Р. И. Паровик, Метод функции Грина для одного дифференциального уравнения дробного порядка, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2010, выпуск 1(1), 17–23

DOI: http://dx.doi.org/10.18454/2079-6641-2010-1-1-17-23

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2010. № 1(1). С. 17-23. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2010-1-1-17-23

УДК 517.955

МЕТОД ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА*

Р.И. Паровик[1, 2]

[1] Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7

[2] Филиал Дальневосточного государственного технического университета (ДВПИ имени В.В. Куйбышева), 683031, г. Петропавловск-Камчатский, ул.Тушканова, 11/1

E-mail: romano84@mail.ru

Рассмотрено дифференциальное уравнение дробного порядка $0 < \beta < 1$. Построена функция Грина для такого уравнения и показано, что в случае $\beta = 1$ найденное решение переходит в ранее известное классическое решение.

Ключевые слова: функция Грина, задача Коши, оператор Герасимова – Капуто

MSC 35C05

THE METHOD OF GREEN'S FUNCTION FOR ONE DIFFERENTIAL EQUATION OF A FRACTIONAL ORDER

R.I. Parovik[1, 2]

[1] Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

[2] Branch of Far-Eastern National Technical University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatskiy, Tushkanova st. , 11/1, Russia

E-mail: romano84@mail.ru

The differential equation of a fractional order of $0 < \beta < 1$ is considered. Green's function for such equation is constructed and is shown that in a case $\beta = 1$ the found decision passes in earlier known classical decision.

Key words: Green's function, problem of Koshi, ground, Gerasimov – Kaputo operator

*Работа выполнена при поддержке гранта АВЦП «РНПВШ» № 2.1.1/544.

Введение

В настоящее время проявляется повышенный интерес к изучению производных дробного порядка. Это связано с тем, что многие процессы и явления не поддаются описанию в рамках классической теории дифференциальных уравнений целочисленных порядков. Это происходит потому, что процессы и явления устроены довольно сложно, имеют нелинейный характер и являются нелокальными как по времени, так и по пространству. Такие процессы и явления принято описывать с помощью теории дробного исчисления [1, 2].

Изучению нелокальных процессов и явлений посвящены многие статьи и монографии как российских [1]–[5], так и зарубежных авторов [6]–[9]. В одной только книге [2] автор ссылается на тысячу литературных источников. Это говорит о том, что математический аппарат дробного исчисления бурно развивается, что, в свою очередь, определяет необходимость исследования новых дифференциальных уравнений дробного порядка.

Постановка задачи

Задача. *Найти решение $u(x,y)$ для дифференциального уравнения дробного порядка*

$$\frac{\partial^\beta u(x,y)}{\partial y^\beta} = a\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - bu(x,y) + Q, \tag{1}$$

которое удовлетворяет начальному условию

$$u(x,0) = \phi(x)$$

и определено в области

$$\Omega = \{(x,y) : \infty < x < -\infty, 0 < y < T\},\ u(x,y) \in C(\Omega),\ \frac{\partial^\beta u}{\partial y^\beta} \in L[0,T]\,\forall x \in R,$$

где $\dfrac{\partial^\beta u(x,y)}{\partial y^\beta} = \dfrac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int\limits_0^y \dfrac{\partial u(x,\eta)}{\partial \eta}\dfrac{d\eta}{(y-\eta)^\beta}$ *– производная порядка $0<\beta<1$, определенная в смысле Герасимова – Коши [10]; a,b,Q – заданные константы.*

Уравнение (1) может быть использовано при описании массопереноса вещества или теплопереноса в среде с фрактальными свойствами. Тогда в этом случае дробная производная в уравнении (1) – это производная по времени t, a – коэффициент диффузии, b – коэффициент распада или теплоотдачи, Q – источник. Показатель порядка β производной по времени, как это показано в работе [11], соответствует доле каналов, открытых для протекания во фрактальной среде. Такой процесс называют нелокальным по времени, а фрактальную среду, в которой он происходит – средой с памятью.

