Р. Т. Зуннунов, Нелокальная задача типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа в неограниченной области, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2010, выпуск 1(1), 12–16

DOI: http://dx.doi.org/10.18454/2079-6641-2010-1-1-12-16

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2010. № 1(1). С. 12-16. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2010-1-1-12-16

УДК 517.956

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ТИПА ЗАДАЧИ БИЦАДЗЕ–САМАРСКОГО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ*

Р.Т. Зуннунов

Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта, 700005, республика Узбекистан, г. Ташкент, Мирабадский район, ул. А. Кодирова, 12

E-mail: zunnunov@mail.ru

Для уравнения смешанного типа в неограниченной области доказано существование и единственность решения нелокальной краевой задачи.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, нелокальная задача, метод интегралов энергии, метод интегральных уравнений

MSC 68N01

NOT LOCAL PROBLEM OF TYPE OF THE PROBLEM BITSADZE – SAMARSKY FOR THE EQUATION THE MIXED TYPE IN UNLIMITED AREA

R.T. Zunnunov

Tashkent institute of engineers of a railway transportation, 700005, Tashkent, Mirabadskiy dis., A. Kodirova st., 12, Uzbekistan.

E-mail: zunnunov@mail.ru

In this paper the existence and uniqueness of the solution of the non-local boundary value problem for the mixed type equation in unbounded domain are proved.In this paper the existence and uniqueness of the solution of the non-local boundary value problem for the mixed type equation in unbounded domain are proved.

Key words: mixed type equation, problem, non-local problem, method of energy integrals, method of integral equations

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект МОБ_СНГ_ СТ 09-01-90902).

Введение

Известно, что интерес к изучению краевых задач для уравнений смешанного типа возрос после того, как обнаружилась их связь с задачами газовой динамики, теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и безмоментной теории оболочек и т.д.

Рассмотренная задача является обобщением задачи Трикоми. Такие задачи возникают при изучении различных вопросов прикладного характера, например вопросов математической биологии, прогнозирования почвенной влаги, математического моделирования процессов излучения лазера, проблем физики плазмы и т.д.

Рассмотрим уравнение

$$signy\,|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 |y|^m u = 0, m = \mathrm{const} > 0 \tag{1}$$

в неограниченной смешанной нестандартной области $\Omega = \Omega_1 \cup l_1 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{(x,y) : -\infty < x < +\infty, y > 0\}$; $l_1 = \{(x,y) : 0 < x < +\infty, y = 0\}$; а Ω_2 – бесконечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная полупрямой l_1 и характеристикой $\Gamma :\ x - [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2} = 0$ уравнения (1); λ– заданное действительное число.

Введем следующие обозначения: $\beta = \dfrac{m}{2m+4}$, $M_j = \mathrm{const} > 0 \left(j = \overline{1,5}\right)$, ε–достаточно малое положительное число. Далее

$$l_2 = \{(x,y) : -\infty < x < 0, y = 0\},\ \theta_0(x_0) = \left(\frac{x_0}{2}, -\left[\frac{m+2}{4}x_0\right]^{2/(m+2)}\right),$$

где $\theta_0(x_0)$ является аффиксом точки пересечения характеристики Γ уравнения (1) и характеристики $x + [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2} = x_0$, выходящей из точки $(x_0, 0) \in l_1$.

При постановке и исследовании нелокальной задачи для уравнения (1) мы будем пользоваться интегродифференциальными операторами $A_{0x}^{1,\lambda}[f(x)]$ и $C_{0x}^{1,\lambda}[f(x)]$, введенными и изученными в работе [1]. Наряду с указанными операторами используется оператор $D_{sx}^{\delta}[f(x)]$ дробного в смысле Римана – Лиувилля интегродифференцирования порядка δ [2].

Предположим, что в уравнении (1) $\lambda = \lambda_i$ в областях $\Omega_i \quad (i = 1,2)$ и исследуем следующую задачу.

Задача $\mathbf{BS}^\infty$. *Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:*

1) $u(x,y) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1(\Omega \cup l_2) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, причем $u_y(x,0)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше, чем $1-2\beta$ при $x \to 0$;

2) $u(x,y)$ – регулярное решение уравнения (1) в областях Ω_1 и Ω_2;

3) $\lim\limits_{r_0 \to +\infty} u(x,y) = 0$ при $y \ge 0$; $r_0^2 = x^2 + [2/(m+2)]^2 y^{m+2}$;

4) $\lim\limits_{y \to 0} u_y(x,y) = \varphi(x)$, $-\infty < x < 0$;

5) удовлетворяет условиям

$$A_{0x}^{1,\lambda_2}\left\{D_{0x}^{1-\beta}\left[u\left(\theta_0(x)\right)\right]\right\} + c(x)\,u_y(x,0) = d(x), \quad 0 < x < +\infty, \tag{2}$$

где $c(x), d(x), \varphi(x)$–заданные функции, причем $c(x) \in C[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty)$, $\varphi(x) \in C(-\infty,0)$, $d(x) \in C^2(0,+\infty)$, а $d(x)$, $\varphi(x)$ обращаются в бесконечность порядка меньше, чем $1-2\beta$ при $x \to 0$ и для достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенствам $|d(x)| \le M_1 x^{2\beta-1-\varepsilon}$, $|\varphi(x)| \le M_2 x^{2\beta-1-\varepsilon}$.

