Г. М. Водинчар, Л. К. Крутьева, Базисные системы для геомагнитного поля, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2010, выпуск 1(1), 24–30

DOI: http://dx.doi.org/10.18454/2079-6641-2010-1-1-24-30

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2010. № 1(1). С. 24-30. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2010-1-1-24-30

Математическое моделирование

УДК 27.35:37.15

БАЗИСНЫЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ ГЕОМАГНИТНОГО ПОЛЯ*

Г.М. Водинчар[1,2], Л.К. Крутьева[1]

[1] Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7

[2] Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: gvodinchar@ikir.ru, kruteva_lu@mail.ru

Описана система собственных соленоидальных полей оператора Лапласа, которые можно использовать для разложения геомагнитного поля в ядре Земли. Граничные условия обеспечивают непрерывный переход поля в референтное геомагнитное поле.

Ключевые слова: геодинамо, ядро Земли, спектральные методы математической физики

Mathematical simulation

MSC 76W05:86A25

BASIC SYSTEMS FOR THE GEOMAGNETIC FIELD

G.M. Vodinchar[1,2], L.K. Kruteva[1]

[1] Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

[2] Kamchatka State University by Vitus Bering, 683032, Petropavlovsk-Kamchatskiy, Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: gvodinchar@ikir.ru, kruteva_lu@mail.ru

The system of own solenoidal fields of operator Laplace which can be used for decomposition of a geomagnetic field in a kernel of the Earth is described. Boundary conditions provide continuous transition of a field in a referential geomagnetic field.

Key words: geodynamo, kernel of the Earth, spectral methods of mathematical physics

*Работа выполнена по теме НИР № 01201052397 и при финансовой поддержке гранта ДВО РАН № 10-III-В-07-158.

Введение

При изучении проблемы геодинамо спектральными методами магнитное поле представляется разложением по некоторой системе стационарных базисных полей с зависящими от времени коэффициентами. Выбор такой системы неоднозначен и определяется во многом вычислительными удобствами, аппроксимирующими свойствами системы, сложностью ее представления, налагаемыми краевыми условиями и т. п. Учитывая сферическую геометрию задачи, чаще всего в таких системах используют произведения сферических гармоник на некоторые радиальные функции. Желательными свойствами базисных систем являются ортогональность и полнота относительно подходящего скалярного произведения.

В настоящей работе предлагается базисная система для магнитного поля в ядре Земли и изучаются ее свойства. Считаем, что вне ядра электрические токи отсутствуют и магнитная проницаемость всего пространства постоянна. Это приводит к непрерывности поля во всем пространстве, потенциальности внешнего магнитного поля (поля вне ядра) $\mathbf{B}^{out}$ и нулевой радиальной составляющей ротора поля (плотности тока) на границе ядро – мантия. Граничные условия такого типа известны как вакуумные граничные условия [1, 2].

Внешнее поле и граничные условия

Пусть $r = r_1$ и $r = r_2$ являются соответственно внутренней и внешней границами жидкого ядра. Тогда потенциальное внешнее магнитное поле можно представить в виде $\mathbf{B}^{out} = -\mathrm{grad}U$, где потенциал раскладывается в ряд по сферическим гармоникам

$$U = r_2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_2}\right)^{-(n+1)} \sum_{m=-n}^{n} A_n^m(t) Y_n^m(\theta,\varphi). \tag{1}$$

Такое представление аналогично моделям класса IGRF для референтного поля вне Земли [3, 4]. Различие лишь в том что в моделях IGRF используется радиус Земли r_E вместо r_2. Кроме того, в отличие от этих моделей мы будем использовать для сферических гармоник не нормировку Шмидта, а среднеквадратичную нормировку.

Напомним, что любое соленоидальное поле можно разложить в сумму тороидальной $\mathbf{T}_\Phi = \mathrm{rot}(\Phi\mathbf{r})$ и полоидальной $\mathbf{S}_\Psi = \mathrm{rotrot}(\Psi\mathbf{r})$ составляющих, где Φ и Ψ – некоторые подходящие скалярные функции. При этом [5]

$$\mathrm{rot}\mathbf{T}_\Phi = \mathbf{S}_\Phi,\ \mathrm{rot}\mathbf{S}_\Psi = \mathbf{T}_{-\Delta\Psi},\ \Delta\mathbf{T}_\Phi = \mathbf{T}_{\Delta\Phi},\ \Delta\mathbf{S}_\Psi = \mathbf{S}_{\Delta\Psi}. \tag{2}$$

Кроме явного представления через потенциал внешнее поле можно записать в виде

$$\mathbf{B}^{out} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_n^m(t)\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\left(\frac{r_2}{n}\left(\frac{r}{r_2}\right)^{-(n+1)} Y_n^m(\theta,\varphi)\mathbf{r}\right). \tag{3}$$

В справедливости этого разложения можно убедиться непосредственным вычислением двойного ротора в формуле (3) и градиента выражения (1).

