DOI: 10.18454/2079-6641-2018-21-1-21-31

УДК 517.95

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА

С. Х. Геккиева[1], М. А. Керефов[2]

[1] Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

[2] Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173

E-mail: gekkieva_s@mail.ru, kerefov@mail.ru

При математическом моделировании сплошных сред с памятью возникают уравнения, описывающие новый тип волнового движения, занимающего промежуточное положение между обычной диффузией и классическими волнами. Имеются в виду дифференциальные уравнения дробного порядка, которые являются основой большинства математических моделей, описывающих широкий класс физических и химических процессов в средах с фрактальной геометрией. В работе представлено качественно новое уравнение влагопереноса, которое является обобщением уравнения Аллера – Лыкова. Рассмотрена первая краевая задача для уравнения Аллера – Лыкова с дробной производной Римана – Лиувилля. Для доказательства единственности решения методом энергетических неравенств получена априорная оценка в терминах дробной производной Римана – Лиувилля. Существование решения задачи доказано методом Фурье.

Ключевые слова: уравнение влагопереноса Аллера – Лыкова, дробная производная Римана – Лиувилля, метод Фурье, априорная оценка.

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию обобщенного уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова

$$c_1 D_{0t}^{\alpha} u + D_{0t}^{\alpha-1} u = u_{xx} + c_2 D_{0t}^{\alpha-1} u_{xx} + f(x,t), \tag{1}$$

где $D_{0\eta}^{\gamma}$ – оператор дробного интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля [1, с. 9], $1 < \alpha < 2$, c_1, $c_2 = \mathrm{const} > 0$.

Такого рода уравнения в локальной постановке ($\alpha = 2$) рассматривались в работах многих авторов (например, [2, 3]). Отметим работу [4], в которой исследовано уравнение влагопереноса Аллера – Лыкова с дробной производной.

Для уравнения (1) рассмотрим первую краевую задачу.

Задача 1. *Найти решение $u(x,t)$ уравнения (1) в области $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \tag{2}$$

и начальным условиям

$$\lim_{t \to 0} D_{0t}^{\alpha-2} u(x,t) = \tau(x), \quad \lim_{t \to 0} D_{0t}^{\alpha-1} u(x,t) = \nu(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{3}$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$ – заданные функции.

Единственность решения задачи

Пусть существует решение исследуемой задачи. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f(x,t) \in \mathrm{C}\left(\overline{Q}_T\right)$, $\nu(x) \in \mathrm{C}[0,l]$, $\tau(x) \in \mathrm{C}^2[0,l]$ всюду на $\overline{Q}_T$ и выполнено условие $\tau(0) = \tau(l) = 0$, тогда для решения задачи (1)–(3) справедлива априорная оценка*

$$\left\|D_{0t}^{\alpha-1} u\right\|_0^2 + \left\|D_{0t}^{\alpha-1} u_x\right\|_{2,Q_t}^2 + \left\|D_{0t}^{\alpha-1} u\right\|_{2,Q_t}^2 \leq M_1(t) \left(\|f\|_{2,Q_t}^2 + \left\|\tau''(x)\right\|_0^2 + \|\nu(x)\|_0^2\right). \tag{4}$$

Доказательство. Аналогично [5], введем новую неизвестную функцию $v(x,t)$, полагая

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \tau(x)$$

так, что $v(x,t)$ представляет собой отклонение функции $u(x,t)$ от известной функции $\frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \tau(x)$.

Известно [6, с. 15], что для степенных функций справедливы формулы дробного интегрирования и дифференцирования: $D_{0t}^{\alpha} t^{\alpha-2} = 0$, $D_{0t}^{\alpha-1} t^{\alpha-2} = 0$. Поэтому получим

$$c_1 D_{0t}^{\alpha} v + D_{0t}^{\alpha-1} v - v_{xx} - c_2 D_{0t}^{\alpha-1} v_{xx} =$$

$$= f(x,t) - \left(c_1 D_{0t}^{\alpha} + D_{0t}^{\alpha-1} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - c_2 D_{0t}^{\alpha-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(\frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \tau(x)\right) =$$

$$= f(x,t) + \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\tau''(x).$$

Итак, функция $v(x,t)$ будет определяться, как решение уравнения

$$c_1 D_{0t}^{\alpha} v + D_{0t}^{\alpha-1} v - v_{xx} - c_2 D_{0t}^{\alpha-1} v_{xx} = F(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T, \tag{5}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-2} v(x,t) = \tau(x) - \tfrac{\tau(x)}{\Gamma(\alpha-1)} \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-2} t^{\alpha-2} = 0, \\ &\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1} v(x,t) = \nu(x) - \tfrac{\tau(x)}{\Gamma(\alpha-1)} \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1} t^{\alpha-2} = \nu(x) \end{aligned} \tag{6}$$

