвестиционной привлекательности и конкурентоспособности на внутреннем и внешних рынках;
- повышения роли местной власти в условиях проведения административно-территориальной реформы и налаживания взаимодействия

государственных администраций и органов местного самоуправления в диалоге с бизнесом и территориальными громадами;

- обеспечения эффективности использования программных средств путем установления четких критериев распределения и освоения этих средств;
- возрастания роли Агентств регионального развития в совместной подготовке с руководством общины документов по участию в тендерных мероприятиях по получению программных финансов из Государственного бюджета, международных грантов и технической помощи на реализацию инфраструктурных проектов на региональном и базовых уровнях;
- нормирования на законодательном уровне всех форм государственно-частного партнерства, что будет способствовать активизации экономической деятельности на уровне регионов и территориальных общин;
- улучшения кадрового обеспечения системы региональной и местной власти, в частности, в сфере территориального стратегирования, проектирования и планирования.

Реализация стратегии устойчивого развития объединенных территориальных общин должна обеспечить экономическую самодостаточность и экономический рост в условиях изменчивого рынка.

Планируется, что именно на уровне объединения территориальных общин, сформировавшихся в результате внедрения законов Украины «О добровольном объединении территориальных общин» и «О сотрудничестве территориальных общин», будут созданы улучшенные условия для повышения уровня и качества жизни территориальной общины, обеспечения надлежащего уровня предоставления публичных услуг, эффективной работы предприятий и производства ими конкурентоспособных продуктов (товаров, технологий, услуг), что, в свою очередь, соответствует требованиям по формированию самодостаточной территориальной общины.

Территориальная община в стране является базовым обществообразовательным элементом, основным стержнем местного самоуправления. От ее качественных характеристик, эффективности, способности решать вопросы местного значения зависит общий прогресс общества, государства. Однако законодательно закрепленное в Конституции страны право территориальной общины – жителей села или добровольного объединения в сельскую общину жителей нескольких сел, поселка и города – самостоятельно решать вопросы местного значения в рамках Конституции и законов страны в большинстве территориальных общин остается еще нереализованным.

Административно-территориальное устройство Украины представлено 30 475 объектами, из которых 24 области, 490 районов и 178 городов областного значения; 10278 сельских советов, объединяющих 28498 сел. Во многих территориальных общинах отсутствуют бюджетные учреждения, коммунальные предприятия и предпринимательские структуры, поэтому местный совет таких территориальных общин фактически не может реализо-

вать представленные ему законом полномочия и обеспечить экономическую самодостаточность.

Отмеченные выше насущная потребность и сложность решения комплекса проблем объединения территориальных общин в Украине, активизация интеграционных процессов мировой экономики в целом делает актуальным использование возможностей экономико-математических методов для теоретического и прикладного исследования различных аспектов объединения экономических систем.

К настоящему времени уже имеется целый ряд публикаций, посвященных данной тематике. При этом основным направлением исследований, как в экономических [7], так и в экономико-математических работах, является разработка методов оценки тех или результатов объединения экономических систем различного уровня – математических моделей определения показателей соответствующих экономических эффектов [3; 6] и эффективности функционирования интегрированных систем [1], степени интенсивности их взаимодействия [4], обобщенных показателей интеграционных рисков [8] и т. п. Вместе с тем такому важному аспекту исследования интеграционных процессов, как анализ альтернативных механизмов объединения экономических систем, внимание практически не уделяется.

Целью работы является разработка экономико-математических подходов к решению задачи исследования и рационального выбора возможных механизмов объединения экономических систем на основе использования известных моделей экономической динамики.

Основные результаты исследования. Будем рассматривать процессы объединения на примере двух экономических систем, функционирование каждой из которых описывается моделью экономической динамики Р. Солоу [5, с. 105–107]:

$$\begin{aligned} \frac{dK_1}{dt} &= s_1 P_1(t) - \gamma_1 K_1(t), \\ \frac{dK_2}{dt} &= s_2 P_2(t) - \gamma_2 K_2(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $K_1(t), K_2(t)$ – величины производственных фондов экономических систем,

γ_1, γ_2 – коэффициенты их выбытия;

$P_1(t), P_2(t)$ – объемы производства рассматриваемых систем (задаются производственными функциями Кобба-Дугласа),

s_1, s_2 – параметры, определяющие долю произведенного продукта, направляемого на прирост и компенсацию выбытия производственных фондов.

