А. П. Горюшкин, О группах с представлением $\langle a, b; a^n = 1, ab = b^3a^3\rangle$, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2010, выпуск 1(1), 8–11

DOI: http://dx.doi.org/10.18454/2079-6641-2010-1-1-8-11

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2010. № 1(1). С. 8-11. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2010-1-1-8-11

Математика

УДК 512.24

О ГРУППАХ С ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ $<\mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{a}^{\mathbf{n}} = \mathbf{1}, \mathbf{ab} = \mathbf{b}^{\mathbf{3}}\mathbf{a}^{\mathbf{3}}>$

А.П. Горюшкин

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: as2022@mail.ru

Устанавливается, что для $n = 4$ и $n \geq 7$ группы $G(n) \ = < a, b; a^n = 1, b = b^3a^3 >$ бесконечны. Для остальных n вычисляется порядок и исследуется строение группы $G(n)$.

Ключевые слова: группа, порядок, подгруппа, коммутант, фактор-группа

Mathematica

MSC 18A32

GROUPS WITH REPRESENTATION $<\mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{a}^{\mathbf{n}} = \mathbf{1}, \mathbf{ab} = \mathbf{b}^{\mathbf{3}}\mathbf{a}^{\mathbf{3}}>$

A.P. Goryshkin

Kamchatka State University by Vitus Bering, 683032, Petropavlovsk-Kamchatskiy, Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: as2022@mail.ru

Established that for $n = 4$ and $n \geq 7$ group $G(n) \ = < a, b; a^n = 1, ab = b^3a^3 >$ are infinite, and for the remaining n evaluated the procedure and investigate the structure of the group $G(n)$.

Key words: group, the order of the subgroup, subgroup, quotient

Введение

Группы $G(n)$ с представлением

$$G(n) = < a,\ b;\ a^n\ =\ 1,\ ab\ =\ b^3a^3 >$$

широко используются в различных топологических приложениях. Для некоторых значений n устройство $G(n)$ может оказаться очень непростым. Сложным может быть даже вопрос о порядке таких групп. В данной статье предлагается решение вопроса о порядке таких групп, а в конечном случае исследуется строение группы.

Исследование группы $G(n)$

Заметим сначала, что для любого n фактор-группа $G(n)$ по ее коммутанту является прямым произведением циклической группы $< a;\ a^n\ =\ 1 >$ порядка n, а также циклической $< ab;\ (ab)^2\ =\ 1 >$ порядка 2.

Таким образом, индекс коммутанта равен $2n$. Группа $G(2)$ имеет представление

$$G(n)\ = < a,\ b;\ a^2\ =\ 1,\ ab\ =\ b^3a^3 > = < a,\ b;\ a^2\ =\ 1, aba^{-1}\ =\ b^3 > .$$

Из соотношений $a^2\ =\ 1$, $aba^{-1}\ =\ b^3$ следует, что $b^8\ =\ 1$. Таким образом, группа $G(2)$ является полупрямым произведением групп $< a;\ a^2\ =\ 1 >$ и $< b;\ b^8\ =\ 1 >$. Порядок $G(2)$ равен 16.

Группа $G(3)$, имеющая представление

$$G(3)\ = < a,\ b;\ a^3\ =\ 1,\ ab\ =\ b^3a^3 > =$$

$$= < a,\ b;\ a^3\ =\ 1,\ ab\ =\ b^3 > = < a,\ b;\ a^3\ =\ 1,\ a\ =\ b^2 > = <\ b;\ b^6\ =\ 1 >,$$

является циклической порядка 6. Подгруппа группы

$$G(4)\ = < a,\ b;\ a^4\ =\ 1,\ ab\ =\ b^3a^3 >,$$

порожденная элементами $x\ =\ a^2$, $y\ =\ b^3$, $z\ =\ bab$, имеет представление с двумя определяющими соотношениями:

$$H\ = < x,\ y,\ z; xzy^{-1}x^{-1}(yx)^3x^2zy^{-1}x^{-1}(yx)^3x^2zy^{-1}x^{-1}(yx)^3x^2zy^{-1}x^{-1}(yx)^3x,$$

$$xzy^{-1}x^{-1}(yx)^3x(yx)^3x(yx)^2yx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xzy^{-1}x^{-1}(yx)^3x(yx)^2yx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}\cdot$$

$$\cdot y^{-1}xzy^{-1}x^{-1}(yx)^3x(yx)^2yx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xzy^{-1}x^{-1}(yx)^3x(yx)^3x^2y^{-1}\cdot$$

$$\cdot x^{-1}(yx)^3x(yx)^3x^2y^{-1}x^{-1}(yx)^3x(yx)^3x^2y^{-1}x^{-1}(yx)^3x >,$$