и граничным условиям

$$v(0,t) = v(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{7}$$

где $F(x,t) = f(x,t) + \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\tau''(x)$.

Умножив уравнение (5) скалярно на $D_{0t}^{\alpha-1} v$, получим априорную оценку в терминах дробной производной Римана – Лиувилля:

$$\left(c_1 D_{0t}^{\alpha} v, D_{0t}^{\alpha-1} v\right) + \left(D_{0t}^{\alpha-1} v, D_{0t}^{\alpha-1} v\right) - \left(v_{xx}, D_{0t}^{\alpha-1} v\right) - \left(c_2 D_{0t}^{\alpha-1} v_{xx}, D_{0t}^{\alpha-1} v\right) = \left(F, D_{0t}^{\alpha-1} v\right), \tag{8}$$

где $(u,v) = \int\limits_0^l uv dx$, $(u,u) = \|u\|_0^2$.

Преобразуем слагаемые тождества (8) с учетом (6), (7):

$$\left(D_{0t}^{\alpha} v, D_{0t}^{\alpha-1} v\right) = \int\limits_0^l \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int\limits_0^t \frac{v(x,\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{v(x,\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^l \frac{\partial}{\partial t} \left(D_{0t}^{\alpha-1} v\right)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\|D_{0t}^{\alpha-1} v\right\|_0^2,$$

$$\left(D_{0t}^{\alpha-1} v, D_{0t}^{\alpha-1} v\right) = \left\|D_{0t}^{\alpha-1} v\right\|_0^2,$$

$$\left(v_{xx}, D_{0t}^{\alpha-1} v\right) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int\limits_0^l v_{xx}(x,t) \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{v(x,\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}} dx =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int\limits_0^l v_x(x,t) \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{v_x(x,\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}} dx,$$

$$\left(D_{ot}^{\alpha-1} v_{xx}, D_{ot}^{\alpha-1} v\right) = \int\limits_0^l \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{v_{xx}(x,\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{v(x,\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}} dx =$$

$$= -\left\|D_{0t}^{\alpha-1} v_x\right\|_0^2,$$

$$\left(F, D_{0t}^{\alpha-1} v\right) \le \frac{1}{4\varepsilon} \|F\|_0^2 + \varepsilon \left\|D_{0t}^{\alpha-1} v\right\|_0^2.$$

С учетом полученных неравенств из (8) получим

$$\frac{c_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|D_{0t}^{\alpha-1}v\right\|_0^2+\left\|D_{0t}^{\alpha-1}v\right\|_0^2+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int\limits_0^l v_x(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t\frac{v_x(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}}dx+c_2\left\|D_{0t}^{\alpha-1}v_x\right\|_0^2\le$$

$$\le\frac{1}{4\varepsilon}\|F\|_0^2+\varepsilon\left\|D_{0t}^{\alpha-1}v\right\|_0^2. \qquad (9)$$

Проинтегрируем (9) по τ от 0 до t:

$$\frac{c_1}{2}\left\|D_{0t}^{\alpha-1}v\right\|_0^2+\int\limits_0^t\left\|D_{0t}^{\alpha-1}v(x,\tau)\right\|_0^2d\tau+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l v_x(x,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^\tau\frac{v_x(x,\tau_1)\,d\tau_1}{(\tau-\tau_1)^{\alpha-1}}dx+$$

$$+c_2\int\limits_0^t\left\|D_{0t}^{\alpha-1}v_x(x,\tau)\right\|_0^2d\tau\le\frac{1}{4\varepsilon}\|F\|_{2,Q_t}^2+\varepsilon\int\limits_0^t\left\|D_{0t}^{\alpha-1}v(x,\tau)\right\|_0^2d\tau+\frac{c_1}{2}\left\|D_{0t}^{\alpha-1}v(x,0)\right\|_0^2.$$