Замечание. При $c(x) \equiv 0$ в силу обратимости операторов $A_{0x}^{1,\lambda}$ и D_{sx}^{δ} задача (1)–(2) является задачей Трикоми.

Единственность решения поставленной задачи

Пусть $u(x,y)$ – решение задачи BS^∞, $u_y(x,0) = \nu(x) \in C^2(0,+\infty)$, $u(x,0) = \tau(x) \in C[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty)$ и $\nu(x)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше, чем $1-2\beta$ при $x \to 0$. Тогда, пользуясь представлением решения задачи BS^∞ в области Ω_2 [1], в силу условия (2) получаем основное функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на l_1, принесенное из области Ω_2:

$$\nu(x) = \gamma_2\Gamma(2\beta)\,q(x)\,C_{0x}^{1,\lambda_2}[\tau(x)] - \gamma_2\Gamma(\beta)\,q(x)\,x^\beta d(x),\ 0 < x < +\infty, \tag{3}$$

где $q(x) = \dfrac{1}{1-\gamma_2\Gamma(\beta)\,x^\beta c(x)}$, $\gamma_1 = (2-4\beta)^{2\beta}\,\Gamma(\beta)\,/\,[2\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(2\beta)]$, $\gamma_2 = (\sin 2\beta\pi)\,/\,\pi\gamma_1$.

Теорема. *Пусть для решения $u(x,y)$ задачи BS^∞ при достаточно больших r_0 справедливы неравенства*

$$|u(x,y)| \le M_3/r_0^\varepsilon,\ |y^m u_x(x,y)| \le M_4/r_0,\ |u_y(x,y)| \le M_5/r_0 \tag{4}$$

и заданные функции удовлетворяют следующим условиям:

$$q'(x) \le 0,\ q(x) \ge 0, \tag{5}$$

тогда задача BS^∞ не может иметь более одного решения.

Доказательство. Возьмем произвольное достаточно большое число r_0 и рассмотрим конечную область Ω_{1r_0}, ограниченную в области Ω_1 нормальной кривой $x^2 + [2/(m+2)]^2\,y^{m+2} = r_0^2$ и отрезком $\bar{l}_{r_0} = \{(x,y) : -r_0 \le x \le r_0, y = 0\}$.

Пусть $u(x,y)$ – решение однородной задачи BS^∞. Тогда в области Ω_{1r_0} справедливо тождество

$$(y^m u u_x)_x + (u u_y)_y - y^m (u_x)^2 - (u_y)^2 - y^m \lambda_1^2 u = 0, \tag{6}$$

а на отрезке $\bar{l}_{r_0}$ имеет место равенство

$$\nu(x) = \gamma_2\Gamma(2\beta)\,q(x)\,C_{0x}^{1,\lambda_2}[\tau(x)],\quad 0 < x < +\infty. \tag{7}$$

Применяя формулу Гаусса – Остроградского по области Ω_{1r_0}, в силу условий (4) теоремы и $\varphi(x) \equiv 0$ при $r_0 \to +\infty$ имеем

$$\iint\limits_{\Omega_1} \left[y^m (u_x)^2 + (u_x)^2 + \lambda_1^2 y^m u^2\right] dxdy + \int\limits_0^\infty \tau(x)\,\nu(x)\,dx = 0. \tag{8}$$

Проводя аналогичные рассуждения, как и в работе [3], получим:

$$\Delta = \int\limits_0^{+\infty} \tau(x)\,\nu(x)\,dx = \gamma_3 \int\limits_0^{+\infty} z^{2\beta-1} dz \int\limits_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{-\beta-1/2} d\xi \times$$

$$\times \left\{ b \sum_{k=1}^{2} \left[\left(\int\limits_0^\infty \rho_1(t) \cos z_k t\, dt \right)^2 + \left(\int\limits_0^\infty \rho_1(t) \sin z_k t\, dt \right)^2 \right] - \right.$$

$$-\int_0^\infty q'(x)\sum_{k=1}^{2}\left[\left(\int_0^x \rho_1(t)\cos z_k t dt\right)^2+\left(\int_0^x \rho_1(t)\sin z_k t dt\right)^2\right]dx,$$