Из формулы (3) видно, что внешнее поле является чисто полоидальным и разлагается в линейную комбинацию элементарных полоидальных компонент

$$\mathbf{B}_{nm}^{out} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\left(\frac{r_2}{n}\left(\frac{r}{r_2}\right)^{-(n+1)} Y_n^m(\theta,\varphi)\mathbf{r}\right). \tag{4}$$

Для магнитного поля внутри ядра также будем использовать разложения по сферическим функция на нестационарные тороидальные и полоидальные составляющие

$$\mathbf{B}_{nm}^{T} = \mathrm{rot}\left(Z_{nm}^{T}(r,t)Y_n^m(\theta,\varphi)\mathbf{r}\right) \text{ и } \mathbf{B}_{nm}^{S} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\left(Z_{nm}^{S}(r,t)Y_n^m(\theta,\varphi)\mathbf{r}\right)$$

с пока произвольными функциями $Z_{nm}^T(r,t)$ и $Z_{nm}^P(r,t)$. Системы полей $\mathbf{B}_{nm}^T$ и $\mathbf{B}_{nm}^S$ определяют структуры различных масштабов по переменным θ и φ. Для выделения разных масштабов по радиальной переменной вводим (пока формальные) разложения

$$Z_{nm}^{T}(r,t) = \sum_k {}_k\gamma_{nm}^{T}(t)R_{knm}^{T}(r), Z_{nm}^{S}(r,t) = \sum_k {}_k\gamma_{nm}^{S}(t)R_{knm}^{S}(r)$$

и соответствующие стационарные базисные поля

$${}_k\mathbf{B}_{nm}^{T} = \mathrm{rot}\left(R_{knm}^{T}(r)Y_n^m(\theta,\varphi)\mathbf{r}\right) \text{ и } {}_k\mathbf{B}_{nm}^{S} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\left(R_{knm}^{S}(r)Y_n^m(\theta,\varphi)\mathbf{r}\right).$$

Не конкретизируя пока функции $R_{knm}^T(r)$ и $R_{knm}^S(r)$, получим для них граничные условия. Из определений тороидальных и полоидальных полей следуют разложения по локальному сферическому базису [5]:

$$\begin{aligned}
&{}_k\mathbf{B}_{nm}^{T} = R_{knm}^{T}\frac{m}{\sin\theta}Y_n^{-m}\mathbf{e}_\theta - R_{knm}^{T}\frac{\partial Y_n^m}{\partial\theta}\mathbf{e}_\varphi,\\
&{}_k\mathbf{B}_{nm}^{S} = \frac{R_{knm}^{S}}{r}n\,(n+1)\,Y_n^m\mathbf{e}_r + \\
&+\left(\frac{dR_{knm}^{S}}{dr}+\frac{R_{knm}^{S}}{r}\right)\left(\frac{\partial Y_n^m}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{m}{\sin\theta}Y_n^{-m}\mathbf{e}_\varphi\right),\\
&\mathrm{rot}_k\mathbf{B}_{nm}^{T} = \frac{R_{knm}^{T}}{r}n\,(n+1)\,Y_n^m\mathbf{e}_r + \\
&+\left(\frac{dR_{knm}^{T}}{dr}+\frac{R_{knm}^{T}}{r}\right)\left(\frac{\partial Y_n^m}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{m}{\sin\theta}Y_n^{-m}\mathbf{e}_\varphi\right),\\
&\mathrm{rot}_k\mathbf{B}_{nm}^{S} = \left(-\mathscr{L}_n R_{knm}^{S}\right)\left(\frac{m}{\sin\theta}Y_n^{-m}\mathbf{e}_\theta - \frac{\partial Y_n^m}{\partial\theta}\mathbf{e}_\varphi\right),
\end{aligned} \tag{5}$$

где оператор

$$\mathscr{L}_n = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2}. \tag{6}$$

Рассмотрим граничные условия при $r = r_2$ для тороидальных компонент ${}_k\mathbf{B}_{nm}^T$. Поскольку тороидальная часть внешнего поля отсутствует, получаем условие непрерывного перехода в виде ${}_k\mathbf{B}_{nm}^T(r = r_2) = 0$. С учетом первой формулы из разложений (5) $R_{knm}^T(r_2) = 0$. Условие непроницания для токов $\mathrm{rot}_k\mathbf{B}_{nm}^T$ через границу $r = r_2$, т. е. отсутствия радиальной проекции у тока на этой границе, также приводит, как видно из третьей формулы (5), к условию $R_{knm}^T(r_2) = 0$.

