Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2017. № 3(19). С. 70-77. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2017-19-3-70-77

УДК 519.7

КЛАСТЕРИЗАЦИЯ НА ОСНОВЕ ПОИСКА ЦЕНТРОВ И УСРЕДНЯЮЩИЕ АГРЕГИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ

З. М. Шибзухов

Институт прикладной математики и автоматизации, филиал КБНЦ РАН, г. Нальчик
E-mail: szport@gmail.com

Предлагается новый метод поиска разбиения на кластеры конечного множества точек из $\mathbb{R}^n$, который основан на применении усредняющих агрегирующих функций и метод итерационного перевзвешивания для поиска центров кластеров.

Ключевые слова: агрегирующие функции, M-среднее, K-means, кластеризация

MSC 68T05, 62H30

CENTER BASED CLUSTERING AND AVERAGING AGGREGATION FUNCTIONS

Z. M. Shibzukhov

Institute of Applied Mathematics and Automation, branch of KBSC RAS, Nalchick
E-mail: szport@gmail.com

We propose a new clustering method for partitioning of finite sets from $\mathbb{R}^n$, which is based on the application of averaging aggregating functions and an iterative re-weighing method for searching cluster centers.

Key words: aggregation function, M-average, K-means, clustering

В основе одного классического метода для точного разбиения на кластеры лежит процедура поиска центров кластеров. Центр множества – это точка, от которой сумма расстояний до всех точек множества минимально. Разбиение на кластеры осуществляется по простому правилу: точка относится к кластеру, до центра которого расстояние минимально.

Пусть $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}^n$ – открытое подмножество, $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N\} \subset \mathbf{S}$ – конечное множество, которое требуется разбить на K кластеров. Пусть $d\colon \mathbf{S} \times \mathbf{S} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ – функция обобщенного расстояния между точками из $\mathbf{S}$, которая, по определению [1], удовлетворяет следующим требованиям:

1) $d_{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ – строго выпуклая и дважды дифференцируемая на $\mathbf{S}$;

2) $\lim\limits_{\|\mathbf{x}\| \to \infty} d_{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = \infty$.

Пусть $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_K$ — некоторое разбиение множества $\mathbf{X}$ на K кластеров, $y_j(\mathbf{x})$ — характеристическая функция j-го кластера, $1 \leqslant j \leqslant K$:

$$y_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{x} \in \mathbf{C}_j \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определение. Точка $\mathbf{c}^\star$ – центр конечного множества $\mathbf{C} \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\mathscr{Q}(\mathbf{c}^\star) = \min_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n} \mathscr{Q}(\mathbf{c}), \tag{1}$$

где

$$\mathscr{Q}(\mathbf{c}) = \sum_{k=1}^{N} y_k d(\mathbf{x}_k, \mathbf{c}),$$

а $y_k = y(\mathbf{x}_k)$ – характеристическая функция $\mathbf{C}$.

Например:

1) в методе K-means

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i)^2,$$

центр множества

$$\mathbf{c}^* = \frac{1}{|\mathbf{C}|} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k.$$

2) в методе K-medoid

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - c_i|,$$

центр множества $\mathbf{c}^* = (c_1^*, \ldots, c_n^*)$, где

$$c_i^* = \operatorname*{med}_{k=1,\ldots,N} \{x_{ki}\},$$

а $\mathbf{x}_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn})$.

Условия, наложенные на d обеспечивают существование и единственность центра.

В более общем случае функцию расстояния можно записать в следующей форме:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = g\Big(\sum_{i=1}^{n} h(x_i - c_i)\Big),$$

где h — функция расстояния на $\mathbb{R}$, g — монотонная строго возрастающая функция. Например:

1) $d(\mathbf{x},\mathbf{c}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{c}\|_p^p = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - c_i|^p,\ p \geqslant 1;$

2) $d(\mathbf{x},\mathbf{c}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{c}\|_p = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - c_i|^p\Big)^{1/p},\ p \geqslant 1.$

Детерминированные характеристические функции кластеров, которые полностью задаются своими центрами, обычно определяются следующим образом:

$$y_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = \arg\min\limits_{j=1,..,K} d(\mathbf{x},\mathbf{c}_j) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{2}$$

Т.е. точка относится к тому кластеру, к которому она ближе всего.

