SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2017 **Issue:** 01 **Volume:** 45

Published: 19.01.2017 http://T-Science.org

SECTION 3. Nanotechnology. Physics.

Dmitry Lyubimov
PhD in mechanics
Engineering center L & Co, Ltd,
Surgut, Russia
rostexx@rambler.ru

Kirill Dolgopolov
PhD in mechanics
Rostov State Transport University,
Rostov-on-Don, Russia
lik.lab061@gmail.com

Victor Goldade
Doctor of Science (Eng), Professor in Physics,
Francisk Skorina Gomel State University,
Physical Department
Gomel, Belarus
victor.goldade@gmail.com

QUANTUM MODEL OF FRICTIONAL INTERACTION

***Abstract**: A quantum-mechanical model of frictional interaction is proposed. An equation was obtained which established linkage between micro-characteristics of friction, such as elementary cross-section and sizes of dissipative centers, and traditional tribotechnical parameters – coefficient and distance of friction.*
***Key words**: Planck's constant, quantum-mechanical approach, cross-section, dissipative centers, friction.*
***Language**: Russian*
***Citation**:* Lyubimov D, Dolgopolov K, Goldade V (2017) QUANTUM MODEL OF FRICTIONAL INTERACTION. ISJ Theoretical & Applied Science, 01 (45): 8-13.
***Soi**:* http://s-o-i.org/1.1/TAS-01-45-3 ***Doi**:* crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2017.01.45.3

КВАНТОВАЯ МОДЕЛЬ ФРИКЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

***Аннотация**: Предложена квантово-механическая модель фрикционного взаимодействия. Получено уравнение, связывающее микрохарактеристики трения, такие как элементарное сечение рассеяния и размеры диссипативных центров, с традиционными триботехническими величинами – коэффициентом и путём трения.*
***Ключевые слова**: постоянная Планка, квантово-механический подход, сечение рассеяния, диссипативные центры, трение.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №14-29-00116), организация ФГБОУ ВПО «Ростовский государственный университет путей сообщения», участник проекта Долгополов К.Н.

1. Введение

Развитие современной трибологии невозможно без создания обобщающих моделей трения, которые были бы основаны на фундаментальных физических теориях, привлекаемых для описания микромеханизмов фрикционного взаимодействия [1]. В последнее время многообразные теории трения всё чаще стали дополняться элементами квантовой механики. Как было показано в обзорной работе [2], наиболее глубокое продвижение квантово-механических методов в трибологии произошло при создании физических моделей, описывающих взаимодействие поверхностей трения. Последнее направление сфокусировалось и нашло отражение в гипотезе известного украинского учёного Л.И. Бершадского о квантах фрикционного взаимодействия – трибонах [3].

Трибонная гипотеза Бершадского в оставшемся теоретическом наследии представлена лишь в описательной форме, которая начала «обрастать» аналитическими зависимостями в работах [4, 5]. В этих работах применяемый для интерпретации теоретических зависимостей подход и соответственно полученные соотношения построены на представлениях классической физики. Физический смысл трибонов был ясно сформулирован в монографии [6], в которой введён новый термин «трибоквант», который соответствует минимальной порции энергии, рассеиваемой в единицу времени на единице площади. Он связан с диссипативной природой сил трения сечением рассеяния σ:

$$\gamma = h\sigma^{-1}, \tag{1}$$

где γ – трибоквант, h – постоянная Планка (Дж/с), σ – сечение рассеяния (м^2).

По сути трибоквант выступает как характеристика элементарного акта рассеяния. Исходя из определения, даваемого сечению рассеяния [7, с. 65],

$$d\sigma = St\frac{dn}{N}$$

$$\sigma = St\ \ell nN \approx \frac{1}{2}\,St\left(N^2 - 1\ \right), \tag{2}$$

легко показать, что трибокванты не могут возникать как единичное образование, т.е. $N > 1$ и

$$\gamma = \frac{2h}{St}\left(N^2 - 1\ \right)^{-1}, \tag{3}$$

где S – площадь рассеяния, t – время рассеяния, N – число рассеиваемых в единицу времен частиц. Факт парного рождения трибоквантов, вытекающий из выражения (3), ранее лишь постулировался в работах [4, 5].