Одним из важнейших аспектов интеграции экономик является перераспределение их суммарного продукта, направляемого на развитие анализируемых экономических систем, с целью улучшения социально-экономических результатов в рамках их совместной деятельности. Тогда функционирование объединенных таким образом двух экономических систем может быть описано следующей системой двух дифференциальных уравнений, являющихся модификациями уравнений модели Солоу (1):

$$\begin{cases} \frac{dK_1}{dt} = A(t)(s_1 P_1(t) + s_2 P_2(t)) - \gamma_1 K_1(t), \\ \frac{dK_2}{dt} = (1 - A(t))(s_1 P_1(t) + s_2 P_2(t)) - \gamma_2 K_2(t), \end{cases} \quad (2)$$

Множитель $A(t)$ в системе уравнений (2) определяет механизм распределения произведенного и направляемого на экономическое развитие продукта между объединяемыми экономическими системами. Возможны различные варианты задания указанного механизма. Приведем некоторые из них, которые представляются вполне естественными способами указанного распределения:

- пропорционально исходным величинам производственных фондов объединяемых систем $K_1(0), K_2(0)$:

$$A_1(t) = \frac{K_1(0)}{K_1(0) + K_2(0)}, \quad (3)$$

- пропорционально текущим значениям величин производственных фондов $K_1(t), K_2(t)$:

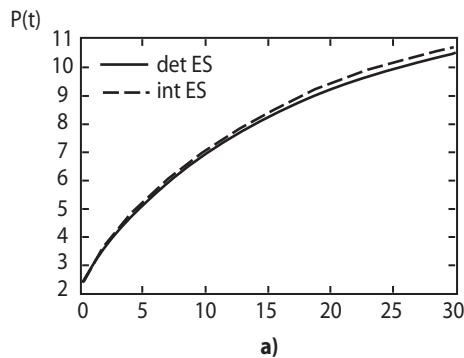
$$A_2(t) = \frac{K_1(t)}{K_1(t) + K_2(t)}, \quad (4)$$

- пропорционально исходным величинам продукции, производимой рассматриваемыми экономическими системами $P_1(0), P_2(0)$:

$$A_3(t) = \frac{P_1(0)}{P_1(0) + P_2(0)}, \quad (5)$$

- пропорционально текущим величинам производимой продукции $P_1(t), P_2(t)$:

$$A_4(t) = \frac{P_1(t)}{P_1(t) + P_2(t)}. \quad (6)$$



Возможно задавать и не столь очевидные механизмы распределения произведенного продукта. Например, распределение пропорционально значениям коэффициентов эластичности производственных фондов, используемых в рассматриваемых моделях производственных функций (параметры α_1, α_2 функций Кобба-Дугласа для соответствующих экономик), т. к. данные коэффициенты являются некоторыми показателями эффективности применяемых технологий:

$$A_5(t) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (7)$$

Математические модели (1), (2) позволяют анализировать на качественном уровне особенности развития экономических систем как в случае их самостоятельного функционирования, так и для тех или иных условий совместной деятельности. С этой целью при гипотетических значениях параметров рассматриваемых экономик было проведено численное решение дифференциальных уравнений (1), (2), описывающих различные способы их объединения (3) – (7). Приведем некоторые из полученных результатов, которые представлены на графиках рис. 1–4 (сплошная линия отвечает суммарному показателю функционирования отдельных экономических систем, пунктирная – при их объединении).

Графики рис. 1 показывают, что результаты функционирования объединенной экономической системы определяющим образом зависят от применяемого механизма интеграции экономик. Объединение экономических систем

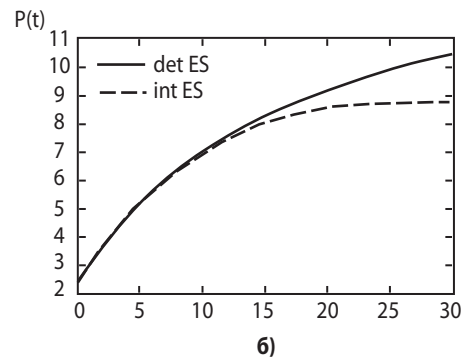


Рис. 1. Динамика суммарного производства отдельных и объединенных экономических систем при (а) $A(t) = A_3(t)$ и (б) $A(t) = A_2(t)$

с использованием механизма $A_3(t)$ позволяет получить позитивный эффект интеграции (суммарный объем производства объединенных систем превышает аналогичный показатель для случая их отдельного функционирования). Если же применяется способ объединения $A_2(t)$, то имеем противоположный результат – объединенная система является менее производительной по сравнению с функционированием рассматриваемых систем в отдельности.