Задачу поиска кластеров, следуя [1], можно сформулировать как задачу оптимизации:

$$\mathbf{c}_1^*, \dots, \mathbf{c}_K^* = \arg\min_{\mathbf{c}_1,\dots,\mathbf{c}_K} \mathscr{Q}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_K), \tag{3}$$

где

$$\mathscr{Q}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_K) = \sum_{k=1}^{N} v_k D(\mathbf{x}_k), \tag{4}$$

$$D(\mathbf{x}) = \min_{1\leqslant j\leqslant K} d(\mathbf{x},\mathbf{c}_j), \tag{5}$$

величина $v_k \geqslant 0$ и отражает значимость k-ой точки, $v_1 + \dots + v_N = 1$. Если $v_k = \frac{1}{N}$, а $d(\mathbf{x},\mathbf{c}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{c}\|_2^2$, то данная задача оптимизации лежит в основе стандартного алгоритма K-Means.

Так как

$$\operatorname{grad}_{\mathbf{c}_j} \mathscr{Q} = \sum_{k\in\mathbf{I}_j} v_k \operatorname{grad}_{\mathbf{c}_j} d_k(\mathbf{c}),$$

где $d_k(\mathbf{c}_j) = d(\mathbf{x}_k,\mathbf{c}_j)$, $y_{kj} = y_j(\mathbf{x}_k)$, $\mathbf{I}_j = \{k\colon \mathbf{x}_k \in \mathbf{C}_j\}$, то центр j-ого кластера является решением следующей задачи оптимизации:

$$\mathbf{c}_j = \arg\min_{\mathbf{c}} \sum_{k\in\mathbf{I}_j} v_k d_k(\mathbf{c}).$$

Классический алгоритм кластеризации на основе поиска центров кластеров HCD[1]. представляет собой итерационный процесс уточнения положения центров $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_K$. Он представляет собой разновидность алгоритмов спуска по альтернативным направлениям, которые представляют группы переменных, соответствующих центрам кластеров $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_K$.

[1]HCD =**H**ard **C**lustering with **D**istance-like functions

procedure HCD($\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_N\}$, $\{\mathbf{c}_1^0,\dots,\mathbf{c}_K^0\}$)
    $t \leftarrow 0$
    $\mathbf{c}_1,\dots,\mathbf{c}_K \leftarrow \mathbf{c}_1^0,\dots,\mathbf{c}_K^0$
    repeat
        for all $j=1,\dots,K$ **do**
            $\mathbf{I}_j = \{k\colon y_j(\mathbf{x}_k)=1\}$
            $\mathbf{c}_j \leftarrow \arg\min\limits_{\mathbf{c}} \sum\limits_{k\in\mathbf{I}_j} \nu_k d_k(\mathbf{c}),$
        end for
        $t \leftarrow t+1$
    until положения центров не стабилизируются
    return $\mathbf{c}_1,\dots,\mathbf{c}_K$
end procedure

Рассмотрим случай, когда $d(\mathbf{x},\mathbf{c}) = \rho(\|\mathbf{x}-\mathbf{c}\|)$, где $\|\cdot\|$ – Евклидова норма. В этом случае алгоритм HCD можно свести к цепочке взвешенных версий K-Means на базе следующего соотношения:

$$\mathrm{grad}\rho(\|\mathbf{x}-\mathbf{c}\|) = \rho'(\|\mathbf{x}-\mathbf{c}\|)\mathrm{grad}\|\mathbf{x}-\mathbf{c}\| = \frac{\rho'(\|\mathbf{x}-\mathbf{c}\|)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{c}\|}\mathrm{grad}\frac{1}{2}\|\mathbf{x}-\mathbf{c}\|^2.$$

Применяя метод итеративного перевзвешивания для поиска центров кластеров, приходим к алгоритму IR-KMeans.[2]

Рассмотрим обобщения этой постановки задачи, исходя из факта, что min и взвешенное среднее арифметическое являются примерами усредняющих агрегирующих функций [2, 3]. Значительный класс таких функций – это M-средние. Будем строить эти обобщения, по следующей схеме [4].

Пусть $\rho(r,s) = g(h(r)-h(s))$, где $g(r)$ – выпуклая функция, а $h(s)$ – строго монотонная. Определим M-среднее, как решение следующей задачи:

$$\mathsf{M}_\rho\{r_1,\dots,r_m\} = \arg\min_s \Big\{\sum_{j=1}^m \rho(r_j,s)\Big\}.$$

Если $\rho(\cdot,r)$ – строго выпуклая дважды дифференцируемая функция, то M_ρ – дифференцируемая усредняющая агрегирующая функция [5, 6]. Большинство известных функций для вычисления эмпирического среднего можно представить как M-среднее.