поэтому H, а следовательно, и группа $G(4)$ бесконечна.

Отметим, что бесконечность группы $G(4)$ можно получить из других, более общих соображений, используя метод малых сокращений. Введем новый порождающий элемент $c\ =\ ab$. Тогда $a\ =\ cb^{-1}$, $a^{-1}\ =\ bc^{-1}$, а группу

$$G(4)\ = < a,\ b;\ a^4\ =\ 1,\ ab\ =\ b^3a^{-1} >$$

можно представить в виде

$$G(4) = < a,\ b,\ c;\ a^4\ =\ 1,\ a\ =\ cb^{-1},\ c\ =\ b^3bc^{-1} >,$$

или

$$G(4) = < b,\ c;\ (bc^{-1})^4 = 1,\ c^2 = b^4 > .$$

Это значит, что $G(4)$ является фактор-группой свободного произведения G двух бесконечных циклических групп с объединенной подгруппой:

$$G = < b,\ c;\ c^2 = b^4 > .$$

Фактор-группа G_1 группы G по нормальному замыканию элемента c^2 является свободным произведением двух циклических групп:

$$G = < b,\ c;\ b^4 = 1,\ c^2 = 1 > .$$

Сама же группа $G(4)$ – это фактор-группа группы G по нормальному замыканию N элемента $r = (bc^{-1})^4$.

Для симметризированного множества R, состоящего из циклических перестановок слов r и r^{-1}, в группе G выполняется условие $C'\left(\frac{1}{6}\right)$; поэтому каждый неединичный элемент из нормального замыкания множества N в группе G содержит в качестве внутреннего сегмента левую половину некоторого элемента из R. В подгруппе H, порожденной элементом b^2c, ни один элемент не содержит фрагментов слов длины ≥ 3 из R. Это значит, что нормальный делитель N имеет единичное пересечение с подгруппой H и, следовательно, фактор-группа $G/N = G(4)$ бесконечна.

Перейдем к рассмотрению группы $G(5)$. В группе

$$G(5) = < a,\ b;\ a^5 = 1,\ ab = b^3a^3 >$$

введем еще один порождающий элемент $c = (ab)^2$. Тогда

$$G(5) = < a,\ b, c;\ a^5 = 1,\ ab = b^3a^3,\ c = (ab)^2 > .$$

Из этих соотношений следует, что $b^{10} = 1$, $c^{11} = 1$. Кроме того, $bcb^{-1} = c^5$. Последнее соотношение означает, что подгруппа C нормальна в $G(5)$. Согласно выражению $aba^{-1}b^{-1} = c^{-2}$, подгруппа $C = \text{гр}(c)$ содержится в коммутанте K группы $G(5)$. Исходя из того, что фактор-группа

$$< a,\ b, c;\ a^5 = 1,\ ab = b^3a^3,\ c = (ab)^2,\ b^{10} = 1,\ c^{11} = 1,$$

$$aca^{-1} = c^9,\ bcb^{-1} = c^5,\ c = 1 >$$

группы

$$< a,\ b,\ c;\ a^5 = 1,\ ab = b^3a^3,\ c = (ab)^2,\ b^{10} = 1,\ c^{11} = 1,\ aca^{-1} = c^9,\ bcb^{-1} = c^5 >$$

абелева, следует обратное включение: $C \supseteq K$. Итак, коммутант K совпадает с подгруппой C порядка 11, а фактор-группа по коммутанту имеет порядок 10. Следовательно, порядок группы $G(5)$ равен 110.