Усилив последнее неравенство, учитывая неотрицательность интеграла, стоящего в левой части этого неравенства [1, с. 43], получим

$$c_1\left\|D_{0t}^{\alpha-1}v\right\|_0^2+2c_2\left\|D_{0t}^{\alpha-1}v_x\right\|_{2,Q_t}^2+2\varepsilon_1\left\|D_{0t}^{\alpha-1}v\right\|_{2,Q_t}^2\le\frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_{2,Q_t}^2+c_1\|\nu(x)\|_0^2,$$

где

$$\left\|D_{0t}^{\alpha-1}v\right\|_{2,Q_t}^2=\int\limits_0^t\left\|D_{0t}^{\alpha-1}v(x,t)\right\|_0^2d\tau,\quad \varepsilon_1=1-\varepsilon.$$

Откуда следует оценка

$$\left\|D_{0t}^{\alpha-1}v\right\|_0^2+\left\|D_{0t}^{\alpha-1}v_x\right\|_{2,Q_t}^2+\left\|D_{0t}^{\alpha-1}v\right\|_{2,Q_t}^2\le M(t)\left(\|F\|_{2,Q_t}^2+\|\nu(x)\|_0^2\right)$$

или, возвращаясь к $u(x,t)$, получим (4), откуда следует единственность решения задачи (1)–(3). □

Существование решения задачи

Пусть в уравнении (1) $f(x,t)=0$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\tau(x)\in C^3[0,l]$, $\nu(x)\in C^2[0,l]$ и выполнены условия согласования*

$$\tau(0)=\tau(l)=\tau''(0)=\tau''(l)=0,\quad \nu(0)=\nu(l)=0.$$

Тогда функция, определяемая рядом

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^\infty\left((\nu_k+a\tau_k)\,t^{\alpha-1}\sum_{n=0}^\infty\sum_{s=0}^n\binom{n}{s}\frac{(-1)^n a^{n-s}b^s t^{n+s(\alpha-1)}}{\Gamma(n+s(\alpha-1)+\alpha)}+\right.$$

$$\left.+\tau_k t^{\alpha-2}\Gamma(\alpha-1)\sum_{n=0}^\infty\sum_{s=0}^n\binom{n}{s}\frac{(-1)^n a^{n-s}b^s t^{n+s(\alpha-1)}}{\Gamma(n+s(\alpha-1)+\alpha-1)}\right)\sin\sqrt{\lambda}x, \qquad (10)$$

где $\tau_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \tau(x)\sin\left(\frac{\pi k}{l}\right)xdx$, $\nu_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \nu(x)\sin\left(\frac{\pi k}{l}\right)xdx$, $a = \frac{1+c_2\lambda}{c_1}$, $b = \frac{\lambda}{c_1}$, $\lambda = \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$, $k = 1,2,\ldots$, $1 < \alpha < 2$, *представляет непрерывную функцию при* $t \geq 0$, *дифференцируемую нужное число раз и являющуюся решением уравнения*

$$c_1 D_{0t}^{\alpha} u + D_{0t}^{\alpha-1} u = u_{xx} + c_2 D_{0t}^{\alpha-1} u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \tag{11}$$

которая удовлетворяет условиям (2), (3).

Доказательство. Для решения задачи применим метод Фурье, т. е. найдем в области Q_T класс нетривиальных решений уравнения (11), удовлетворяющих граничным условиям (2) и представимых в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{12}$$

Подставляя предполагаемую форму решения (12) в уравнение (11), получим:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \tag{13}$$

$$D_{0t}^{\alpha} T + a D_{0t}^{\alpha-1} T + bT = 0, \tag{14}$$

где $a = \frac{1+c_2\lambda}{c_1}$, $b = \frac{\lambda}{c_1}$, $\lambda = \text{const}$.

Как известно, решение спектральной задачи (13) имеет вид

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right), \quad \lambda = \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{15}$$

Из (14) получим [6, с. 15]:

$$T_k(t) + \int\limits_0^t T_k(\tau)\left[a + \frac{b}{\Gamma(\alpha)(t-\tau)^{1-\alpha}}\right]d\tau = f(t), \tag{16}$$

где $f(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(\nu_k + a\tau_k) + \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\tau_k$, $\lim\limits_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-2} T_k(t) = \tau_k$, $\lim\limits_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1} T_k(t) = \nu_k$.