Если существует $\rho_{ss}(r,s)$ и $\rho_{sr}(r,s)$, то

$$\frac{\partial\mathsf{M}_\rho\{r_1,\dots,r_m\}}{\partial r_j} = \frac{-\rho''_{sr}(r_j,\bar r)}{\rho''_{ss}(r_1,\bar r)+\cdots+\rho''_{ss}(r_m,\bar r)},$$

где $\bar r = \mathsf{M}_\rho\{r_1,\dots,r_m\}$. В частности, если $\rho(r,s)=g(r-s)$, то имеет место соотношение:

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial\mathsf{M}_\rho\{r_1,\dots,r_m\}}{\partial r_j} = 1.$$

Рассмотрим *первое* обобщение путем замены взвешенного среднего арифметического на M_ρ:

$$\mathscr{Q}(\mathbf{c}_1,\dots,\mathbf{c}_K) = \mathsf{M}_\rho\{D(\mathbf{x}_1),\dots,D(\mathbf{x}_N)\}. \tag{6}$$

[2] IR-K-Means = **I**teratively **R**eweighted **K-Means**.

Градиент $\mathscr{Q}$ по $\mathbf{c}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant K)$ имеет вид:

$$\mathrm{grad}_{\mathbf{c}_j}\mathscr{Q} = \sum_{k\in\mathbf{I}_j} \frac{\partial \mathsf{M}_\rho\{D(\mathbf{x}_1),\ldots,D(\mathbf{x}_N)\}}{\partial r_k}\mathrm{grad}_{\mathbf{c_j}} d_k(\mathbf{c}_j),$$

где $\mathbf{I}_j = \{k\colon y_{kj} = 1\}$.

Для решения задачи поиска центров, минимизирующих (6) можно построить процедуру спуска по альтернативным направлениям – градиентам $\mathrm{grad}_{\mathbf{c}_j}\mathscr{Q}$.

procedure IR-HCD-M1($\{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_N\}$, $\{\mathbf{c}_1^0,\ldots,\mathbf{c}_K^0\}$)
  $t \leftarrow 0$
  $\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_K \leftarrow \mathbf{c}_1^0,\ldots,\mathbf{c}_K^0$
  repeat
    for all $j = 1,...,K$ **do**
      for all $k \in \mathbf{I}_j$ **do**
        $v_k = \dfrac{\partial \mathsf{M}_\rho\{D(\mathbf{x}_1),\ldots,D(\mathbf{x}_N)\}}{\partial r_k}$
      end for
      $\mathbf{c}_j \leftarrow \arg\min\limits_{\mathbf{c}} \sum\limits_{k\in\mathbf{I}_j} v_k d_k(\mathbf{c})$
    end for
    $t \leftarrow t+1$
  until положения центров не стабилизируются
  return $\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_K$
end procedure

По окончании работы алгоритма получаются веса точек $v_1^*,\ldots,v_N^*$ (т.к. множества $\mathbf{I}_1,\ldots,\mathbf{I}_K$ не пересекаются; в противном случае детерминированное разбиение на кластеры невозможно). В случае, когда $\rho(r,s) = g(r-s)$, их можно интерпретировать как степени важности точек $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_N$. Найденные центры также являются решением задачи (3)–(5) с весами $v_1^*,\ldots,v_N^*$.

Рассмотрим *второе* обобщение задачи (4), когда

$$D(\mathbf{x}) = \mathsf{M}_{\rho_C}\{d(\mathbf{x},\mathbf{c}_1),\ldots,d(\mathbf{x},\mathbf{c}_K)\}$$

т.е. тогда

$$\mathscr{Q}(\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_K) = \sum_{k=1}^{N} v_k \mathsf{M}_{\rho_C}\{d_k(\mathbf{c}_1),\ldots,d_k(\mathbf{c}_K)\}. \tag{7}$$

Градиент Q по $\mathbf{c}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant K)$ имеет вид:

$$\mathrm{grad}_{\mathbf{c}_j}\mathscr{Q} = \sum_{k=1}^{N} v_k \frac{\partial \mathsf{M}_{\rho_C}\{d_{k1},\ldots,d_{kK}\}}{\partial r_j}\mathrm{grad}_{\mathbf{c_j}} d_k(\mathbf{c}_j),$$

где $d_{kj} = d(\mathbf{x}_k,\mathbf{c}_j)$.

