Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2011. № 1(2). С. 36-43. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2011-2-1-36-43

УДК 517.958

РЕШЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ–АДВЕКЦИИ РАДОНА В СИСТЕМЕ ГРУНТ–АТМОСФЕРА*

Р.И. Паровик[1, 2]

[1] Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7

[2] Филиал Дальневосточного федерального университета , 683031, г. Петропавловск-Камчатский, ул.Тушканова, 11/1

E-mail: romano84@mail.ru

Рассмотрена нелокальная математическая модель нестационарной диффузии-адвекции радона в системе грунт-атмосфера. Получено аналитическое решение этой модели типа бегущей волны, которое выражено в терминах обобщенной функции Райта.

Ключевые слова: обобщенная функция Райта, аномальная диффузия, производная Римана-Лиувилля

MSC 35C05

SOLUTION NONLOCAL EQUATIONS ANOMALOUS DIFFUSION–ADVECTION RADON IN SYSTEM SOIL–ATMOSPHERE

R.I. Parovik[1, 2]

[1] Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

[2] Far Eastern Branch of Federal University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatskiy, Tushkanova st. , 11/1, Russia

E-mail: romano84@mail.ru

In this paper we consider a nonlocal mathematical model of non-stationary diffusion-advection of radon in the soil-atmosphere system. An analytical solution of this model of traveling wave, which is expressed in terms of a distribution Wright.

Key words: distribution Wright, anomalous diffusion, Riemann-Liouville

*Работа выполнена при поддержке гранта АВЦП «РНПВШ» № 2.1.1/544.

Введение

Известно, что радиоактивный газ радон участвует во многих физических процессах, например оказывает влияние на формирование электрического поля приземного слоя атмосферы или является индикатором напряженно-деформированного состояния геологической среды [1, 2]. Поэтому появляется необходимость в построении математической модели процесса переноса радона, которая бы учитывала свойства геологической среды (грунт или рыхлые отложения).

В математическом моделировании процесса переноса радона рыхлые отложения можно считать пористой средой, в которой главную роль играет топология пор, влияющая на их проницаемость. Если поры имеют сложную топологию, сильно изрезаны, неупорядочены, то говорят, что такой грунт обладает фрактальными свойствами [3].

Вопросам математического моделирования процессов массопереноса в средах с фрактальными свойствами посвящены многочисленные работы [4-12]. Фрактальные свойства грунта и обусловливают степенное распределение пор по размерам с некоторым дробным показателем α. Дробный показатель, в свою очередь, связан с фрактальной размерностью грунта. Для широкого класса грунтов этот показатель пропорционален его фрактальной размерности [4, 6].

Если дробный показатель изменяется в пределах $1<\alpha<2$, то в такой пористой среде существует механизм супердиффузии радона. Согласно этому механизму перенос радона в грунте может происходить быстрее, чем при классической диффузии $(\alpha=2)$ [13]. Такой эффект может быть связан с хорошей проницаемостью пор. Говорят в этом случае, что происходит пространственная корреляция между порами или о принципе нелокальности. В случае когда, поры слабо проницаемы говорят о субдиффузии. В этом случае процесс считается нелокальным по времени, а среда обладает памятью, которая характеризуется дробным параметром $0<\beta<1$ [3, 10].

В работах [14, 15] показано что, если дробный показатель меняется в пределах $0<\alpha<1$, то возникает еще более интенсивный процесс переноса , который был назван авторами «аномальная адвекция». Если $\alpha=2$, то аномальная адвекция переходит в классическую адвекцию или перенос. В работе [15] была решена задача, когда дробный показатель изменялся в более широком диапазоне $0<\alpha<2$. Однако интерес представляет одновременное рассмотрение процессов аномальной адвекции и диффузии.

В работах [16, 17] была решена задача для стационарного уравнения переноса радона в режимах супердиффузии и аномальной адвекции. Получено аналитическое решение в терминах обобщенной функции Райта и функции типа Миттаг-Леффлера.

В работах [18, 19] была решена и исследована классическая задача нестационарного переноса радона из рыхлых отложений в приземный слой атмосферы. Показано, что при высоких значениях коэффициента диффузии возникает такой же эффект на границе раздела сред как в работе [15].

В работе [20] найдено решение для нестационарного нелокального по времени и пространству уравнения аномальной диффузии и адвекции. Поэтому логическим продолжением этой серии работ является настоящая статья, в рассматривается режим аномальной диффузии и адвекции для нестационарного уравнения переноса радона в системе грунт-атмосфера.

Постановка задачи

В математическом моделировании процессов массопереноса в средах с фрактальной структурой используют метод дробных производных, суть которого заключается в замене целочисленной производной на производную дробного порядка [7, 21, 22].