Применим к (16) теорию интегральных уравнений Вольтерра. Вводя обозначение

$$K_1(t,\tau) = \begin{cases} a + \frac{b(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq \tau < t < T, \\ 0, & t < \tau \leq T, \end{cases}$$

и определяя далее последовательность ядер $\{K_n(t,\tau)\}_1^{\infty}$ посредством рекуррентных соотношений

$$K_n(t,\tau) = \int\limits_{\tau}^{t} K_{n-1}(t,t_1)K_1(t_1,\tau)\,dt_1,$$

последовательно находим

$$K_2(t,\tau) = a^2(t-\tau) + 2\frac{ab(t-\tau)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{b^2(t-\tau)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)},$$

$$K_3(t,\tau) = a^3(t-\tau)^2 + 3a^2b\frac{\lambda_k^2(t-\tau)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + 3ab^2\frac{\lambda_k(t-\tau)^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + b^3\frac{(t-\tau)^{3\alpha-1}}{\Gamma(3\alpha)}$$

и т. д.

Легко видеть, что

$$K_{n+1}(t,\ \tau)=\begin{cases}\sum\limits_{s=0}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ s \end{pmatrix} a^{n+1-s}b^s\frac{(t-\tau)^{n+s(\alpha-1)}}{\Gamma(n+1+s(\alpha-1))}, & 0\le\tau<t<T,\\ 0, \quad t<\tau\le T,\end{cases}$$

где $\begin{pmatrix} n+1 \\ s \end{pmatrix}=\frac{(n+1)!}{s!(n+1-s)!}$. Отсюда для резольвенты уравнения (16) имеем формулу

$$R(t,\tau,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n K_{n+1}(t,\tau)=$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sum\limits_{s=0}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ s \end{pmatrix} a^{n+1-s}b^s\frac{(t-\tau)^{n+s(\alpha-1)}}{\Gamma(n+1+s(\alpha-1))}, & 0\le\tau<t<T,\\ 0, \quad t<\tau\le T.\end{cases}$$

Таким образом, интегральное уравнение (16) имеет единственное решение, представимое в виде:

$$T_k(t)=f(t)-\int\limits_0^t R(t,\tau,\lambda)f(t)d\tau=$$

$$=(\nu_k+a\tau_k)\left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\sum_{s=0}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ s \end{pmatrix}\frac{a^{n+1-s}b^st^{n+s(\alpha-1)+\alpha}}{\Gamma(n+s(\alpha-1)+\alpha+1)}\right]+$$

$$+\tau_k\left[\frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\sum_{s=0}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ s \end{pmatrix}\frac{a^{n+1-s}b^st^{n+s(\alpha-1)+\alpha-1}}{\Gamma(n+s(\alpha-1)+\alpha)}\right].$$

Возвращаясь к задаче (11), (2), (3), заключаем, что функции

$$u_k(x,t)=X_k(x)T_k(t)=$$

$$=\left((\nu_k+a\tau_k)t^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)^n\begin{pmatrix} n \\ s \end{pmatrix}\frac{a^{n-s}b^st^{n+s(\alpha-1)}}{\Gamma(n+s(\alpha-1)+\alpha)}+\right.$$

$$\left.+\tau_kt^{\alpha-2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)^n\begin{pmatrix} n \\ s \end{pmatrix}\frac{a^{n-s}b^st^{n+s(\alpha-1)}}{\Gamma(n+s(\alpha-1)+\alpha-1)}\right)\sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)$$

являются частными решениями уравнения (11), удовлетворяющими граничным условиям (2), что проверяется непосредственной подстановкой.