При этом следует учитывать, что рост суммарных объемов производства при объединении экономических систем может сопровождаться ухудшением показателей функционирования одной из них. Данную ситуацию иллюстрируют графики рис. 2, на которых видно, что в случае объединения вторая экономическая система снижает темпы своего развития.

Рассмотрим влияние параметров объединяемых систем на результаты их совместной работы. С этой целью изменим значение параметра одной из экономических систем (в данном конкретном случае коэффициент эластичности производственных фондов с 0,6 на 0,75). Соответствующие результаты моделирования функционирования экономик представлены на рис. 3.

Из данного графика следует, что относительно небольшие изменения параметров экономических систем могут приводить к кардинальному изменению первоначальных результатов их объединения (представлены на рис. 1а), а именно – интеграция экономик на основе использования выбранного механизма объединения становится нецелесообразной. Это означает, что в общем случае недопустимо априори тиражировать механизм объедине-

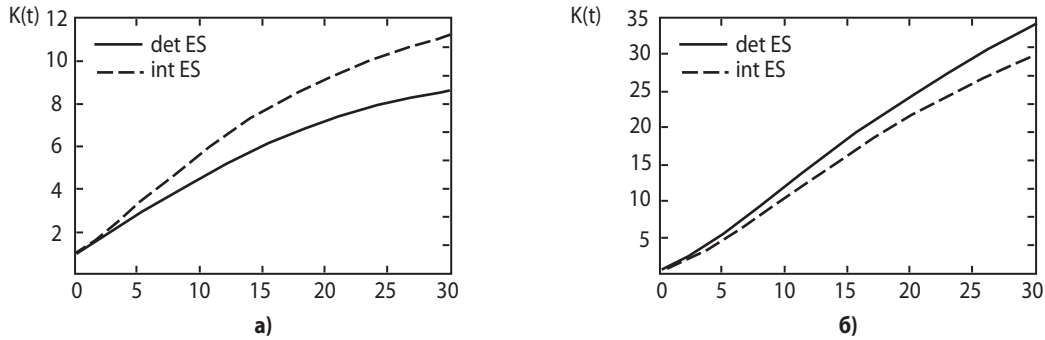


Рис. 2. Динамика величины производственных фондов (а) – $K_1(t)$ и (б) – $K_2(t)$ для отдельных и объединенных экономических систем при $A(t) = A_3(t)$

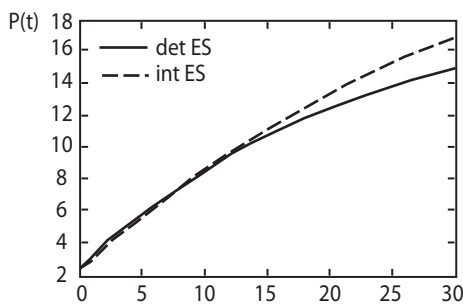


Рис. 3. Динамика суммарного производства отдельных и объединенных экономических систем при $A(t) = A_3(t)$

ния, который показал свою эффективность для некоторых систем, на другие экономические системы.

Еще один возможный негативный сценарий объединения экономических систем иллюстрируют графики рис. 4.

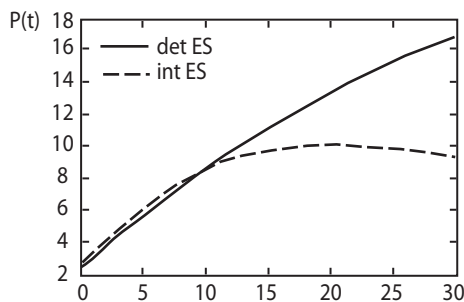


Рис. 4. Динамика суммарного производства отдельных и объединенных экономических систем при $A(t) = A_2(t)$

При некоторых параметрах экономических систем их объединение посредством определенного механизма может быть экономически эффективным только на начальном этапе, а в дальнейшем значительно уступать общим результатам производства рассматриваемых систем в условиях их независимого функционирования. Таким образом, демонстрируемые положительные результаты объединения экономических систем в течение некоторого ограниченного периода не гарантируют наличия аналогичного экономического эффекта интеграции в долгосрочной перспективе.