2. Квантово-механический подход

Факт рождения дублета (мультиплета) трибоквантов принципиально не мог быть описан в рамках квазиклассической модели. Для перехода к квантово-механическому описанию данного процесса воспользуемся суждениями выдающегося английского физика П. Дирака [8] и математическим аппаратом квантовой физики, который в полной мере был применён по отношению к трибосистемам в монографии [9]. В предложенном подходе рассматриваются только стационарные состояния: акт рассеяния, в котором появляется дублет трибокванов, представляется как возмущение исходного стационарного состояния диссипативного центра. Такое возмущение переводит квантовую систему (трибосистему) из исходного состояния, обозначаемого в соответствии с правилами квантовой механики кет-вектором $|0\rangle$, в состояние $|1\rangle$. Новое возмущение переводит $|1\rangle$ в состояние $|2\rangle$ и т.д. Этот процесс формально представляется системой уравнений:

$$\begin{aligned} &(H - H_0)|1\rangle = V|0\rangle, \\ &(H - H_0)|2\rangle = V|1\rangle, \\ &\ldots \\ &(H - H_0)|n\rangle = V|n-1\rangle, \end{aligned} \tag{4}$$

где H и H_0 – гамильтонианы, описывающие энергетические состояния физической системы, V – оператор возмущения.

В соответствии с теорией квантовой механики [10] представителем линейного оператора является матрица вида $\langle j|V|i\rangle$, в которой левые индексы нумеруют строки, а правые – столбцы. Соответственно, представителем эрмитова оператора будет эрмитова матрица [9, 10]. Выбор представителя может происходить по самым разнообразным схемам. Например, если рассматривать диссипативную трибосистему с позиций шредингеровского волнового поля [11], то акт рассеяния можно рассматривать как возмущение квантового поля, которое испытывает последнее со стороны потенциала $V(r)$, передаваемого диссипативному центру. Это приводит к необходимости добавления в выражение для исходного гамильтониана трибосистемы (4) оператора возмущения V:

$$V = \frac{1}{\Omega}\sum_k\sum_{k'} C_k^{\,*} C_k \int V(r) e^{i(k-k^1)r} e^{i(\omega-\omega')t} d^3x, \tag{5}$$

где Ω – объём фазового пространства, занимаемого диссипативным центром, $C_k^{\,*}, C_k$ – операторы, сопряжённые друг другу, k, k' – волновые векторы, ω, ω' – частоты трибоквантов до и после рассеяния.

Введём величину, характеризующую изменение импульса трибокванта, происходящего вследствие рассеяния: $K = k - k'$. Тогда выражение (5) можно переписать в виде [11, с. 173]:

$$V = \frac{1}{\Omega}\sum_k\sum_{k'} C_{k'} C_k \langle k'|V|k\rangle e^{i(\omega-\omega')t}, \tag{6}$$

где

$$\langle k'|V|k\rangle = \int V(r) e^{iKr} d^3x = \int_0^\infty r^3 V(r)\frac{SinKr}{Kr}dr.$$

Начальные условия квантового поля характеризуются наличием одной лишней частицы в состоянии k, все другие состояния оказываются свободными. Такая структура описывается при помощи вектора пространства Гильберта [9, с. 85] вида $|A_i\rangle = |0\ldots1k_i\ldots0k_f\rangle$. Диссипация, порождающая трибоквант, приводит к изменению структуры этого пространства, в котором теперь конечное состояние характеризуется присутствием единственной частицы и отсутствием её в состоянии k, т.е. вектор $|A_i\rangle$ гильбертова пространства превращается в вектор $|A_f\rangle = |0...0k_i...1k_f...\rangle$. Тогда действие оператора V на вектор $|A_i\rangle$ от суммы по k в выражении (6) оставляет единственный член с $k = k_0$. При этом оператор C_k «уничтожает» начальную частицу и превращает сходное состояние k_i в вакуумное состояние $|0\rangle$ [9, 10]. Вклад в оставшуюся сумму по C^*k' дают все члены. Соответственно её можно записать так:

$$V|1k'\rangle = \frac{1}{\Omega}\sum_k \langle k'|V|k\rangle e^{i(\omega-\omega^1 t}|1k'\rangle \qquad (7)$$

В силу условия ортонормировки [10, 11] $\langle A_f|1k'\rangle = \delta_{kf}\delta_{k'}$, где δ – функция Дирака [8, с. 85], в сумму (7) дает вклад только один член, что приводит к выражению:

$$\langle A_f|V|A_i\rangle = \frac{1}{\Omega}\langle K_f|V|K_0\rangle e^{i(\omega-\omega')t}. \qquad (8)$$

