Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2017. № 3(19). C. 20-24. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2017-19-3-20-24

УДК 517.954

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ АНАЛОГА ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А. М. Шхагапсоев

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 36000,
г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а
E-mail: sh2ps@yandex.ru

Рассматривается краевая задача для уравнения третьего порядка параболического типа с дробной производной Капуто. Методом энергетических неравенств получена априорная оценка решения аналога второй краевой задачи для уравнения с кратными характеристиками.

Ключевые слова: Априорная оценка краевой задачи; уравнение с кратными характеристиками; метод интегралов энергии; дробная производная по Капуто.

MSC 35M13

A PRIORI ESTIMATE OF THE SOLUTION OF THE ANALOGUE OF THE SECOND BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE GENERALIZED THIRD-ORDER EQUATION WITH SHORT CHARACTERISTICS

A. M. Shkhagapsoev

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, 360000,
KBR, Nalchik, st. Shortanova 89a, Russia
E-mail: sh2ps@yandex.ru

We consider the boundary-value problem for a third-order equation of parabolic type with the fractional derivative of Caputo. By the method of energy inequalities an a priori estimate of the solution of the analogue of the second boundary value problem for an equation with multiple characteristics.

Key words: A priori estimate of the boundary-value problems; equations with multiple characteristics; method of energy integrals; Caputo Fractional derivative.

Введение

В настоящее время теория краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка является одним из интенсивно развивающихся разделов современной теории дифференциальных уравнений. Наблюдается существенный рост применения уравнений с частными производными дробного порядка при описании физических и химических процессов, протекающих в средах с фрактальной структурой, а так же при моделировании биологических явлений [1]. Работа [2] посвящена вопросам обобщения операций дифференцирования и интегрирования с целых порядков на дробные, а также приложениями теории дробного интегрирования и дифференцирования.

Уравнение третьего порядка с кратными характеристиками содержащее производную первого порядка по времени

$$u_y = u_{xxx} + f(x,y),$$

впервые было рассмотрено в работах [3]–[5]. Полученные в них результаты были обобщены для уравнения (2n-1)-го порядка в работе [6]. В работе [7] построены фундаментальные решения с применением преобразования Лапласа, теории потенциалов и получены оценки этих решений.

Для уравнения

$$u_y = u_{xxx} + a_1(x,y)u_x + a_2(x,y)u + f(x,y),$$

в работе [8] доказано единственность решения и построена функция Грина краевой задачи Каттабрига.

В работе [9] методом энергетических неравенств, как для дифференциальных, так и для разностных краевых задач получены априорные оценки первой и третьей краевых задач для уравнения третьего порядка с дробной производной Капуто.

В работах [10]–[11] получены априорные оценки решения различных краевых задач, в том числе задачи Каттабрига для уравнения с кратными характеристиками с дробной производной Капуто по времени.

В настоящей работе методом энергетических неравенств получена априорная оценка решения краевой задачи для уравнения с кратными характеристиками с дробной производной Капуто по времени.

Постановка задачи

В прямоугольной области $D = \{(x,y) : 0 < x < r, \quad 0 < y < h\}$ рассмотрим уравнение

$$\partial_{0y}^{\alpha} u = \lambda_1 u_{xxx} + \lambda_2 u_x + \lambda_3 u + f(x,y), \qquad 0 < x < r, \quad 0 < y < h, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u_x(0,y) = u_x(r,y) = u_{xx}(0,y) = 0, \qquad 0 < y < h, \tag{2}$$

и начальным условием

$$u(x,0) = \tau(x), \qquad 0 < x < r, \tag{3}$$

где

$$\partial_{0y}^{\alpha} u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^y \frac{u_\tau(x,\tau)}{(y-\tau)^\alpha} d\tau$$

– дробная производная Капуто порядка α, $0<\alpha<1$ [12].

В дальнейшем будем предполагать существование решения $u(x,y)\in C^{3,1}(D)$ задачи (1) – (3), где $C^{3,1}(D)$ – класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными третьего порядка по x и первого порядка по y на D.

Введем следующие обозначения:

$$\|u\|_0^2=\int\limits_0^r u^2(x,y)dx, \qquad D_{0y}^{-\alpha}u(x,y)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^y \frac{u(x,\tau)}{(y-\tau)^{1-\alpha}}d\tau$$

– дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка α [1].