Обратимся теперь к решению задачи (11), (2), (3) в общем случае. Составим ряд

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,t)=\sum X_k(x)T_k(t). \tag{17}$$

Функция $u(x,\ t)$ удовлетворяет граничным условиям, так как им удовлетворяют все члены ряда (17). Требуя выполнения начальных условий (3), получаем:

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-2}u(x,t)=\lim_{t\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)X_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-2}T_k(t)=$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\tau_k = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right) = \tau(x),$$

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\nu_k = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right) = \nu(x).$$

Таким образом, в силу (15) получена разложимость начальных функций в следующие ряды Фурье по синусам:

$$\tau(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right), \quad \nu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right). \tag{18}$$

Условие (18) является необходимым условием разрешимости задачи (11), (2), (3) в классе функций, представимых в виде ряда (17). Представления (18) имеют место тогда и только тогда, когда

$$\tau(0) = \tau(l), \quad \nu(0) = \nu(l),$$

$$\tau_k = \frac{2}{l}\int_0^l \tau(x)\sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)dx, \quad \nu_k = \frac{2}{l}\int_0^l \nu(x)\sin\left(\frac{\pi k}{l}\right)xdx.$$

Как известно из теории рядов Фурье [7, с. 696], если функция $\tau(x)$ имеет непрерывные производные до третьего порядка и удовлетворяет условиям $\tau(0) = \tau(l) = \tau''(0) = \tau''(l) = 0$, а $\nu(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка и $\nu(0) = \nu(1) = 0$, то представленная формулой (17) функция $u(x,t)$ будет обладать необходимыми производными, которые могут быть вычислены дифференцированием почленно в правой части (17).

Для обоснования метода Фурье нам понадобится лемма об асимптотических свойствах функции типа Миттаг-Леффлера $E_\rho(z;\mu) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu+k\rho^{-1})}$ [8, с. 136].

Лемма 1. *Пусть $\rho > \frac{1}{2}$, μ – вещественная постоянная и α_1 – фиксированное число из интервала $\left(\frac{\pi}{2\rho}, \min\left\{\pi, \frac{\pi}{\rho}\right\}\right)$. Тогда справедливы следующие оценки:*

1. Если $|\arg z| \le \alpha_1$ и $|z| \ge 0$, то

$$\left|E_\rho(z;\mu)\right| \le M_1(1+|z|)^{\rho(1-\mu)} e^{Re z^\rho} + \frac{M_2}{1+|z|}.$$

2. Если $\alpha_1 \le |\arg z| \le \pi$ и $|z| \ge 0$, то

$$\left|E_\rho(z;\mu)\right| \le \frac{M_2}{1+|z|},$$

где M_1 и M_2 – постоянные, не зависящие от z.

Продолжим обоснование Метода Фурье.

Покажем, что ряд (17) и ряды производных $D_{0t}^{\alpha}u$, $D_{0t}^{\alpha-1}u$, u_{xx}, $D_{0t}^{\alpha-1}u_{xx}$, которые получаются из него, будут равномерно сходиться.

Для доказательства равномерной сходимости ряда (17) будем использовать известные оценки коэффициентов Фурье [7, с. 647] и свойства гамма-функции. Получим следующее соотношение:

$$|u_k| \le \left|(\nu_k + a\tau_k)t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{s} \frac{a^{n-s}b^s t^{n+s(\alpha-1)}}{\Gamma(n+s(\alpha-1)+\alpha)}\right| +$$

$$+\left|\tau_k t^{\alpha-2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}(-1)^n\begin{pmatrix} n \\ s \end{pmatrix}\frac{a^{n-s}b^s t^{n+s(\alpha-1)}}{\Gamma(n+s(\alpha-1)+\alpha-1)}\right| \leq$$

$$\leq t^{\alpha-1}\frac{M_3}{k^2}\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-at)^n\frac{\left(1+a^{-1}bt^{\alpha-1}\right)^n}{\Gamma(n+s_0(\alpha-1)+\alpha)}\right|+t^{\alpha-1}\frac{M_4}{k^2}\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-at)^n\frac{\left(1+a^{-1}bt^{\alpha-1}\right)^n}{\Gamma(n+s_0(\alpha-1)+\alpha)}\right|+$$

$$+t^{\alpha-2}\frac{M_5}{k^2}\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-at)^n\frac{\left(1+a^{-1}bt^{\alpha-1}\right)^n}{\Gamma(n+s_1(\alpha-1)+\alpha-1)}\right| =$$

$$= t^{\alpha-1}\frac{M_6}{k^2}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-(at+bt^{\alpha})]^n}{\Gamma(n+s_0(\alpha-1)+\alpha)}\right|+t^{\alpha-2}\frac{M_5}{k^2}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-(at+bt^{\alpha})]^n}{\Gamma(n+s_1(\alpha-1)+\alpha-1)}\right| =$$

$$= t^{\alpha-1}\frac{M_5}{k^2}\left|E_1\left[-(at+bt^{\alpha});s_0\alpha+\alpha\right]\right|+t^{\alpha-2}\frac{M_6}{k^2}\left|E_1\left[-(at+bt^{\alpha});s_1(\alpha-1)+\alpha-1\right]\right|,$$