Таким образом, граничные условия для тороидальных компонент ${}_k\mathbf{B}^T_{nm}$ имеют вид

$$R^T_{knm}(r_2) = 0. \tag{7}$$

Теперь рассмотрим граничные условия для полоидальных компонент ${}_k\mathbf{B}^S_{nm}$. Из четвертой формулы разложений (5) видно, что требование непроницания для порождаемых ими токов $\mathrm{rot}_k\mathbf{B}^S_{nm}$ через границу $r = r_2$ выполняется автоматически, поэтому необходимо обеспечить лишь непрерывный переход этих компонент в соответствующие компоненты внешнего полоидального поля.

Полагая во втором равенстве (5) $R^S_{knm} = (r_2/n)\,(r/r_2)^{-(n+1)}$, получим по формуле (3):

$$\mathbf{B}^{out}_{nm} = \left(\frac{r}{r_2}\right)^{-n-2}(n+1)Y^m_n\mathbf{e}_r - \left(\frac{r}{r_2}\right)^{-n-2}\left(\frac{\partial Y^m_n}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{m}{\sin\theta}Y^{-m}_n\mathbf{e}_\varphi\right). \tag{8}$$

Поскольку отвечающая паре сферических индексов (n,m) комбинация внутренних мод $\sum\limits_k {}_k\gamma_{nm}(t)\mathbf{B}^S_{nm}$ должна на границе перейти в аналогичную внешнюю моду $A^m_n(t)\mathbf{B}^{out}_{nm}$, то, приравнивая соответствующие проекции из (8) и второй формулы (5) при $r = r_2$, получим:

$$\begin{gathered}\sum_k {}_k\gamma_{nm}(t)R^S_{knm}(r_2) = \frac{r_2}{n}A^m_n(t),\\ \sum_k {}_k\gamma_{nm}(t)\left.\frac{dR^S_{knm}(r)}{dr}\right|_{r=r_2} = -\frac{n+1}{n}A^m_n(t).\end{gathered} \tag{9}$$

Выражая из обеих формул (9) $A^m_n(t)$ и приравнивая эти выражения, можем записать граничные условия для $R^S_{knm}(r)$:

$$\frac{1}{r_2}R^S_{knm}(r_2) + \frac{1}{n+1}\left.\frac{dR^S_{knm}(r)}{dr}\right|_{r=r_2} = 0. \tag{10}$$

Также необходимо обеспечить интегрируемость квадрата поля во всем пространстве, т. е. конечность энергии поля. При $r \to \infty$ это гарантирует асимптотика внешнего поля. Действительно, легко получить, что объемный интеграл

$$\int\limits_{r>r_2} \left(\mathbf{B}^{out}_{nm}\right)^2 dV = r_2^3\,(n+1)\,.$$

В центре ядра будем требовать конечности базисных мод, т. е. конечности пределов:

$$\lim_{r\to 0} R^T_{knm}(r),\ \lim_{r\to 0}\frac{R^S_{knm}(r)}{r},\ \lim_{r\to 0}\frac{dR^S_{knm}}{dr}.$$

Построение базисных систем

Выбирая различные системы функций $R^T_{knm}(r)$ и $R^S_{knm}(r)$, удовлетворяющие соответственно условиям (7) и (10), можно получать различные системы для разложения магнитного поля в ядре. Сам этот выбор может быть обусловлен многими соображениями (например, упомянутыми во введении). Рассмотрим далее один из возможных вариантов.

Поскольку соответствующим образом обезразмеренное уравнение индукции в ядре Земли имеет вид [1, 2]

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + q^{-1}\mathrm{Pr}^{-1} \triangle \mathbf{B},$$

где Pr – число Прандтля, q – число Робертса, $\mathbf{v}$ – скорость, то наиболее естественно использовать в качестве базисных компонент собственные поля оператора Лапласа. Обозначим временно $R^T_{knm}(r)$ или $R^S_{knm}(r)$ через $Z(r)$.