Теорема. *Если* $\lambda_1>0$, $\lambda_3<0$, $f_x(x,y)$, $\tau'(x)\neq 0$ *и* $f(x,y)\in C^{1,0}(D)$, *то для решения* $u=u(x,y)$ *задачи* (1) – (3) *справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_0^2\leq M\left(D_{0y}^{-\alpha}\|f_x\|_0^2+\|\tau'\|_0^2\right). \tag{4}$$

Доказательство. Умножим (1) на $u_{xx}(x,y)$ и проинтегрируем по x от 0 до r:

$$\int\limits_0^r u_{xx}\partial_{0y}^{\alpha}udx=\lambda_1\int\limits_0^r\left(\frac{u_{xx}^2}{2}\right)_x dx+\lambda_2\int\limits_0^r\left(\frac{u_x^2}{2}\right)_x dx+\lambda_3\int\limits_0^r u_{xx}udx+\int\limits_0^r u_{xx}fdx. \tag{5}$$

После преобразований, тождество (5) примет вид

$$\int\limits_0^r u_{xx}(x,y)\partial_{0y}^{\alpha}u(x,y)dx=\frac{\lambda_1}{2}\left(u_{xx}^2(r,y)-u_{xx}^2(0,y)\right)+\lambda_2\left(\frac{u_x^2(r,y)-u_x^2(0,y)}{2}\right)+$$

$$+\lambda_3\left(u(r,y)u_x(r,y)-u(0,y)u_x(0,y)\right)-\lambda_3\|u_x\|_0^2+\int\limits_0^r u_{xx}(x,y)f(x,y)dx. \tag{6}$$

Учитывая однородные условия (2), при $\lambda_1>0$ равенство (6) переходит в следующее неравенство

$$\int\limits_0^r u_{xx}\partial_{0y}^{\alpha}udx\leq-\lambda_3\|u_x\|_0^2+\int\limits_0^r u_{xx}fdx. \tag{7}$$

Учитывая полученные результаты в [13] преобразуем слагаемые входящие в неравенство (7)

$$\int\limits_0^r u_{xx}\partial_{0y}^{\alpha}udx=u_x\partial_{0y}^{\alpha}u\Big|_0^r-\int\limits_0^r u_x\partial_{0y}^{\alpha}u_xdx=$$

$$=u_x(r,y)\partial_{0y}^{\alpha}u(r,y)-u_x(0,y)\partial_{0y}^{\alpha}u(0,y)-\int\limits_0^r u_x\partial_{0y}^{\alpha}u_xdx=-\int\limits_0^r u_x\partial_{0y}^{\alpha}u_xdx\leq-\frac{1}{2}\partial_{0y}^{\alpha}\|u_x\|_0^2,$$

$$\left|\int\limits_0^r u_{xx}(x,y)f(x,y)dx\right|=\left|\int\limits_0^r\left(\left[f(x,y)u_x(x,y)\right]_x-f_x(x,y)u_x(x,y)\right)dx\right|=$$

$$= \left| f(r,y)u_x(r,y) - f(0,y)u_x(0,y) - \int\limits_0^r f_x(x,y)u_x(x,y)dx \right| =$$

$$= \left| -\int\limits_0^r f_x(x,y)u_x(x,y)dx \right| \leq \varepsilon \|u_x\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|f_x\|_0^2.$$

Подставляя полученныые неравенства в (7) будем иметь

$$\partial_{0y}^{\alpha}\|u_x\|_0^2 \leq 2(\lambda_3 + \varepsilon)\|u_x\|_0^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|f_x\|_0^2. \quad (8)$$

Полагая $-\lambda_3 = \varepsilon$ и применив к обеим частям неравенства (8) оператор дробного интегрирования $D_{0y}^{-\alpha}$, приходим к следующему неравенству

$$\|u_x\|_0^2 \leq \frac{1}{2\lambda_3} D_{0y}^{-\alpha}\|f_x\|_0^2 + \|\tau'\|_0^2. \quad (9)$$

Учитывая неравенство $\|u_x\|_0^2 \geq \frac{2}{r^2}\|u\|_0^2$, из (9) получим априорную оценку (4) с константой $M = max\left\{-\dfrac{r^2}{4\lambda_3}, \dfrac{r^2}{2}\right\}$. Из априорной оценки (4) следует единственность и непрерывная зависимость решения задачи от входных данных. □

Список литературы

[1] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с. [Nakhushev A. M., *Drobnoe ischislenie i ego primenenie*, Fizmatlit, Moskva, 2003, 272 pp.]

[2] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И., *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987, 668 с. [Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I., *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya*, Nauka i tekhnika, Minsk, 1987, 668 pp.]

[3] Block H., "Sur les equations lineaires aux derivees partielles a carateristiques multiples", *Ark. mat., astron., fys*, **7**:13 (1912), 1–34.

[4] Del Vecchio E., "Sulle equazioni $Z_{xxx} - Z_y + \varphi_1(x,y) = 0$, $Z_{xxx} - Z_{yy} + \varphi_1(x,y) = 0$", *Mem. Real acad. cienc. Torino.*, **66** (1915), 1–41.

[5] Del Vecchio E., "Sulle deux problems d'integration pour las equazions paraboliques $Z_{xxx} - Z_y = 0$, $Z_{xxx} - Z_{yy} = 0$", *Ark. mat., astron., fys.*, **11** (1916), 32–34.