Метод функции Грина

Найдем функцию Грина для следующего уравнения (1) без источника:

$$\frac{\partial^\beta G_\beta(x,y)}{\partial y^\beta} - a\frac{\partial^2 G_\beta(x,y)}{\partial x^2} + bG_\beta(x,y) = 0, \tag{2}$$

$$G_\beta(x,0) = \delta(x),$$

где $\delta(x)$ – функции Дирака. Сделаем преобразование Лапласа по x и y. Получим следующее уравнение с учетом $\left| a\omega^2 \big/ \left(p^\beta + b\right) \right| < 1$:

$$G_\beta(\omega, p) = \frac{\omega^{-1}}{p^\beta - a\omega^2 + b} = \frac{\omega^{-1}}{\left(p^\beta + b\right)\left(1 - \dfrac{a\omega^2}{p^\beta + b}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n \omega^{2n-1}}{\left(p^\beta + b\right)^{n+1}}. \tag{3}$$

Для выражения (3) известно обратное преобразование Лапласа по p согласно соотношению [6]:

$$L\left[\eta^{\alpha n + \beta - 1}\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^n E_{\alpha,\beta}\left(a\eta^\alpha\right)\right](p) = \frac{n! p^{\alpha-\beta}}{\left(p^\alpha - a\right)^{n+1}},\ n \in N.$$

Тогда получим

$$G_\beta(x,y) = L^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n \omega^{2n-1}}{\left(p^\beta + b\right)^{n+1}}\right](y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a\omega^{2n-1}}{n!} y^{\beta n + \beta - 1} \frac{\partial}{\partial(-b)} E_{\beta, \beta n + \beta}\left(-by^\beta\right) =$$

$$= y^{\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(ay^\beta\right)^n \omega^{2n-1}}{n!} {}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c} (n+1,1) \\ \beta(n+1), \beta \end{array} \middle| -by^\beta\right], \tag{4}$$

где ${}_1\Psi_1(x) = {}_1\Psi_1\left|\begin{array}{c} (\sigma,\alpha) \\ (\mu,\beta) \end{array}\right| x \left| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k \Gamma(\sigma + \alpha k)}{k! \Gamma(\mu + \beta k)}\right.$ – обобщенная функция Райта. Обратное преобразование Лапласа выражения по x (4) дает, согласно преобразованию $L\left[t^k\right] = \dfrac{k!}{p^{k+1}}$, выражение

$$G_\beta(x,y) = y^{\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\dfrac{ay^\beta}{x^2}\right)^n {}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c} (n+1,1) \\ (\beta(n+1), \beta) \end{array} \middle| -by^\beta\right]}{n! \Gamma(1-2n)}. \tag{5}$$

Теорема 1. *Функция Грина (5) при значении параметра $\beta = 1$ переходит в функцию $G_1(x,y) = e^{-by}\left(1 - erfc\left(\dfrac{x}{2\sqrt{ay}}\right)\right)$.*

Доказательство. Пусть в выражении (5) $\beta = 1$ будем иметь:

$$G_1(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\dfrac{ay}{x^2}\right)^n}{n! \Gamma(1-2n)} {}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c} (n+1,1) \\ (n+1,1) \end{array} \middle| -by\right]. \tag{6}$$

В выражении (6) обобщенную функцию Райта выразим через функцию Куммера согласно

$${}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c} (\sigma,1) \\ (\mu,1) \end{array} \middle| x\right] = \frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\mu)} {}_1F_1(\sigma, \mu, x),$$

получим

$${}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c} (n+1,1) \\ (n+1,1) \end{array} \middle| -by\right] = {}_1F_1(n+1, n+1, -by) = e^{-by}. \tag{7}$$

Перепишем решение (6) с учетом формулы (7) в виде

$$G_1(x,y)=e^{-by}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{ay}{x^2}\right)^n}{n!\Gamma(1-2n)}. \tag{8}$$

Сделаем в выражении (8) замену $n\to-\frac{n}{2}$ и получим

$$G_1(x,y)=e^{-by}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{ay}}\right)^n}{n!\Gamma\left(-\frac{n}{2}+1\right)}. \tag{9}$$

Воспользуемся известным соотношением $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ и найдем:

$$G_1(x,y)=e^{-by}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{ay}}\right)^n}{n!\Gamma\left(-\frac{n}{2}+1\right)}=$$

$$=e^{-by}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{ay}}\right)^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{n!\pi}=e^{-by}\left(1-erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{ay}}\right)\right).$$