Анализ сказанного выше позволяет рассматривать операторы C_k и $C^*_{k'}$ как операторы вторичного квантования уничтожения и рождения [9, 10], традиционно обозначаемые как a и a^+ соответственно. Произведение этих операторов называется числом заполнения n, которое может быть равно 0, 1, 2, и т.д. Соответственно можно записать основные свойства этих операторов:

$$a|n\rangle = |n-1\rangle,$$
$$a^+|n\rangle = |n+1\rangle. \qquad (9)$$

Свойства операторов уничтожения и рождения составляют «физическую сущность» так называемого n-представления квантовых параметров [9, 10], в котором числа заполненияnобразуют базис линейного подпространства гильбертова пространства, в котором определена исходная физическая система. Причём, n-представление является наиболее универсальной формой преобразования квантовых параметров, в котором любой линейный оператор α может быть представлен в виде суммы:

$$\alpha = \sum_{n'}\sum_{n''}\langle n'|\alpha|n''\rangle|n'\rangle\langle n''|, \qquad (10)$$

где оператор $|n'\rangle\langle n''|$ называется проектором P.

Все векторные состояния, описываемые операторами уничтожения и рождения, связанны с вакуумным состоянием $|0\rangle$ или $\langle 0|$ достаточно простыми соотношениями [9, 10]:

$$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle,\ \langle n| = \langle 0|\frac{a^n}{\sqrt{n!}},$$

$$|n\rangle\langle n| = \frac{(a^+)^n}{n!}|0\rangle\langle 0| = \sum_v \frac{(-1)^v}{v!}(a^+a)^v$$

$$|n'\rangle\langle n''| = \frac{(a^+)^{n'}a^{n''}}{\sqrt{n'!n''!}}e^{-a^+a},$$

$$\mathrm{P}|0\rangle\langle 0| = e^{-a^+a},$$

$$\mathrm{P} = |n\rangle\langle n| = \frac{1}{n!}(a^+)^n a^n P_0. \qquad (11)$$

n-представление позволяет рассматривать процесс рассеяния следующим образом. Пусть элементарный акт рассеяния механической энергии, инициированной трением, сводится к «рождению» дублета трибоквантов (а борновское приближение рассеяния [6, 11] допускает рассмотрение диссипативного центра как источника рассеиваемых частиц), то состояние системы, в которых трибокванты отсутствуют, можно рассматривать как физический вакуум, описываемый нулевыми векторами состояния $|0\rangle$ и $\langle 0|$. Тогда возмущение исходной трибосистемы, определяемое оператором V из выражения (4), можно интерпретировать оператором рождения a^+. Следовательно, сопряжённый оператор V^* может рассматриваться как оператор уничтожения a. Построение же алгоритма расчёта, позволяющего оценить сечение рассеяния диссипативного центра, основывается на выражениях (9-11). В квантовой теории рассеяния существует «золотое правило», в соответствии с которым дифференциальное сечение рассеяния определяется квадратом матрицы $\langle f|V|i\rangle$ [11, с. 166]:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \left(\frac{m\Omega}{2\pi\hbar^2}\right)\frac{k_f}{k_i}|\langle f|V|i\rangle|^2, \qquad (12)$$

где θ – телесный угол рассеяния, m – масса рассеиваемой частицы, $\hbar$ –приведенная постоянная Планка, равная $h/2\pi$.

Перепишем соотношение (12) в n-представлении:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \left(\frac{m\Omega}{2\pi\hbar^2}\right)^2\frac{k_{n'}}{k_{n''}}|\langle n'|V|n''\rangle|^2, \qquad (13)$$

где в соответствии с выражением (10):

$$\langle n'|V|n''\rangle = \sum_{n'}\sum_{n''}\langle n'|V|n''\rangle\,|n'\rangle\langle n''| =$$
$$= \sum_{n'}\sum_{n''}\frac{\langle n'|V|n''\rangle}{\sqrt{n'!n''!}}(a^{+})^{n'}e^{-a^{+}a}a^{n''} =$$
$$= \sum_{n'}\sum_{n''}\frac{\langle n'|V|n''\rangle}{\sqrt{n'!n''!}}V^{n'}e^{-V^2}(V^{*})^{n''} \qquad (14)$$