Будем использовать далее разложение скалярного оператора Лапласа на радиальную и угловую части: $\Delta = \Delta_r + \left(1/r^2\right)\Delta_s$, где

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right),\ \Delta_s = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

При этом известно, что $\Delta_s Y_n^m = -n(n+1)Y_n^m$.

Рассмотрим задачу $\Delta(Z(r)Y_n^m) + \eta Z(r)Y_n^m = 0$. Используя уже приведенное разложение оператора Лапласа, получаем, что задача равносильна равенству $\mathscr{L}_n Z + \eta Z = 0$. Тогда $Z(r)$ имеют вид [6]

$$Z(r) = A\, j_n(\sqrt{\eta}r) + B y_n(\sqrt{\eta}r),$$

где $j_n(\cdot)$, $y_n(\cdot)$ – сферические функции Бесселя первого и второго родов соответственно. Известно, что $y_n(0) = \infty$. Поэтому для того, чтобы собственные функции были ограничены в центре ядра, необходимо положить $B = 0$.

Рассмотрим теперь граничные условия для разных типов полей.

Для тороидальных полей условия (7) на собственные функции $Z(r)$ приводят к уравнению

$$A\, j_n(\sqrt{\eta}r_2) = 0. \tag{11}$$

Условие нетривиальной разрешимости $(A \neq 0)$ этого уравнения определяет для каждого n счетное множество собственных значений $\eta = \eta^T_{kn}, k = 0, 1, 2, ...$, как решений уравнения $j_n(\sqrt{\eta}r_2) = 0$. После нахождения η^T_{kn} определяем коэффициент $A = A^T_{kn}$ из условия нормировки

$$n(n+1)\int_0^{r_2}\left[A^T_{kn} j_n\left(\sqrt{\eta^T_{kn}}r\right)\right]^2 r^2\, dr = 1,$$

смысл которого поясним позже. Тогда собственные функции $R^T_{knm}(r) = A^T_{kn} j_n\left(\sqrt{\eta^T_{kn}}r\right)$ в действительности не зависят от индекса m. Поэтому в дальнейшем будем записывать их как $R^T_{kn}(r)$.

Итак, получаем тороидальные базисные поля ${}_k\mathbf{B}^T_{nm} = \operatorname{rot}\left(R^T_{kn}(r)Y_n^m(\theta,\varphi)\mathbf{r}\right)$. Приведенное условие нормировки для $R^T_{kn}(r)$ обеспечивает нормировку вида

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} ({}_k\mathbf{B}^T_{nm})^2\, dV = 1,$$

которая соответствует единичной безразмерной энергии, выделяемой полями ${}_k\mathbf{B}^T_{nm}$ во всем пространстве.

Тогда вся тороидальная составляющая магнитного поля в ядре $\mathbf{B}^T$ будет представляться как

$$\mathbf{B}^T = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} {}_k\gamma_{nm}^T(t)\,{}_k\mathbf{B}_{nm}^T.$$

Для полоидальных полей граничные условия (10) на собственные функции $Z(r) = A\,j_n(\sqrt{\eta}r)$ дают уравнение

$$A\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{n+1}\frac{d}{dr}\right] j_n(\sqrt{\eta}r)\bigg|_{r=r_2} = 0. \qquad (12)$$

Аналогично тороидальному случаю получаем для каждого n счетное множество собственных значений $\eta = \eta_{kn}^S, k = 0,1,2,...$, а затем и коэффициенты A_{kn}^S с помощью нормировки, которую опишем далее. Собственные функции $R_{knm}^S(r) = A_{kn}^S j_n\left(\sqrt{\eta_{kn}^S}r\right)$ снова не зависят от индекса m и в дальнейшем обозначаются как $R_{kn}^S(r)$.

Таким образом, полоидальные базисные поля имеют вид ${}_k\mathbf{B}_{nm}^S = \mathrm{rot}\left(R_{kn}^S(r)Y_n^m(\theta,\varphi)\mathbf{r}\right)$, а вся полоидальная составляющая магнитного поля в ядре определится как

$$\mathbf{B}^S = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} {}_k\gamma_{nm}^S(t)\,{}_k\mathbf{B}_{nm}^S.$$

Из построения функций $R_{kn}^S(r)$ следует, что они могут быть гладко продолжены с отрезка $[0;r_2]$ на интервал $(r_2;+\infty)$ выражением $R_{kn}^S(r_2)\,(r/r_2)^{-(n+1)}$, обеспечивая тем самым непрерывный переход $\sum\limits_{k=0}^{\infty} {}_k\gamma_{nm}^S(t)\,{}_k\mathbf{B}_{nm}^S$ в $A_n^m(t)\mathbf{B}_{nm}^{out}$. При этом из соотношения (3) видно, что

$$A_n^m(t) = \frac{n}{r_2}\sum_{k=0}^{\infty} {}_k\gamma_{nm}^S(t)R_{kn}^S(r_2).$$