[6] Cattabriga L., "Potenzialli di linia edi domino per equation nom paraboliche in olue variabli a caracteristiche multiple", *Rendi del Som. Mat. della Univ. di Padova.*, **3** (1961), 1–45.

[7] Cattabriga L., "Un problema al kontorno per una equazione di ordine dispary", *Analli della scuola normale superior di pisa fis e mat.*, **3**:2 (1959), 163–169.

[8] Джураев Т. Д., *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов*, ФАН, Ташкент, 1979, 236 с. [Dzhuraev T. D., *Kraevye zadachi dlya uravneniy smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov*, FAN, Tashkent, 1979, 236 pp.]

[9] Карова Ф. А., "Устойчивость и сходимость разностных схем, аппроксимирующих краевые задачи для уравнения Аллера с дробной производной по времени", *Известия КБНЦ РАН*, 2015, №3(65), 33–40. [Karova F. A., "Ustoychivost' i skhodimost' raznostnykh skhem, approksimiruyushchikh kraevye zadachi dlya uravneniya Allera s drobnoy proizvodnoy po vremeni", *Izvestiya KBNTs RAN*, 2015, №3(65), 33–40].

[10] Шхагапсоев А. М., "Априорная оценка задачи Каттабрига для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками", *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2016, №4-1(16), 66–71. [Shkhagapsoev A. M., "A priori evaluation of the task of Cattabriga for the generalized third-order equation with multiple characteristics", *Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki*, 2016, №4-1(16), 66–71].

[11] Шхагапсоев А. М., "Априорные оценки решения краевых задач для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками", *Известия КБНЦ РАН*, 2016, № 6(74), 96–101. [Shkhagapsoev A. M., "Apriornye otsenki resheniya kraevykh zadach dlya obobshchennogo uravneniya tret'ego poryadka s kratnymi kharakteristikami", *Izvestiya KBNTs RAN*, 2016, № 6(74), 96–101].

[12] Caputo M., "Elasticita e Dissipazione", *Bologna (in Italian)*, 1969.

[13] Алиханов А. А., "Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка", *Дифференциальные уравнения*, 2010, № 5(46), 658–664. [Alikhanov A. A., "Apriornye otsenki resheniy kraevykh zadach dlya uravneniy drobnogo poryadka", *Differentsial'nye uravneniya*, 2010, № 5(46), 658–664].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

[2] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 668 с.

[3] Block H. Sur les equations lineaires aux derivees partielles a carateristiques multiples // Ark. mat., astron., fys. 1912. vol. 7. issue 13. pp. 1–34.

[4] Del Vecchio E. Sulle equazioni $Z_{xxx} - Z_y + \varphi_1(x,y) = 0$, $Z_{xxx} - Z_{yy} + \varphi_1(x,y) = 0$ // Mem. Real acad. cienc. Torino. 1915. vol. 66. pp. 1–41.

[5] Del Vecchio E. Sulle deux problems d'integration pour las equazions paraboliques $Z_{xxx} - Z_y = 0$, $Z_{xxx} - Z_{yy} = 0$ // Ark. mat., astron., fys. 1916. vol. 11. pp. 32–34.

[6] Cattabriga L. Potenzialli di linia edi domino per equation nom paraboliche in olue variabli a caracteristiche multiple // Rendi del Som. Mat. della Univ. di Padova. 1961. vol. 3. pp. 1–45.

[7] Cattabriga L. Un problema al kontorno per una equazione di ordine dispary // Analli della scuola normale superior di pisa fis e mat. 1959. vol. 3. issue 2. pp. 163–169.

[8] Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН. 1979. 236 с.

[9] Карова Ф. А. Устойчивость и сходимость разностных схем, аппроксимирующих краевые задачи для уравнения Аллера с дробной производной по времени // Известия КБНЦ РАН. 2015. №3(65). С. 33–40.

[10] Шхагапсоев А. М. Априорная оценка задачи Каттабрига для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. №4-1(16). С. 66–71.

[11] Шхагапсоев А. М. Априорные оценки решения краевых задач для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Известия КБНЦ РАН. 2016. №6(74). С. 96–101.

[12] Caputo M. Elasticita e Dissipazione Bologna (in Italian). 1969

[13] Алиханов А. А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2010. №5(46). С. 658–664.

Для цитирования: Шхагапсоев А. М. Априорная оценка решения аналога второй краевой задачи для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2017. № 3(19). C. 20-24. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-19-3-20-24

For citation: Shkhagapsoev A. M. A priori estimate of the solution of the analogue of the second boundary-value problem for the generalized third-order equation with short characteristics, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2017, **19**: 3, 20-24. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-19-3-20-24

Поступила в редакцию / Original article submitted: 20.09.2017