$$\gamma_3=\left[(2-4\beta)^{2\beta}\Gamma(\beta)\right]\Big/\left[8\Gamma(1/2-\beta)\Gamma^2(2\beta)\cos\pi\beta\right],$$

$$z_k=z-(-1)^k\lambda_2\xi,\ \rho_1(x)=\gamma_2 C_{0x}^{1,\lambda_2}[\tau(x)],$$

$$\lim_{x\to\infty}q(x)=b, 0<b<+\infty.$$

В силу условий (5) теоремы имеем $\Delta\geq 0$. Из равенства (8) при $\lambda_1\neq 0$ сразу следует, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{\Omega}_1$. Если $\lambda_1=0$, то из равенства (8) получим $u(x,y)\equiv$const в области $\overline{\Omega}_1$. Учитывая условие (2) задачи и $\varphi(x)\equiv 0$, в этом случае получаем $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{\Omega}_1$. Тогда $\tau(x)\equiv\nu(x)\equiv 0$ при $0\leq x<+\infty$. Поэтому из представления решения задачи Коши [2] в области Ω_2 следует: $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{\Omega}_2$. Следовательно, $u(x,y)\equiv 0$, $(x,y)\in\overline{\Omega}$. Теорема доказана. □

Доказательство существования решения задачи

Пользуясь представлением решения задачи N^∞ в области Ω_1 [3], при $y=0$ получаем основное функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на l, принесенное из области Ω_1:

$$\tau(x)=-k_0\int_0^\infty \nu(t)|x-t|^{-\beta}K_\beta[|\lambda_1||x-t|]dt+f(x),\tag{9}$$

где $k_0=(1-2\beta)^{2\beta}(|\lambda_1|/2)^\beta/\left[\sqrt{\pi}\Gamma(\beta+1/2)\right]$, $r^2=(x-t)^2+[2/(m+2)]^2y^{m+2}$, $K_\alpha(z)$ – функция Макдональда [4], $f(x)=-k_0\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)|x-t|^{-\beta}K_\beta[|\lambda_1||x-t|]dt$. Исключая из соотношений (3) и (9) функцию $\tau(x)$, получаем сингулярное интегральное уравнение относительно $\nu(x)$ в виде

$$a(x)\nu(x)+\gamma_4\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta}\frac{\nu(t)}{t-x}dt+\int_0^{+\infty}P(x,t)\nu(t)dt=F(x),$$

$$P(x,t)=\gamma_2\int_0^x Q(x,z)H_1(z,t)dz+k_0\gamma_2\Gamma(2\beta)D_{0x}^{1-2\beta}[H_2(x,t)],$$

$$F(x)=\gamma_2\left\{\Gamma(2\beta)C_{0x}^{1,\lambda_2}[f(x)]-\Gamma(\beta)x^\beta d(x)\right\},\tag{10}$$

$$Q(x,t)=\frac{d}{dx}\left[\frac{\bar{J}_\beta[\lambda_2(x-t)]-1}{|x-t|^{1-2\beta}}\right]+\frac{\lambda_2^2}{4\beta(1+\beta)}|x-t|^{2\beta}\bar{J}_\beta[\lambda_2(x-t)],$$

$$H_1(x,t)=k_0|x-t|^{-\beta}K_\beta[|\lambda_1||x-t|],$$

$$H_2(x,t)=\frac{\pi}{\sin\beta\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda_1/2|^{2n-\beta}|x-t|^{2n-2\beta}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1-\beta)}-|x-t|^{-\beta}I_\beta[|\lambda_1||x-t|]\right\},$$

$$a(x) = 1 + \sin\pi\beta - \Gamma(\beta)\gamma_2 x^\beta c(x), \gamma_4 = \frac{\cos\pi\beta}{\pi}.$$

Таким образом, задача BS^∞ эквивалентна (в смысле разрешимости) и редуцирована к сингулярному интегральному уравнению (10) . В силу условий $a^2(x) - \gamma_4^2 \neq 0$, $0 \leq x < +\infty$ уравнение (10) является уравнением нормального типа [5] и его решение будем искать в классе функций, которые могут обращаться в бесконечность порядка ниже $1 - 2\beta$ при $x \to 0$ и ограниченных $x \to +\infty$. Индекс уравнения в данном классе равен нулю. Регуляризируя его методом Карлемана – Векуа [5], получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи BS^∞.

Библиографический список

1. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: ФАН, 1997. 165 с.

2. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.

3. Зуннунов Р.Т Задача со смещением для уравнения смешанного типа в неограниченной области // Доклады Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук. 2009. Т. 11. № 1. С. 21–27.

4. Кузнецов М.С. Специальные функции. М.: Высш. шк., 1965. 424 с.

5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 11.09.2010