Считая процесс рассеяния абсолютно упругим, полагаем, что $k_{n'} = k_{n''}$ Тогда, подставляя (14) в формулу (13), получаем:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \left(\frac{m\Omega}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \left|\sum_{n'}\sum_{n''}\frac{\langle n'|V|n''\rangle}{\sqrt{n'!n''!}}V^{n'}e^{-V^2}\left(V^{*}\right)^{n''}\right|^2, \quad (15)$$

Так как начальное состояние соответствует числу заполнения $n'' = 0$, а трибокванты генерируются парами, то $n' = 1$. Тогда выражение (15) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \left(\frac{m\Omega}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \left|\sum_{n'=0}^{1}\frac{\langle n'|V|0\rangle}{\sqrt{n'!}}V^{n'}e^{-VV^{k}}\right|^2. \quad (16)$$

Из соотношения (16) путём интегрирования по телесному углу θ, получаем выражение для определения сечения рассеяния:

$$\sigma = \pi^{-1}\left(\frac{m\Omega}{\hbar^2}\right)^2\left|\sum_{n'=0}^{1}\frac{\langle n'|V|0\rangle}{\sqrt{n'!}}V^{n'}e^{-VV^{*}}\right|^2. \quad (17)$$

Используя соотношения (11), выражение (17) можно преобразовать к виду:

$$\sigma = \left(\frac{m\Omega}{\hbar^2}\right)^2\frac{P_0^2}{\pi}\left|\langle 0|V|0\rangle + \langle 1|V|0\rangle\right|^2 = \left(\frac{m\Omega}{\hbar^2}\right)^2\frac{e^{-V^2}}{\pi}V^2. \quad (18)$$

Поскольку по условию теории возмущения [11] величина V мала, экспоненту e^{-V^2} можно разложить в ряд Маклорена, ограничившись вторым членом разложения, тогда выражение (18) упрощается до вида:

$$\sigma = \frac{1}{\pi}\left(\frac{m\Omega}{\hbar^2}\right)^2 V^2.$$

Используя известные соотношения $m = \hbar\omega/c^2$, где c – скорость света [8-11], а также связь параметра γ трибокванта с частотой $\gamma = 1/2\hbar\omega^2$ [6], преобразуем выражение (18), которое приобретает линейную форму вида:

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}}{\hbar}\Omega V \qquad (19)$$

Таким образом, величина сечения рассеяния оказывается связанной линейной зависимостью с возмущением, которое испытывает физическая система при диссипативных процессах. В трибосистемах параметр V определяется величиной энергии, поглощаемой веществом поверхностных слоёв фрикционного контакта, что составляет примерно 1% от интегральной работы сил трения (число Костецкого) [12]. В соответствии с аддитивной природой трения, описываемой при помощи «парного закона» [13], можно допустить линейную связь между величиной работы силы трения $A_т$ и числом диссипативных центров N. Соответственно, на один такой центр «выпадает» значение энергии трения равное $A_т/N$, следовательно, на V приходится сотая часть этого значения. Тогда выражение (19) можно записать в «трибологическом» виде:

$$\sigma = \sqrt{2}\cdot 10^{-2}\frac{\Omega}{\hbar}\frac{A_T}{N} \approx 1.41\cdot 10^{-2}\frac{\Omega}{\hbar}\frac{fF\vartheta}{N}, \quad (20)$$

где f – коэффициент трения, F – нормальная нагрузка, ϑ – скорость скольжения, t – время трения.

Если в выражении (20) выделить величины, зависящие от времени, то его можно переписать в следующем виде:

$$\sigma(t) = 1{,}41\cdot 10^{-2}\frac{\Omega}{\hbar}\frac{f(t)Fl(t)}{N(t)}, \qquad (21)$$

где $l(t) = \vartheta\cdot t$ – путь трения.