Таким образом, численное исследование математических моделей (1)–(7) показало, что получение простого универсального решения задачи рационального объединения экономических систем посредством экзогенного задания некоторых гипотетических интеграционных механизмов затруднительно. Поэтому далее рассмотрим оптимизационную модель, в которой способ объединения экономик формируется эндогенно. С этой целью обобщим известную математическую модель оптимального экономического роста [2, с. 59–64] на случай совместного функционирования двух экономических систем.

$$\int_0^T (y_1(t) + y_2(t) - u_1(t) - u_2(t)) dt \rightarrow \max, \quad (8)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{B_1} u_1(t), \quad y_1(0) = y_1^0, \quad (9)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{1}{B_2} u_2(t), \quad y_2(0) = y_2^0, \quad (10)$$

$$u_1(t) + u_2(t) \leq y_1(t) + y_2(t), \quad (11)$$

$$0 \leq u_1(t), 0 \leq u_2(t). \quad (12)$$

Экономико-математическая модель (8)–(12) представляет собой задачу оптимального управления, в которой фазовыми координатами являются величины доходов $y_1(t), y_2(t)$, а управляющими параметрами – инвестиции в развитие производства $u_1(t), u_2(t)$ объединяемых экономических систем, коэффициенты B_1, B_2 интерпретируются как капиталоемкости прироста доходов. Соответственно $c_1(t) = y_1(t) - u_1(t)$ и $c_2(t) = y_2(t) - u_2(t)$ – непроизводственное потребление в рассматриваемых системах. Целевой функционал (8) отвечает критерию максимума суммарного непроизводственного потребления за анализируемый период времени $[0, T]$.

В рамках данной модели вид искомым функций $u_1(t), u_2(t)$ и будет определять оптимальный механизм объединения экономических систем, поведение которых описывается дифференциальными уравнениями (9), (10). В содержательном плане выбор функций $u_1(t), u_2(t)$ представляет собой, как и в предыдущей модели, способ распределения суммарного дохода систем при их интеграции. Причем конкретный вид этих функций определяют не только способ распределение инвестиций на развитие производства между отдельными экономическими системами, но и соответственно величину непроизводственного потребления.

Для решения задачи (8)–(12) будем использовать принцип максимума. Функция Гамильтона для нее имеет вид

$$H = y_1(t) + y_2(t) - u_1(t) - u_2(t) + \psi_1(t) \frac{1}{B_1} u_1(t) + \psi_2(t) \frac{1}{B_2} u_2(t), \quad (13)$$

где $\psi_1(t), \psi_2(t)$ – соответствующие сопряженные переменные.

Из дифференциальных уравнений для сопряженных переменных:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{dH}{dy_1} = -1, \quad \psi_1(T) = 0, \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{dH}{dy_2} = -1, \quad \psi_2(T) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= T - t, \\ \psi_2(t) &= T - t. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда функция Гамильтона (13) приобретает вид:

$$H = y_1(t) + y_2(t) - u_1(t) \left[\frac{1}{B_1} (T-t) - 1 \right] - u_2(t) \left[\frac{1}{B_2} (T-t) - 1 \right]. \quad (16)$$

Рассмотрим особенности решения рассматриваемой задач для всех возможных вариантов соотношения параметров модели B_1, B_2, T (полагая для определенности $B_1 > B_2$).

Пусть $T < B_2$.

Тогда $(T-t) \frac{1}{B_1} - 1 < 0$ и $(T-t) \frac{1}{B_2} - 1 < 0$ при $t \in [0, T]$.

Поэтому согласно принципу максимума для оптимального решения задачи (8)–(12) $u_1^*(t) = 0, u_2^*(t) = 0$ и соответственно $y_1^*(t) = y_1^0, y_2^*(t) = y_2^0, c_1^*(t) = y_1^*(t), c_2^*(t) = y_2^*(t)$. Это означает, что объединение систем, по сути, является формальным, т. к. они фактически функционируют без взаимодействия. Причем весь генерируемый доход направляется на непроизводственное потребление, т. е. развития экономических систем не происходит, и они продолжают функционировать на исходном уровне y_1^0, y_2^0 .