где фиксированные s_0, $s_1 \in N$ такие, что

$$\frac{1}{\Gamma(n+s_0(\alpha-1)+\alpha)} = \max_{s=\overline{0,n}}\left\{\frac{1}{\Gamma(n+s(\alpha-1)+\alpha)}\right\},$$

$$\frac{1}{\Gamma(n+s_1(\alpha-1)+\alpha-1)} = \max_{s=\overline{0,n}}\left\{\frac{1}{\Gamma(n+s(\alpha-1)+\alpha-1)}\right\}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(t^{\alpha-1}\frac{M_6}{k^2}E_1\left[-(at+bt^{\alpha});\alpha\right]+t^{\alpha-2}\frac{M_5}{k^2}E_1\left[-(at+bt^{\alpha});\alpha-1\right]\right). \tag{19}$$

Используя вторую оценку из леммы 1, получим

$$|u_k| \leq \frac{M_6M_2t^{\alpha-1}}{k^2\left[1+|at+bt^{\alpha}|\right]}+\frac{M_5M_2t^{\alpha-2}}{k^2\left[1+|at+bt^{\alpha}|\right]},$$

откуда следует равномерная сходимость ряда (15).

Из сходимости мажорантного ряда, имеющего порядок $\frac{1}{k^4}$, следует и равномерная сходимость ряда (19), а значит и ряда (17) при $t \geq t_0 > 0$, где t_0 – любое число.

Равномерная сходимость рядов

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t) \sim \sum_{k=1}^{\infty}D_{0t}^{\alpha-1}u_k, \quad D_{0t}^{\alpha-1}u(x,t) \sim \sum_{k=1}^{\infty}D_{0t}^{\alpha-1}u_k,$$

$$u_{xx}(x,t) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}, \quad D_{0t}^{\alpha-1}u_{xx}(x,t) \sim \sum_{k=1}^{\infty}D_{0t}^{\alpha-1}u_k$$

доказывается аналогично, и отсюда следует возможность почленного дифференцирования ряда (17) и применения обобщенного принципа суперпозиции, т. е. функция $u(x,t)$, определяемая рядом (17), а значит и (10), удовлетворяет уравнению (11).

Теорема доказана. □

Заключение

Полученные результаты могут стать основой для постановки и исследования новых краевых задач для обобщенного уравнения влагопереноса, а также послужат основой для развития теории краевых задач для дифференциальных уравнений, лежащих в основе математического моделирования физических и природных систем с фрактальной структурой.

В работе рассмотрены вопросы однозначной разрешимости краевой задачи для уравнения Аллера – Лыкова с дробной производной Римана – Лиувилля. В развитие рассматриваемой тематики актуальными остаются вопросы построения разностных схем для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова, рассмотрение задач с нелокальными граничными условиями, а также проведение численных расчетов.

Список литературы

[1] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с. [Nahushev A. M., *Drobnoe ischislenie i ego primenenie*, Fizmatlit, M., 2003, 272 pp.]

[2] Архестова С. М., Шхануков-Лафишев М. Х., "Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова с нелокальным условием", *Известия КБНЦ РАН*, 2012, № 3, 7–16. [Arhestova S. M., Shhanukov-Lafishev M. H., "Raznostnye shemy dlja uravnenija vlagoperenosa Allera – Lykova s nelokal'nym usloviem", *Izvestija KBNC RAN*, 2012, № 3, 7–16].

[3] Лафишева М. М., Керефов М. А., Дышекова Р. В., "Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова с нелокальным условием", *Владикавказский математический журнал*, **19**:1 (2017), 50–58. [Lafisheva M. M., Kerefov M. A., Dyshekova R. V., "Raznostnye shemy dlja uravnenija vlagoperenosa Allera – Lykova s nelokal'nym usloviem", *Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal*, **19**:1 (2017), 50–58].