Формула (21) позволяет учитывать возникновение хрональных связей между макропараметрами трения и числом диссипативных центров. Поэтому целесообразно объединить величины, зависящие от времени, в один параметр $\Phi(t)$:

$$\sigma(t) = 1.41\cdot 10^{-2}\frac{\Omega}{\hbar}\Phi(t). \qquad (22)$$

Выражения (20-22) характеризуют начальный этап диссипации, при котором в момент $t = t_0$ совершилось первое рассеяние механической энергии на единственном диссипативном центре, занимающим объём Ω в фазовом пространстве. Однако фрикционное взаимодействие является по меркам классической физики достаточно быстро протекающим процессом, в котором в течение непродолжительного времени «включаются» всё новые диссипативные центры. Изменения, происходящие при этом, в соответствии с правилами квантования шредингеровского волнового поля, обеспечивают аддитивность изменения таких величин как Ω и $\sigma(t)$

соответственно увеличению числа диссипативных центров $N(t)$. Ограниченность величины скорости скольжения ϑ приводит к временнóму отставанию при «подключении» новых диссипативных центров в общую картину фрикционного контакта. Такой временной сдвиг задается с помощью унитарного преобразования физических величин под воздействием на них оператора T [11, с. 37]:

$$T(tt_0) = \exp\left(-i\frac{t-t_0}{\hbar}H\right), \qquad (23)$$
$$\alpha(t) = T(tt_0)\alpha(t_0)T^{-1}(tt_0).$$

Аналогично рассматривается и пространственный перекос, задаваемый оператором $S(x)$:

$$S(x) = \exp\left(i\frac{x}{\hbar}p\right), \qquad (24)$$
$$\alpha(x) = S(x)\alpha(x_0)S^{-1}(k).$$

В выражениях (23, 24) x_0, x, t_0, t – начальные и конечные координаты и время, H – гамильтониан, p – оператор импульса.

Обозначим начальное значение сечения рассеяния как σ_0, которое с учётом унитарных преобразований (23, 24) может быть записано как:

$$\sigma_0(t_0) = A\Omega(x_0)\Phi(t_0), \qquad (25)$$

где A – численный коэффициент из (22), равный $1{,}41\cdot 10^{-2}$. Тогда через некоторый промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_0$ работы узла трения сечение рассеяния будет:

$$\sigma_1(t_1) = \sigma_0(t_0) + AS\Omega(x_0)T\Phi(t_0),$$

соответственно:

$$\sigma_2(t_2) = \sigma_1(t_1) + AS\Omega(x_1)T\Phi(t_1) =$$
$$= 2\sigma_0(t_0) + AS\Omega(x_1)T\Phi(t_1)$$

и т.д., то есть

$$\sigma_n(t_n) = n\sigma_0(t_0) + AS\Omega(x_{n-1})T\Phi(t_{n-1}).$$

Складывая парциальные сечения σ_n, получим интегральное значение сечения рассеяния процессов трения:

$$\sigma_i = \sum_n \sigma_n(t_n) = n\sigma_0 + A\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\left[S\Omega(x_i)T\Phi(t_i)\right]\right\}. \qquad (26)$$

В рамках предлагаемой квантовой модели фрикционного взаимодействия можно предположить, что «геометрические» параметры диссипативного центра, характеризуемые объёмом Ω, остаются неизменными на всём протяжении фрикционного взаимодействия. Динамические же изменения связаны с механическим перемещением контактирующих поверхностей, которое задаётся продолжительностью данного взаимодействия. В этом случае любой пространственный перенос, увеличивающий число диссипативных центров, с очевидностью зависит от времени трения. Из этих соображений рассмотрим последние соотношения.

Величина объёма Ω является аддитивной величиной, равной $\Omega_i N(t)$, где Ω_i – объём единичного диссипативного центра. Соответственно, если функцию $\Phi(t)$ представить в виде $\varphi(t)/N(t)$, то выражение (22) приобретает следующий вид:

$$\sigma(t) = 1.41\cdot 10^{-2}\frac{\Omega_i}{\hbar}\varphi(t). \qquad (27)$$

В квантовой физике события рассматриваются в различных фазовых пространствах, соответственно процесс рассеяния удобно исследовать в импульсном пространстве, метрической характеристикой которого является волновой вектор k. Это параметр, обратный декартовому вектору, поэтому фазовый объём импульсного пространства обратен обычному метрическому объёму $k^3 = \Omega^{-1}$. Величина $\sigma(t)$ складывается из парциальных сечений рассеяния σ_i от каждого из N диссипативных центров, т.е. $\sigma(t) = N\sigma_i$, тогда:

$$\sigma(t) = \sigma_i N = 1.41\cdot 10^{-2}\frac{\varphi(t)}{\hbar k^3}. \qquad (28)$$

Известно [11], что парциальное сечение $\sigma_i = \pi k^{-2}$. Тогда, преобразовав правую часть формулы (28), получим:

$$\sigma(t) = \sigma_i N = 1.41\cdot 10^{-2}\frac{\sigma_i\varphi(t)}{4\pi\hbar k}, \qquad (29)$$