Случай $B_2 < T < B_1$. Из условия максимума функции Гамильтона (16) по управляющим параметрам при указанном соотношении значений параметров модели B_1, B_2, T получаем:

$$\begin{aligned} u_1^*(t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u_2^*(t) &= \begin{cases} y_1(t) + y_2(t), & 0 \leq t < T - B_2, \\ 0, & T - B_2 < t \leq T. \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда из системы дифференциальных уравнений (9), (10):

$$\begin{aligned} y_1^*(t) &= y_1^0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ y_2^*(t) &= \begin{cases} (y_1^0 + y_2^0) e^{\frac{1}{B_2} t} - y_1^0, & 0 \leq t < T - B_2, \\ (y_1^0 + y_2^0) e^{\frac{T-B_2}{B_2}} - y_1^0, & T - B_2 < t \leq T \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

и соответственно функции непроизводственного потребления имеют вид:

$$\begin{aligned} c_1^*(t) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq t < T - B_2, \\ y_1^0, & T - B_2 < t \leq T, \end{cases} \\ c_2^*(t) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq t < T - B_2, \\ (y_1^0 + y_2^0) e^{\frac{T-B_2}{B_2}} - y_1^0, & T - B_2 < t \leq T. \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, оптимальный механизм объединения рассматриваемых экономических систем в данном случае состоит в следующем: на начальном интервале времени $0 \leq t < T - B_2$ весь произведенный системами доход направляется на развитие только второй из них (соответственно первая продолжает работать на начальном уровне y_1^0), далее при $T - B_2 < t \leq T$ доход, генерируемый в единицу времени обеими системами суммарным объемом $y_1^*(t) + y_2^*(t) = (y_1^0 + y_2^0) e^{\frac{T-B_2}{B_2}}$, используется только на непроизводственное потребление.

Можно показать, что при $B_1 < T$ для оптимального решения задачи (8)–(12) выполняются соотношения (17)–(19), т. е. и в этом случае оптимальный механизм объединения рассматриваемых экономических систем тот же, что и при $B_2 < T < B_1$.

Случай $B_1 = B_2 = B$. Для данной ситуации из анализа функции (16) следует, что при $t > T - B$ $u_1^*(t) = 0, u_2^*(t) = 0$, а для $t < T - B$ в качестве $u_1^*(t), u_2^*(t)$ могут быть выбраны такие $u_1(t), u_2(t)$, которые удовлетворяют условиям (12) и $u_1(t) + u_2(t) = y_1(t) + y_2(t)$. В частности, этим требованиям отвечают функции $u_1(t) = 0, u_2(t) = y_1(t) + y_2(t)$ или $u_1(t) = y_1(t) + y_2(t), u_2(t) = 0$, которые приводят к решению вида (17)–(19). Еще одним характерным вариантом является $u_1(t) = y_1(t), u_2(t) = y_2(t)$, что в прикладном плане соответствует случаю, когда анализируемые экономические системы функционируют без взаимодействия, т. е. объединительные процессы фактически отсутствуют.

В целом анализ оптимизационной модели (8)–(12) дает ожидаемый результат, суть которого состоит в следующем: при объединении экономических систем все имеющиеся ресурсы данных систем должны направляться (на соответствующем интервале времени $0 \leq t < T - B_2$ при $B_2 < T$) на развитие той из них, которая обладает более эффективными производственными процессами. В рамках построенной модели показателями эффективности функционирования рассматриваемых систем являются величины $\frac{1}{B_1}, \frac{1}{B_2}$.

Кроме того, необходимо отметить, что релейный характер полученного оптимального решения, являясь корректным результатом в математическом плане, не отвечает естественным требованиям комплексного и сбалансированного социально-экономического развития объединяемых экономических систем. При любых соотношениях значений параметров данных систем после их объединения согласно рассматриваемой модели может развиваться только одна из них (у которой коэффициент капиталоемкости меньше), вторая система сохраняет исходное состояние.