Для решения задачи можно построить алгоритм IR-HCD-M2 – новый вариант процедуры итерационного перевзвешивания:

procedure IR-HCD-M2($\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_N\}$, $\{\mathbf{c}_1^0,\dots,\mathbf{c}_K^0\}$)
  $t \leftarrow 0$
  $\mathbf{c}_1,\dots,\mathbf{c}_K \leftarrow \mathbf{c}_1^0,\dots,\mathbf{c}_K^0$
  repeat
    for all $k = 1,\dots,N$ **do**
      $v_{k1},\dots,v_{kK} = \mathrm{gradM}_{\rho_C}\{d_k(\mathbf{c}_1),\dots,d_k(\mathbf{c}_K)\}$
    end for
    for all $j = 1,\dots,K$ **do**
      $\mathbf{c}_j \leftarrow \arg\min\limits_{\mathbf{c}} \sum\limits_{k=1}^{N} v_k v_{kj} d_k(\mathbf{c})$
    end for
    $t \leftarrow t+1$
  until положения центров не стабилизируются
  return $\mathbf{c}_1,\dots,\mathbf{c}_K$
end procedure

Заметим, что если $\rho(r,s) = g(r-s)$, то $v_{k1},\dots,v_{kK} \geqslant 0$ и $v_{k1}+\dots+v_{kK} = 1$. Тогда величины $v_{k1},\dots,v_{kK}$ можно интерпретировать как степени принадлежности $\mathbf{x}_k$ к классам с метками $1,\dots,K$, соответственно. Это позволяет построить нечеткую кластеризацию конечного множества $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_N$. При этом, нечеткая функция принадлежности к кластерам строится на основе выбранной дифференцируемой усредняющей функции M_ρ следующим образом:

$$y_1(\mathbf{x}),\dots,y_K(\mathbf{x}) = \mathrm{gradM}_\rho\{d(\mathbf{x},\mathbf{c}_1),\dots,d(\mathbf{x},\mathbf{c}_K)\}.$$

Если $d(\mathbf{x},\mathbf{c}) = \rho(\|\mathbf{x}-\mathbf{c}\|^2)$, то тогда алгоритм IR-HCM превращается в аналог IR-K-Means, в котором веса

$$v_{kj} = \frac{\partial \mathsf{M}_\rho\{d_{k1},\dots,d_{kK}\}}{\partial r_j}\frac{\rho'(\|\mathbf{x}_k-\mathbf{c}_j\|)}{\|\mathbf{x}_k-\mathbf{c}_j\|},$$

где $d_{kj} = d(\mathbf{x}_k,\mathbf{c}_j)$.

Предложенная здесь метод поиска центров кластеров обобщает подход, рассмотренный в [1], когда в качестве усредняющих функций выступают функции среднего по Колмогорову:

$$\mathsf{M}^h\{z_1,\dots,z_K\} = h^{-1}\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{K} h(z_j)\Big),$$

где h – взаимно обратная монотонная функция. Т.е. алгоритм IR-HCM обобщает естественным образом алгоритм SKM [1]. Там же было показано, что путем выбора соответствующей функции h можно построить уже известные алгоритмы кластеризации, как такие FCM [7], EM [8], DA [9], Bergman Soft Clustering [10].

Объединим теперь оба этих способа. Теперь задача поиска центров имеет вид:

$$\mathbf{c}_1^*,\dots,\mathbf{c}_K^* = \arg\min_{\mathbf{c}_1,\dots,\mathbf{c}_K} \mathscr{Q}(\mathbf{c}_1,\dots,\mathbf{c}_K), \tag{8}$$

где

$$\mathscr{Q}(\mathbf{c}_1,\dots,\mathbf{c}_K) = \mathsf{M}_\rho\{D(\mathbf{x}_1),\dots,D(\mathbf{x}_N), \tag{9}$$

$$D(\mathbf{x}) = \mathsf{M}_{\rho_C}\{d(\mathbf{x},\mathbf{c}_1),\dots,d(\mathbf{x},\mathbf{c}_1)\}, \tag{10}$$

Градиент $\mathscr{Q}$ по $\mathbf{c}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant K)$ имеет вид:

$$\operatorname{grad}_{\mathbf{c}_j}\mathscr{Q} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \mathsf{M}_\rho\{d_{1j},\ldots,d_{Nj}\}}{\partial r_k} \frac{\partial \mathsf{M}_{\rho_C}\{d_{k1},\ldots,d_{kK}\}}{\partial r_j} \operatorname{grad}_{\mathbf{c_j}} d(\mathbf{x}_k,\mathbf{c}_j),$$