С другой стороны, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial y}=a\frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x^2}-bG(x,y). \tag{10}$$

Преобразование Лапласа (10) по координате x, а затем по y с учетом начального условия дает следующее:

$$G(\omega,p)=\frac{\omega^{-1}}{p-(a\omega^2-b)}. \tag{11}$$

Сделаем обратное преобразование Лапласа (11) по параметру p и получим:

$$G(\omega,y)=\omega^{-1}e^{(a\omega^2-b)y}=e^{-by}\omega^{-1}e^{ay\omega^2}. \tag{12}$$

Обратное преобразование Лапласа (12) по параметру ω приводит к уравнению

$$G(x,y)=e^{-by}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\omega^{-1}e^{\omega x+ay\omega^2}d\omega. \tag{13}$$

Введем следующие обозначения в выражении (13): $z=\frac{ay}{x^2}$, $\sigma=\omega x$ – и деформируя контур Ханкеля, например как в работе [2], получим выражение

$$G(x,y)=e^{-by}\int\limits_{\mathrm{H}a}\sigma^{-1}e^{\sigma+z\sigma^2}d\sigma=e^{-yb}\int\limits_{\mathrm{H}a}e^{\sigma}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n\sigma^{2n-1}}{n!}d\sigma=$$

$$e^{-yb}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\int\limits_{\text{H}a} e^{\sigma}\sigma^{2n-1}d\sigma = e^{-yb}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\int\limits_{\text{H}a}^{e^{\sigma}\sigma^{2n-1}} d\sigma = e^{-yb}\frac{\left(\frac{ay}{x^2}\right)^n}{n!\Gamma(1-2n)}. \qquad (14)$$

Здесь мы воспользовались интегральным представлением гамма-функции [12]. Выражение (14) совпадает с точностью до множителя с выражением (9) и, следовательно,

$$G_1(\eta,\theta) = G(\eta,\theta) = e^{-\lambda\theta}\left(1 - erfc\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\bar{D}_e\theta}}\right)\right).$$

Теорема доказана. □

Замечание 1. Решение задачи Коши для уравнения (1) без источника можно записать с помощью функции Грина (4):

$$u(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{\beta}(x-\xi, y\ )\phi(\xi)\,d\xi.$$

Рассмотрим задачу Коши (1) при условии, что $\phi(x) = \frac{Q}{b}$. Решение этой задачи можно записать следующим образом:

$$u(x,y) = \frac{Q}{b}y^{\beta-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(ay^{\beta}\big/x^2\right)^n}{n!\Gamma(1-2n)}{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(n+1,1)\\(\beta(n+1),\beta)\end{array}\middle| -by^{\beta}\right]+$$

$$+Qy^{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(ay^{\beta}\big/x^2\right)^n}{n!\Gamma(1-2n)}{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(n+1,1)\\(\beta(n+1)+1,\beta)\end{array}\middle| -by^{\beta}\right]. \qquad (15)$$

Замечание 2. Решение (15) можно записать в несколько другом виде, учитывая свойство обобщенной функции Райта [13]:

$$z\,{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(n+1,1)\\(\beta,\alpha)\end{array}\middle| z\right] = {}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(n+1,1)\\(\beta-\alpha,\alpha)\end{array}\middle| z\right] - {}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(n,1)\\(\beta-\alpha,\alpha)\end{array}\middle| z\right].$$

Решение (15) можно переписать в виде

$$u(x,y) = \frac{Q}{b}y^{\beta-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(ay^{\beta}\big/x^2\right)^n}{n!\Gamma(1-2n)}{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(n+1,1)\\(\beta(n+1),\beta)\end{array}\middle| -by^{\beta}\right]-$$

$$-\frac{Q}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(ay^{\beta}\big/x^2\right)^n}{n!\Gamma(1-2n)}{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(n+1,1)\\(\beta n+1,\beta)\end{array}\middle| -by^{\beta}\right]+ \qquad (16)$$

$$+\frac{Q}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(ay^{\beta}\big/x^2\right)^n}{n!\Gamma(1-2n)}{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(n,1)\\(\beta n+1,\beta)\end{array}\middle| -by^{\beta}\right].$$

