Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2017. № 3(19). C. 5-9. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2017-19-3-5-9

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ МАККЕНДРИКА - ФОН ФЁРСТЕРА С ОПЕРАТОРОМ КАПУТО

Р. З. Березгова

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, д. 89А

E-mail: berezgova.rita@gmail.com

Для нагруженного уравнения Маккендрика – фон Фёрстера с оператором Капуто рассматривается нелокальная краевая задача с интегральным условием. Доказана теорема существования и единственности решения поставленной задачи.

Ключевые слова: уравнение Маккендрика – фон Фёрстера, нагруженное уравнение, оператор Капуто.

MATHEMATICS

MSC 35M12

ON A NONLOCAL BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE MCKENDRICK VON FOERSTER LOADED EQUATION WITH CAPUTO OPERATOR

R. Z. Berezgova

Institute of Applied Mathematics and Automation, 89 A, Shortanov St, Nalchik, 360000

E-mail: berezgova.rita@gmail.com

In this paper we consider a nonlocal boundary value problem with an integral condition for the McKendrick von Foerster loaded equation with the Caputo operator. The existence and uniqueness theorem for the solution of the problem is proved.

Key words: McKendrick von Foerster equation, loaded equation, Caputo operator.

Введение

В данной работе предложено обобщение уравнения Маккендрика – фон Фёрстера с помощью оператора Капуто по временной переменной.

Постановка задачи

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ рассматривается следующее уравнение

$$u_x(x,t) + \partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) + \mu u(x,t) + \mu_1 u(x_1,t) = 0, \tag{1}$$

где ∂_{0t}^{α} - оператор Капуто порядка $\alpha \in]0,1]$ [1, с. 11]. Уравнение (1) является нелокальным и оно относится к классу нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. При $\alpha = 1$, $\mu_1 = 0$ уравнение (1) носит название уравнения неразрывности Маккендрика – фон Фёрстера [2, с. 244].

Определение. Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x,t)$ из класса $u(x,t) \in C(\overline{\Omega})$, $u(x,t)$ непрерывно дифференцируема по x, а $\partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) \in C(\Omega)$, $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) в области Ω.

В работе исследована следующая

Задача. *Найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее следующим условиям:*

$$u(0,t) = \int_0^l \beta(\xi,t) u(\xi,t) d\xi, \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3}$$

где $\beta(x,t) \in C([0,l] \times [0,T])$, $\tau(x) \in C[0,l]$ – заданные функции.

Неоднородное уравнение (1) при $\mu_1 \equiv 0$ было исследовано в [3, с. 68]. Уравнение (1) при $\alpha = 0$ было рассмотрено многими авторами. В работах [4]-[5] для уравнения (1) были рассмотрены нелимитированная и лимитированная популяционные модели динамики возрастной структуры популяции. В [6] исследована математическая модель динамики возрастного состава и численности популяции с изъятием особей из популяции, рассматривается метод решения задачи оптимизации возрастной структуры популяции.

Представление решения

Для решения задачи (1)-(3) воспользуемся вспомогательной задачей. Сделав замену $u(x,t) = \vartheta(x,t) e^{-\mu x}$ в уравнении (1) приходим к следующему уравнению

$$\vartheta_x(x,t) + \partial_{0t}^{\alpha} \vartheta(x,t) = -\mu_1 \vartheta(x_1,t) e^{\mu(x-x_1)}. \tag{4}$$

Условия (2) и (3) для уравнения (4) примут вид

$$\vartheta(0,t) = \int_0^l \beta(\xi,t) \vartheta(\xi,t) e^{-\mu\xi} d\xi, \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

$$\vartheta(x,0)=\tau(x)e^{\mu x},\quad 0\leq x\leq l. \tag{6}$$

Условие (5) перепишем виде

$$\vartheta(0,t)=\varphi(t),\quad 0\leq t\leq T. \tag{7}$$

Чтобы найти решение $\vartheta(x,t)$ задачи (4)-(6), воспользуемся решением уравнения (4) с условиями (6), (7), которое выписывается в виде [3, с. 66]:

$$\vartheta(x,t)=\int\limits_0^t\varphi(\eta)w(x,t-\eta)d\eta+\int\limits_0^x\tau(\xi)e^{\mu\xi}w_1(x-\xi,t)d\xi-$$

$$-\int\limits_0^x\int\limits_0^t\mu_1\vartheta(x_1,\eta)e^{\mu(\xi-x_1)}w(x-\xi,t-\eta)d\eta d\xi, \tag{8}$$