Выводы. Таким образом, в настоящей работе обоснована актуальность, и намечены основные направления решения проблем объединения территориальных общин Украины. Для теоретического исследования возможных механизмов объединения экономических систем построены простейшие математические модели процессов их интеграции. Описанный экономико-математический инструментарий позволяет в первом приближении и на качественном уровне анализировать сценарии развития экономической системы при некоторых гипотетических механизмах ее формирования как экзогенной, так и эндогенной природы, идентифицировать возможные негативные моменты экономической динамики рассматриваемых систем, являющиеся следствием их объединения. Актуальным направлением дальнейших исследований в данной области представляется разработка экономико-математических приемов решения задачи определения рациональных механизмов объединения систем для типичных условий их функционирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вдовиченко Е. А. Модель оценки эффективности интеграционных процессов экономических систем. *Современные технологии управления*. 2013. № 9 (33). URL: <http://sovman.ru/article/3302/>
2. Гранберг А. Г. Динамические модели народного хозяйства. М.: Экономика, 1985. 240 с.
3. Диленко В. А., Сабодаш Е. Л. Математическое моделирование интеграции экономик. *Бизнес Информ*. 2014. № 8. С. 78–82.
4. Кашинцев Н. П., Миронов А. В. Моделирование интеграционных процессов в экономике. *Проблемы развития территории*. 2015. № 3 (77). С. 42–52.
5. Колемаев В. А. Математическая экономика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. 399 с.
6. Кондрашова Н. А. Использование экономико-математических методов для оценки результатов функционирования консолидированных групп взаимосвязанных организаций. *Экономика, статистика и информатика*. 2015. № 2. С. 185–189.
7. Растворцева С. Н., Лебедев А. О. Развитие методов оценки факторов и форм межрегиональной экономической интеграции. М.: Экон-Информ, 2016. 213 с.
8. Сидорова Е. Ю. Экономико-математическое моделирование экономических интеграционных рисков с помощью инструментов государственного регулирования на различных этапах реализации международной экономической интегра-

ции (на примере Евразийского экономического союза). *Вестник БИСТ*. 2017. № 1 (43). С. 7–13.

9. Територіальна громада як базова ланка адміністративно-територіального устрою України: проблеми та перспективи реформування. Київ: НІСД, 2016. 61 с.

REFERENCES

- Dilenko, V. A., and Sabodash, Ye. L. "Matematicheskoye modelirovaniye integratsii ekonomik" [Mathematical modeling of integration of economies]. *Biznes Inform*, no. 8 (2014): 78-82.
- Granberg, A. G. *Dinamicheskiye modeli narodnogo khozyaystva* [Dynamic models of the national economy]. Moscow: Ekonomika, 1985.
- Kashintsev, N. P., and Mironov, A. V. "Modelirovaniye integratsionnykh protsessov v ekonomike" [Modeling of integration processes in the economy]. *Problemy razvitiya territorii*, no. 3 (77) (2015): 42-52.
- Kolemayev, V. A. *Matematicheskaya ekonomika* [Mathematical Economics]. Moscow: YUNITI-DANA, 2002.
- Kondrashova, N. A. "Ispolzovaniye ekonomiko-matematicheskikh metodov dlya otsenki rezultatov funktsionirovaniya konsolidirovannykh grupp vzaimosvyazannykh organizatsiy" [Use of economic and mathematical methods for assessing the performance of consolidated groups of interrelated organizations]. *Ekonomika, statistika i informatika*, no. 2 (2015): 185-189.
- Rastvortseva, S. N., and Lebedev, A. O. *Razvitiye metodov otsenki faktorov i form mezhregionalnoy ekonomicheskoy integratsii* [Development of methods for assessing the factors and forms of interregional economic integration]. Moscow: Ekon-Inform, 2016.
- Sidorova, E. Yu. "Ekonomiko-matematicheskoye modelirovaniye ekonomicheskikh integratsionnykh riskov s pomoshchyu instrumentov gosudarstvennogo regulirovaniya na razlichnykh etapakh realizatsii mezhdunarodnoy ekonomicheskoy integratsii (na primere Evraziyskogo ekonomicheskogo soyuza)" [Economic and mathematical modeling of economic integration risks through instruments of state regulation at various stages of the implementation of international economic integration (on the example of the Eurasian Economic Union)]. *Vestnik BIST*, no. 1 (43) (2017): 7-13.
- Terytorialna hromada yak bazova lanka administrativno-terytorialnoho ustroiu Ukrainy: problemy ta perspektivy reformuvania* [Territorial community as the basic link of the administrative-territorial structure of Ukraine: problems and perspectives of reform]. Kyiv: NISD, 2016.
- Vdovichenko, Ye. A. "Model otsenki effektivnosti integratsionnykh protsessov ekonomicheskikh sistem" [Model for assessing the effectiveness of integration processes of economic systems]. *Sovremennyye tekhnologii upravleniya*. 2013. <http://sovman.ru/article/3302/>