[4] Геккиева С. Х., "Первая краевая задач для уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова с дробной по времени производной", *Устойчивое развитие: проблемы, концепции, модели*, Материалы Всероссийской конференции с международным участием, 2017, 99–102. [Gekkieva S. H., "Pervaja kraevaja zadach dlja uravnenija vlagoperenosa Allera – Lykova s drobnoj po vremeni proizvodnoj", *Ustojchivoe razvitie: problemy, koncepcii, modeli*, Materialy Vserossijskoj konferencii s mezhdunarodnym uchastiem, 2017, 99–102].

[5] Керефов М. А., Геккиева С. Х., "Первая краевая задача для неоднородного нелокального волнового уравнения", *Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика*, 2016, № 4, 76–86. [Kerefov M. A., Gekkieva S. H., "Pervaja kraevaja zadacha dlja neodnorodnogo nelokal'nogo volnovogo uravnenija", *Vestnik Burjatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika*, 2016, № 4, 76–86].

[6] Псху А. В., *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005, 199 с. [Pshu A. V., *Uravnenija v chastnyh proizvodnyh drobnogo porjadka*, Nauka, M., 2005, 199 pp.]

[7] Смирнов В. И., *Курс высшей математики*. Т. 2, БХВ-Петербург, СПб., 2008, 848 с. [Smirnov V. I., *Kurs vysshej matematiki*. V. 2, BHV-Peterburg, SPb., 2008, 848 pp.]

[8] Джрбашян М. М., *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, Наука, М., 1966, 672 с. [Dzhrbashjan M. M., *Integral'nye preobrazovanija i predstavlenija funkcij v kompleksnoj oblasti*, Nauka, M., 1966, 672 pp.]

Список литературы (ГОСТ)

[1] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М. Физматлит. 2003. 272 с.

[2] Архестова С. М., Шхануков-Лафишев М. Х. Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова с нелокальным условием // Известия КБНЦ РАН. 2012. №3. С. 7–16.

[3] Лафишева М. М., Керефов М. А., Дышекова Р. В. Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова с нелокальным условием // Владикавказский математический журнал. 2017. Т. 19. №1. С. 50–58.
[4] Геккиева С. Х. Первая краевая задач для уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова с дробной по времени производной // Материалы Всероссийской конференции с международным участием. Устойчивое развитие: проблемы, концепции, модели. 2017. С. 99–102.
[5] Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
[6] Керефов М. А., Геккиева С. Х. Первая краевая задача для неоднородного нелокального волнового уравнения // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2016. №4. С. 76–86
[7] Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2. СПб.: БХВ-Петербург, 2008. 848 с.
[8] Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

Для цитирования: Геккиева С. Х., Керефов М. А. Краевые задачи для обобщенного уравнения влагопереноса // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 1(21). С. 21-31. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-21-1-21-31

For citation: Gekkieva S. Kh., Kerefov M. A. The boundary value problem for the generalized moisture transfer equation, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2018, **21**: 1, 21-31. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-21-1-21-31

Поступила в редакцию / Original article submitted: 28.12.2017

В окончательном варианте / Revision submitted: 16.03.2018

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2018. no.1(21). pp. 21–31. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-21-1-21-31

MSC 35E99

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE GENERALIZED MOISTURE TRANSFER EQUATION

S. Kh. Gekkieva[1], M. A. Kerefov[2]

[1] Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Center of RAS, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89 A, Russia
[2] Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, 360004, Nalchik, Chernyshevsky st., 173, Russia

E-mail: gekkieva_s@mail.ru, kerefov@mail.ru

In mathematical modeling of continuous media with memory, we deal with equations that describe a new type of wave motion, something between ordinary wave diffusion and classical wave propagation. There are fractional differential equations, which are the basis for the most mathematical models describing a wide class of physical and chemical processes in the fractal geometry of the Nature. The paper presents a new moisture transfer equation with a fractional Riemann – Liouville derivative that generalize the Aller – Lykov equation. The first boundary value problem for the generalized moisture transfer equation is considered. To prove the uniqueness of a solution we employ the energy inequalities method; an a priori estimate is obtained in terms of the fractional Riemann – Liouville derivative. The existence of the solution for the problem is proved by the Fourier method.

Key words: Tricomi problem, parabolic-hyperbolic equation, non-characteristic plane, Fourier transform, maximum principle, apriori estimate, uniqueness, existence, system of integral equations.