где $w(x,t)$ и $w_1(x,t)$ определяются следующими равенствами

$$w(x,t)=\frac{1}{t}e^{1,0}_{1,\alpha}\left(-\frac{x}{t^\alpha}\right),\quad w_1(x,t)=-\frac{1}{x}e^{0,1}_{1,\alpha}\left(-\frac{x}{t^\alpha}\right),$$

а $e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z)$ – функция типа Райта [3, с. 22]. Найдем $\vartheta(x_1,t)$. При $x=x_1$ (8) примет вид

$$\vartheta(x_1,t)=\int\limits_0^t\varphi(\eta)w(x_1,t-\eta)d\eta+\int\limits_0^{x_1}\tau(\xi)e^{\mu\xi}w_1(x_1-\xi,t)d\xi-$$

$$-\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^t\mu_1\vartheta(x_1,\eta)e^{\mu(\xi-x_1)}w(x_1-\xi,t-\eta)d\eta d\xi.$$

Чтобы найти функцию $\varphi(t)$ удовлетворим (8) условию (5)

$$\varphi(t)=\int\limits_0^l\beta(\xi,t)e^{\mu\xi}\left[\int\limits_0^t\varphi(\eta)w(\xi,t-\eta)d\eta+\int\limits_0^\xi\tau(\zeta)e^{\mu\zeta}w_1(\xi-\zeta,t)d\zeta-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^\xi\int\limits_0^t\mu_1\vartheta(x_1,\eta)e^{\mu(\zeta-x_1)}w(\xi-\zeta,t-\eta)d\eta d\zeta\right]d\xi.$$

Относительно $\vartheta(x_1,t)$ и $\varphi(t)$ получаем систему интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода

$$\begin{cases}\vartheta(x_1,t)+\int\limits_0^t\vartheta(x_1,\eta)K_1(t-\eta)d\eta-\int\limits_0^t\varphi(\eta)w(x_1,t-\eta)d\eta=\int\limits_0^{x_1}\tau(\xi)e^{\mu\xi}w_1(x_1-\xi,t)d\xi,\\ \varphi(t)-\int\limits_0^t\varphi(\eta)K_2(t-\eta)d\eta+\int\limits_0^t\vartheta(x_1,\eta)K_3(t-\eta)d\eta=\int\limits_0^l\beta(\xi,t)e^{-\mu\xi}\int\limits_0^\xi\tau(\zeta)e^{\mu\zeta}w_1(\xi-\zeta,t)d\zeta d\xi,\end{cases} \tag{9}$$

где ядра $K_1(t-\eta)$, $K_2(t-\eta)$, $K_3(t-\eta)$ имеют вид

$$K_1(t-\eta)=\int\limits_0^{x_1}\mu_1e^{\mu(\xi-x_1)}w(x_1-\xi,t-\eta)d\xi, K_2(t-\eta)=\int\limits_0^l\beta(\xi,t)_1e^{-\mu\xi}w(\xi,t-\eta)d\xi,$$

$$K_3(t-\eta)=\mu_1\int\limits_0^l\beta(\xi,t)e^{-\mu\xi}\int\limits_0^\xi e^{\mu(\zeta-x_1)}w(\xi-\zeta,t-\eta)d\zeta d\xi.$$

Известно [7, с. 45], что система (9) однозначно разрешима.

Таким образом показано, что, если $\vartheta(x,t)$ является решением задачи (4)-(6), то оно представимо в виде (8). Из соотношения (8) следует единственность решения $\vartheta(x,t)$. Доказательство того, что функция $\vartheta(x,t)$ является искомым решением проводится так же, как и доказательство теоремы 2.6.1 в работе [3, с. 67].

Далее сделав обратную замену, получаем решение уравнения (1) с условиями (2)-(3)

$$u(x,t)=e^{-\mu x}\int\limits_0^t\varphi(\eta)w(x,t-\eta)d\eta+e^{-\mu x}\int\limits_0^x\tau(\xi)e^{\mu\xi}w_1(x-\xi,t)d\xi-$$

$$-\mu_1e^{-\mu x}\int\limits_0^x\int\limits_0^t u(x_1,\eta)e^{\mu\xi}w(x-\xi,t-\eta)d\eta d\xi, \tag{10}$$

где $\varphi(t)$ и $u(x_1,t)$ решения системы интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода (9).

Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Пусть* $0<\alpha<1$, $\tau(x)\in C[0,l]$ *удовлетворяет условию Гельдера и выполнено условие согласования*

$$\int\limits_0^l\beta(\xi,0)\tau(\xi)d\xi=\tau(0),$$

тогда существует единственное регулярное решение уравнения (1) с условиями (2), (3), которое имеет вид (10).

Заключение

В работе найдено решение нагруженного обобщенного уравнения Маккендрика – фон Фёрстера с нелокальным краевым условием путем сведения к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода.

Список литературы

[1] Нахушев А.М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с. [Nakhushev A.M., *Drobnoe ischislenie i ego primenenie*, Fizmatlit, Moskva, 2003, 272 pp.]

[2] Нахушев А.М., *Уравнения математической биологии*, Учеб. пособие для университетов, Высшая школа, М., 1995, 301 с. [Nakhushev A.M., *Uravnenija matematicheskoi biologii*, Vysshaya shkola, Moskva, 1995].

[3] Псху А.В., *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005, 199 с. [Pskhu A.V., *Uravnenija v chastnyh proizvodnyh drobnogo poryadka*, Nauka, Moskva, 2005, 199 pp.]

[4] Кайгермазов А.А., Кудаева Ф.Х., “Об одной математической модели динамики возрастной структуры”, *Естественные и математические науки в современном мире*, 2014, № 25, 17–26. [Kaygermazov A.A., Kudaeva F.H., “Ob odnoi matematicheskoi modeli dinamiki vozrastnoi struktury”, *Estestvennyie i matematicheskie nauki v sovremennom mire*, 2014, № 25, 17–26].

[5] Сайег Т.Х., Кайгермазов А.А., Кудаева Ф.Х., “Об одной математической модели динамики численности популяции с возрастной структурой”, *Актуальные проблемы современной науки*, IV Международная научно-практическая конференция, 2015, 271–275. [Sayeg T.Kh, Kaygermazov A.A, Kudaeva F.H., “Ob odnoi matematicheskoi modeli dinamiki chislennosti populyatsii s vozrastnoi strukturoi”, *Aktual'nyie problemy sovremennoi nauki*, IV Mejdunarodnay nauchno-prakticheskay konferenciya, 2015, 271–275].

[6] Брежнев А.И., Гинзбург Л.Р., Полуэктов Р.А., Швытов И.А., “Математические модели биологических сообществ и задачи управления”, *Математическое моделирование в биологии*, Наука, М., 1975, 92–112. [Brezhnev A.I., Ginzburg L.R., Poluektov R.A., Shvytov I.A., “Matematicheskie modeli biologicheskih soobshestv i zadachi upravlenija”, *Matematicheskoe modelirovanie v biologii*, Nauka, Moskva, 1975, 92–112].

[7] Манжиров А.В., Полянин А.Д., *Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения*, Факториал-Пресс, М., 2000, 384 с. [Manzhirov A.V., Polyanin A.D., *Spravochnik po integral'nym uravnenijam. Metody reshenija.*, Factorial-Press, Moskva, 2000, 384 pp.]

Список литературы (ГОСТ)

[1] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

[2] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. Учеб. пособие для университетов. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.

[3] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М: Наука, 2005. 199 с.

[4] Кайгермазов А.А., Кудаева Ф.Х. Об одной математической модели динамики возрастной структуры // Естественные и математические науки в современном мире. 2014. № 25. С. 17–26.

[5] Сайег Т.Х., Кайгермазов А.А., Кудаева Ф.Х. Об одной математической модели динамики численности популяции с возрастной структурой // Сборник IV Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы современной науки». 2015. С. 271–275.

[6] Брежнев А.И., Гинзбург Л.Р., Полуэктов Р.А., Швытов И.А. Математические модели биологических сообществ и задачи управления. Математическое моделирование в биологии. М.: Наука. 1975. С. 92–112.

[7] Манжиров А.В., Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. М.: Факториал-Пресс, 2000. 384 с.

Для цитирования: Березгова Р. З. Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного уравнения Маккендрика-Фон Ферстера с оператором Капуто // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2017. № 3(19). С. 5-9. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-19-3-5-9

For citation: Berezgova R. Z. On a nonlocal boundary-value problem for the Mckendrick Von Foerster loaded equation with Caputo operator, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2017, **19**: 3, 5-9. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-19-3-5-9

Поступила в редакцию / Original article submitted: 20.09.2017