где $d_{kj} = d(\mathbf{x}_k,\mathbf{c}_j)$.

```
procedure IR-HCD-MM({x_1,...,x_N}, {c_1^0,...,c_K^0})
    t ← 0
    c_1,...,c_K ← c_1^0,...,c_K^0
    repeat
        for all k = 1,...,N do
            v_k1,...,v_kK = gradM_ρC{d_k(c_1),...,d_k(c_K)}
        end for
        for all j = 1,...,K do
            v_1,...,v_N = gradM_ρ{d_1(c_j),...,d_N(c_j)}
            c_j ← arg min_c Σ_{k=1}^{N} v_k v_kj d_k(c)
        end for
        t ← t + 1
    until положения центров не стабилизируются
    return c_1,...,c_K
end procedure
```

Таким образом, применение M-средних позволило построить процедуры поиска центров кластеров, которые обобщают HCD и SKM, позволяя использовать широкий спектр методов поиска среднего значения для нечеткого отнесения точек к кластерам и методов поиска центра для конечного набора точек.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 15–01–03381.

Список литературы

[1] Teboulle M., "A Unified Continuous Optimization Framework for Center-Based Clustering Method", *Journal of Machine Learning Research*, 2007, №8, 65–102.

[2] Mesiar R., Komornikova M., Kolesarova A., Calvo T., *Aggregation functions: A revision. In H. Bustince, F. Herrera, J. Montero, editors, Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models.*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.

[3] Grabich M., Marichal J.-L., Pap E., *Aggregation Functions. Series: Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. V. 127, Cambridge University Press, 2009.

[4] Шибзухов З.М., "О принципе минимизации эмпирического риска на основе усредняющих агрегирующих функций.", *Доклады РАН*, **476**:5 (2017). [Shibzukhov Z.M., "O printsipe minimizatsii empiricheskogo riska na osnove usrednyayushchikh agregiruyushchikh funktsiy.", *Doklady RAN*, **476**:5 (2017)].

[5] Calvo T., Beliakov G., "Aggregation functions based on penalties", *Fuzzy Sets and Systems*, **161**:10 (2010), 1420–1436.

[6] Beliakov G., Sola H., Calvo T., *A Practical Guide to Averaging Functions*, Springer, 2016.

[7] Bezdek J.C., *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*, Plenum Press, New York, 1981.

[8] Duda R.O., Hart P.E., Stork D.G., *Pattern Classification.*, John Wiley & Sons, Inc., 2-nd edition, 2001..

[9] Rose K., Gurewitz E., Fox C.G., "A deterministic annealing approach to clustering", *Pattern Recognition Letters*, **11**:9 (1990), 589–594.

[10] Banerjee A., Merugu S., Dhillon I.S., Ghosh J., "Clustering with Bregman Divergences", *Journal of Machine Learning Research*, 2005, №6, 1705–1749.

Список литературы (ГОСТ)

[1] Teboulle M. A Unified Continuous Optimization Framework for Center-Based Clustering Method // Journal of Machine Learning Research. 2007. no 8. pp. 65–102.
[2] Mesiar R., Komornikova M., Kolesarova A., Calvo T. Aggregation functions: A revision. In H. Bustince, F. Herrera, J. Montero, editors, Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008.
[3] Grabich M., Marichal J.-L., Pap E. Aggregation Functions. Series: Encyclopedia of Mathematics and its Applications. No.127. Cambridge University Press, 2009.
[4] Шибзухов З.М. О принципе минимизации эмпирического риска на основе усредняющих агрегирующих функций. Доклады РАН. 2017. Т. 476. № 5.
[5] Calvo T., Beliakov G. Aggregation functions based on penalties // Fuzzy Sets and Systems. 2010. vol. 161 no. 10. pp. 1420–1436.
[6] Beliakov G., Sola H., Calvo T. A Practical Guide to Averaging Functions Springer, 2016.
[7] Bezdek J.C. Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms. N.York: Plenum Press, 1981.
[8] Duda R.O., Hart P.E., Stork D.G. Pattern Classification. John Wiley & Sons, Inc., 2-nd edition, 2001.
[9] Rose K., Gurewitz E., Fox C.G. A deterministic annealing approach to clustering // Pattern Recognition Letters. 1990. vol. 11. no 9. pp. 589–594.
[10] Banerjee A., Merugu S., Dhillon I.S., Ghosh J. Clustering with Bregman Divergences // Journal of Machine Learning Research. 2005. no 6. pp. 1705–1749

Для цитирования: Шибзухов З. М. Кластеризация на основе поиска центров и усредняющие агрегирующие функции // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2017. № 3(19). C. 70-77. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-19-3-70-77

For citation: Shibzukhov Z. M. Center based clustering and averaging aggregation functions, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2017, **19**: 3, 70-77. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-19-3-70-77

Поступила в редакцию / Original article submitted: 05.10.2017