откуда

$$N = 1.41\cdot 10^{-2}\frac{\varphi(t)}{4\pi\hbar k}. \qquad (30)$$

Из выражения (30) можно выделить метрический параметр R, характеризующий длину волны и размер диссипативного центра [11]:

$$R \approx k^{-1} = 8.92\cdot 10^{2}\frac{\hbar N}{\varphi(t)} = 8.92\cdot 10^{2}\frac{\hbar}{\Phi(t)}. \qquad (31)$$

Поскольку в соответствии с теорией рассеяния величина R определяет длину волны де

Бройля для трибокванта, то можно оценить и его энергию:

$$W = \frac{hc}{R} = 10^{-3} \cdot 2\pi c\Phi(t) \approx 6.28 \cdot 10^{-3} c\Phi(t). \quad (32)$$

Выражение (32), определяющее энергию трибокванта, в силу наличия в нем постоянной Планка, является квантово-механическим, и в то же время содержит в себе классические макропараметры, традиционно характеризующие фрикционное взаимодействие. Это коэффициент и путь трения, явно присутствующие в функционале $\Phi(t)$ в соответствии с выражением (20).

Заключение

Предлагаемая модель фрикционного взаимодействии объединяет традиционный взгляд на трение как диссипативный процесс и квантовую теорию, являющуюся единственно правильным алгоритмом, описывающим микропроцессы. При этом без каких-либо серьёзных «искусственных» допущений и предположений, полностью оставаясь в рамках фундаментальных квантово-механических представлений, получено уравнение, связывающее микрохарактеристики трения, такие как элементарное сечение рассеяния и размеры диссипативных центров, с традиционными триботехническими величинами – коэффициентом трения и путём трения. Кроме того, что весьма важно, оставаясь в рамках «квантово-механической логики» изложения, удалось описать кинетические аспекты процесса фрикционного взаимодействия.

References:

1. Lyubimov D, Dolgopolov K, Pinchuk L (2013) Micromechanisms of friction and wear: Introduction to relativistic tribology. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, 2013, 219 p.
2. Lyubimov DN, Dolgopolov KN, Mel'nikov EL (2015) Kvantovye modeli v tribologii (Obzor) //Remont, vosstanovlenie, modernizatsiya, 2015, №11. – C. 32-36.
3. Bershadskiy LI (1989) O vzaimosvyazi strukturnykh mekhanizmov i dissipativnykh potokov pri kineticheskom (nekulonovskom) trenii i iznose // Trenie i iznos,1989, t. 10, №2. – p. 358-364.
4. Lyubimov DN, Dolgopolov KN (2012) Kvantovo-korpuskulyarnyy mekhanizm friktsionnogo vzaimodeystviya poverkhnostey treniya// Trenie i smazka v mashinakh i mekhanizmakh, 2012, №3. – p. 11-14.
5. Lyubimov DN, Pinchuk LS, Dolgopolov KN (2012) Kvantovaya tribofizika. – Rostov na Donu: Izdatel'stvo YuFU, 2012. – 294 p.
6. Lyubimov DN, Potekha VL (2016) Vvedenie v nelineynuyu mekhaniku tribosistem. – Grodno: GGAU, 2016. – 334 p.
7. Landau LD, Livshits EM (1973) Teoreticheskaya fizika. T.1. Mekhanika. – M.: Nauka, 1973. – 108 p.
8. Dirak P.A.M. (1960) Printsipy kvantovoy mekhaniki. – M.: Nauka, 1960. – 404 p.
9. Lyubimov DN, Dolgopolov KN, Pinchuk LS (2013) Kvantovaya paradigma tribologii. – Rostov-na-Donu: Izdatel'stvo YuFU, 2013. – 206 p.
10. Medvedev BV (1977) Nachala teoreticheskoy fiziki. – M.: Nauka, 1977. – 496 p.
11. Elyutin PV, Krivchenkov VD (1976) Kvantovaya mekhanika. – M.: Nauka, 1976. – 325p.
12. Kostetskiy BI (1976) Poverkhnostnaya prochnost' materialov pri trenii. – Kiev: Tekhnika,1976. – 283p.
13. Akhmatov AS (1963) Molekulyarnaya fizika granichnogo treniya. – M.: Fizmatlit, 1963. – 471p.