Условие нормировки выберем в виде

$$\int_{\mathbb{R}^3} ({}_k\mathbf{B}_{nm}^P)^2\,dV = \int_0^{+\infty}\left[R_{kn}^{BP}\right]^2 n^2(n+1)^2\,dr + \int_0^{+\infty}\left[\frac{R_{kn}^{BP}}{r}+\frac{dR_{kn}^{BP}}{dr}\right]^2 r^2 n(n+1)\,dr = 1.$$

Как и в тороидальном случае, это условие приводит к единичной энергии, выделяемой полем ${}_k\mathbf{B}_{nm}^S$ во всем пространстве. В левой части последнего равенства интегрирование ведется по всему пространству, а правая часть представляет из себя результат аналитического интегрирования в левой части по угловым переменным. При интегрировании по промежутку $r > r_2$ предполагается, что в этот промежуток $R_{kn}^S(r)$ гладко продолжена описанным ранее образом.

Все приведенные расчеты собственных значений η_{kn}^T, η_{kn}^S, коэффициентов функций $R_{kn}^T(r)$, $R_{kn}^S(r)$ были выполнены в пакете MAPLE 12 для $n = 1,2,...,10$ и $k = 0,1,...,6$.

Рассмотрим теперь вопрос об ортогональности систем $\left\{{}_k\mathbf{B}_{nm}^T\right\}$ и $\left\{{}_k\mathbf{B}_{nm}^S\right\}$ в объеме ядра относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$, определяемого формулой

$$\langle\mathbf{p},\mathbf{q}\rangle = \int_{r\le r_2} \mathbf{p}\mathbf{q}\,dV.$$

Известно, что любое тороидальноле поле ортогонально любому полоидальному на сфере. Поэтому системы $\left\{{}_k\mathbf{B}^T_{nm}\right\}$ и $\left\{{}_k\mathbf{B}^S_{nm}\right\}$ ортогональны между собой в ядре. Ортогональны также на сфере [5], а значит, в объеме ядра и однотипные поля, отличающиеся какими-либо сферическими индексами. Рассмотрим теперь поля вида ${}_k\mathbf{B}^T_{nm}$ при фиксированных n и m и различных k. Все такие поля – нулевые при $r = r_2$. Применив к проекциям этих полей на орты декартовой системы координат вторую формулу Грина [6], получим, что оператор Лапласа является самосопряженным в линейной оболочке полей ${}_k\mathbf{B}^T_{nm}$ относительно умножения $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Сами поля – собственные для оператора Лапласа с различными собственными значениями. Значит, они ортогональны между собой.

Полоидальные поля вида ${}_k\mathbf{B}^S_{nm}$ при фиксированных n и m и различных k не обладают свойством ортогональности в ядре.

Заключение

В настоящей работе описаны системы тороидальных и полоидальных полей, которые можно использовать для представления геомагнитного поля в ядре Земли при исследовании задач геодинамо спектральными методами. Системы образованы собственными полями оператора Лапласа в ядре, что делает их очень удобными при выводе в работе с уравнением индукции. Система тороидальных полей ортогональна в объеме ядра, что гарантирует ее хорошие аппроксимирующие свойства. Ортогональности в системе полоидальных полей нет. Это связано с тем, что для полоидальных полей ставится очень жесткое граничное условие, обеспечивающее их непрерывный переход в поля модели IGRF референтного поля. С теоретической точки зрения представляет интерес вопрос о полноте предложенных систем, однако в настоящей работе этот вопрос не рассматривался.

Библиографический список

1. Kono M., Roberts P.H. Recent geodynamo simulations and observations of the field // Reviews of Geophysics. 2002. Vol. 40. № 10. P. B1–B41.

2. Jones C.A. Convection-driven geodynamo models // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 2000. Vol. 358. P. 873–897.

3. Merril R.T., McElhinny M.W., McFadden P.L. The Magnetic Field of the Earth. N.Y.: Acad. Press, 1996. 532 p.

4. International Geomagnetic Reference Field. URL: http://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/igrf.html (дата обращения: 12.08.2010).

5. Chandrasekhar S. Hydrodynamics and hydromagnetic stability. N.Y.: Dover Publ. Inc., 1981. 654 p.

6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 20.10.10