Отметим, что группа $G(5)$ порождается элементами b, c и ее представление имеет вид

$$G(5) = < b,\ c;\ b^{10} = 1,\ c^{11} = 1,\ bcb^{-1} = c^5 > .$$

Отсюда следует, что группа $G(5)$ является полупрямым произведением циклических групп

$$C = < c;\ c^{11} = 1 > B = < b;\ b^{10} = 1 >,$$

причем первая нормальна в $G(5)$, а вторая нет. Индекс коммутанта K в группе

$$G(6) = < a,\ b;\ a^6\ =\ 1,\ ab\ =\ b^3a^3,\ ab = ba >$$

равен 12. В порождающих $x = [a,\ b]$, $y = [a^2,\ b]$ коммутант K имеет представление:

$$\begin{gathered}
K = < x,\ y; y^{-1}x^2y^{-1}xy^{-1}x^{-2}yx^{-1}yx^{-2}yx^{-1}yx^{-1}, \\
xyx^{-1}yx^{-2}y^2x^{-1}yx^{-2}(yx^{-1})^3yx^{-2}yx^{-1}yx^{-1}y^{-1}, \\
xy^{-1}xy^{-1}x^2y^{-1}(xy^{-1})^3x^2y^{-1}xy^{-1}y^{-1}x^2y^{-1}xy^{-1}x^{-1}y, \\
x^{-1}yx^{-2}(yx^{-1})^7y^{-1}x^2y^{-1}xy^{-1}y^{-1}x^2y^{-1}xy^{-1}, \\
x^2y^{-1}xy^{-1}x^2y^{-1}x^2y^{-1}xy^{-1}x^2y^{-1}x^2y^{-1}xy^{-1}x^2y^{-1}x^2y^{-1}xy^{-1}x^2y^{-1}, \\
xy^{-1}xy^{-1}x^2y^{-1}x^2y^{-1}xy^{-1}x^2y^{-1}x^2y^{-1}xy^{-1}x^2y^{-1}x^2y^{-1}xy^{-1}x^2y^{-1}x, \\
xy^{-1}xyx^{-1}yx^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}yx^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}yx^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}yx^{-1}x^{-1}y, \\
yx^{-1}yx^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}yx^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}yx^{-1}x^{-1}yxy^{-1}xyx^{-1}yx^{-1}x^{-1}yxy^{-1}x > .
\end{gathered}$$

Элемент x имеет в коммутанте порядок 84, порядок элемента y равен 21, а порядок xy равен 28. Фактор-группа K по ее коммутанту состоит из 28 элементов, а порядок второго коммутанта равен 27. Следовательно, порядок группы $G(6)$ – $27 \cdot 28 \cdot 12\ =\ 9072$. Группа

$$G(7) = < a,\ b;\ a^7\ =\ 1,\ ab\ =\ b^3a^3 > = < a, c;\ a^7\ =\ 1,\ ca^{-3}c^{-1}ac^{-1}ac^{-1}a\ =\ 1 >$$

является фактор-группой свободного произведения двух циклических групп:

$$G = < a;\ a^7\ =\ 1 > * < c > .$$

Сама же группа $G(7)$ – это фактор-группа группы G по нормальному замыканию N_1 элемента $r_1 = ca^{-3}c^{-1}ac^{-1}ac^{-1}a$. Для симметризированного множества R_1, состоящего из циклических перестановок слов r_1 и r_1^{-1}, в группе G выполняется условие $C'\left(\frac{1}{6}\right)$. Поэтому каждый неединичный элемент из нормального замыкания множества N_1 в группе G содержит в качестве внутреннего сегмента левую половину некоторого элемента из R_1. Отсюда следует, что нормальный делитель N имеет единичное пересечение с подгруппой $C\ = \text{гр}(c)$ и, следовательно, фактор-группа $G_1/N_1\ =\ G(7)$ бесконечна.

Заключение

Заметим, что в последнем рассуждении используется лишь то свойство, что порядок элемента a строго больше $2 \cdot 3$. Поэтому не только для $n = 7$, но и для любого $n \geq 7$ группа $G(n)$ бесконечна. Таким образом, вопрос № 8.10 из работы [1] получает полное и окончательное решение.

Библиографический список

1. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 16-е изд., доп. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 2006.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 11.09.10