Теорема 2. *Решение* (16) *при значении параметра* $\beta = 1$ *переходит в классическое решение:*

$$u(x,y) = \frac{Q}{b}\left(1 - \frac{1}{2}\left[e^{-x\sqrt{\frac{b}{a}}} erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{ay}} - \sqrt{by}\right) + e^{x\sqrt{\frac{b}{a}}} erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{ay}} + \sqrt{by}\right)\right]\right). \quad (17)$$

Доказательство. Пусть $\beta = 1$, тогда в выражении (16) разность двух первых членов будет равна нулю. Остается следующее выражение:

$$u(x,y) = \frac{Q}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(ay^{\beta}/x^{2}\right)^{n}}{n!\Gamma(1-2n)}{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(n,1)\\(\beta n+1,\beta)\end{array}\middle| -by^{\beta}\right] =$$

$$= \frac{Q}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(ay/x^{2}\right)^{n}\Gamma(n)}{n!\Gamma(1-2n)\Gamma(n+1)}{}_1F_1(n,n+1,-by) =$$

$$= \frac{Q}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(ay/x^{2}\right)^{n}\gamma(n,by)}{n!\Gamma(1-2n)},$$

где $\gamma(n,z)$ – неполная гамма-функция, определенная как

$$\gamma(n,z) = \frac{z^{n}}{n}{}_1F_1(n,n+1,-z).$$

Далее, используя выражение из справочника [12]

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k}\gamma\left(k+1/2,z\right)}{k!\Gamma\left(k+1/2\right)} = \frac{1}{2}e^{t}\left(erf\left(\sqrt{z}+\sqrt{t}\right) + erf\left(\sqrt{z}-\sqrt{t}\right)\right),$$

с помощью некоторых преобразований приходим к решению (17).

Теорема доказана. □

Замечание 3. Решение (15) можно представить через функцию Грина (4):

$$u(x,y) = \frac{Q}{b}G_{\beta}(x,y) + Q\int_{0}^{y}G_{\beta}(x,y-\eta)d\eta.$$

В более общем случае, когда $\phi(x)$ и $Q(x,y)$ функции, решение примет вид

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}G_{\beta}(x-\xi,y)\phi(\xi)d\xi + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{y}G_{\beta}(x-\xi,y-\eta)Q(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Заключение

В результате исследования в настоящей работе дифференциального уравнения дробного порядка (1), а также исследования автора, например в работе [15], можно прийти к выводу, что исследуемое уравнение является обобщением дифференциального уравнения целого порядка. Поэтому решению уравнения (1) присущи как ранее известные свойства, так и новые, которые обусловлены нелокальностью процессов и явлений, происходящих во фрактальных средах.

Библиографический список

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

2. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.

3. Нахушева В.А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. 173 с.

4. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. М.: Университетская книга, 2005. 848 с.

5. Сербина Л.И. Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. М.: Наука, 2007. 167 с.

6. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.

7. Metzler R., Klafter J. The random walks guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // Physics Reports. 2000. Vol. 339. P. 1–77.

8. Mainardi F. Applications of integral transforms in fractional diffusion processes // Integral Transform. Spec. Function. 2004. Vol. 15. P. 477–484.

9. Zhou T., Li C. Synchronization in fractional-order differential systems // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2005. Vol. 212. P. 111–125.

10. Герасимов А.Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // АН СССР. Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12. С. 529–539.

11. Nigmatullin R.R. The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry // Phys. Stat. Solidi(b). 1986. Vol. 133. P. 425–430.

12. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 752 с.

13. Mathai A.M., Haubold H.J. Special Functions for Applied Scientists. New York: Springer, 2008. 464 p.

14. Новиков Г.Ф. Радиометрическая разведка. Л.: Недра, 1989. 407 с.

15. Паровик Р.И. Задача Коши для нелокального уравнения диффузии–адвекции радона во фрактальной среде // Вестник СамГТУ. Сер. Физико-математические науки. 2010. № 1(20). С. 127–132.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 10.11.10