Согласно методу дробных производных задача для нестационарной аномальной диффузии в системе грунт–атмосфера может ставиться следующим образом.

Задача. *Необходимо найти решение $A(z,t)$ в области $(t>0,-\infty<z<\infty)$:*

$$\frac{\partial A(z,t)}{\partial t}=D_a\frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial z^2}+v_a\frac{\partial A(z,t)}{\partial z}-\lambda A(z,t),\quad z>0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial^\gamma A(z,t)}{\partial t^\gamma}=D_gD_{z0}^{\alpha}A(z,t)+v_gD_{z0}^{\beta}A(z,t)-(\lambda A(z,t)-A_\infty),\quad z<0$$

$$\lim_{z\to 0-0}D_{z0}^{\alpha-2}A(z,t)=A(z,t)|_{z=0+0},$$

$$\lim_{z\to 0-0}\left[D_gD_{z0}^{\alpha-1}A(z,t)+v_gD_{z0}^{\beta-1}A(z,t)\right]=D_a\frac{\partial A(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0+0}+v_a\,A(z,t)|_{z=0+0},$$

где $D_{z0}^{\alpha},D_{z0}^{\beta}$ – операторы дробного дифференцирования Римана-Лиувилля; ∂_{0t}^{γ} – оператор в смысле Герасимова-Капуто [22, 23]: $0<\beta,\gamma<1<\alpha<2$, D_a, D_g – коэффициенты диффузии радона в атмосфере и рыхлых отложениях, м^2/с, м$^\alpha$/с; λ – постоянная распада радона, 1/с; A_∞ – поровая активность радона, который находится в радиоактивном равновесии с радием на заданной глубинае, Бк/м^3; $A(z,t)$ – поровая активность радона в рыхлых отложениях, Бк/м^3, $A_\infty = KA_{Ra}\rho(1-\eta)/\eta$, где K– коэффициент эманирования радона, отн. ед.; A_{Ra} – удельная активность ^{226}Ra, Бк/кг; ρ – плотность твердых частиц рыхлых отложений, кг/м^3; η – пористость рыхлых отложений.

Введем в характерное время t_0 и масштаб z_0, и соответствующие безразмерные координаты $\tau=t/t_0,\xi=z/z_0$. Тогда уравнение (1) будет записано в безразмерных координатах в виде:

$$\frac{\partial A(\xi,\tau)}{\partial \tau}=\bar{D}_a\frac{\partial^2 A(\xi,\tau)}{\partial \xi^2}+\bar{v}_a\frac{\partial A(\xi,\tau)}{\partial \xi}-\bar{\lambda}A(\xi,\tau),\quad \xi>0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial^\gamma A(\xi,\tau)}{\partial \tau^\gamma}=\bar{D}_gD_{\xi 0}^{\alpha}A(\xi,\tau)+\bar{v}_gD_{\xi 0}^{\beta}A(\xi,\tau)-(\bar{\lambda}A(\xi,\tau)-A_\infty),\quad \xi<0$$

$$\lim_{\xi\to 0-0}D_{0\xi}^{\alpha-2}A(\xi,\tau)=A(\xi,\tau)|_{\xi=0+0},$$

$$\lim_{\xi\to 0-0}\left[\bar{D}_gD_{\xi 0}^{\alpha-1}A(\xi,\tau)+\bar{v}_gD_{\xi 0}^{\beta-1}A(\xi,\tau)\right]=\bar{D}_a\frac{\partial A(\xi,\tau)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0+0}+\bar{v}_aA(\xi,\tau)|_{\xi=0+0},$$

Параметры переноса в грунте и в атмосфере будут тоже являться безразмерными величинами.

Методика решения

Решение уравнения (2) будем искать в виде бегущей волны со скоростью V. Сделаем замену в (2): $A(\xi,\tau)=f(x), x=\xi-V\tau$, $W_a=V-\bar{v}_a$, $s=-Vt$. Тогда уравнение (2) перейдет в уравнение:

$$\bar{D}_a\frac{d^2f(x)}{dx^2}+W_a\frac{df(x)}{d\xi}-\bar{\lambda}f(x)=0, \quad x>s \tag{3}$$

$$\bar{D}_g D_{xs}^{\alpha}f(x)+\bar{v}_g D_{xs}^{\beta}f(x)+V^{\beta}\frac{d^{\gamma}f(x)}{dx^{\gamma}}-(\bar{\lambda}f(x)-A_\infty)=0, \quad x<s$$

$$\lim_{x\to s-0}D_{xs}^{\alpha-2}f(x)=\left.f(x)\right|_{x=s+0},$$

$$\lim_{x\to s-0}\left[\bar{D}_g D_{xs}^{\alpha-1}f(x)+\bar{v}_g D_{xs}^{\beta-1}f(x)\right]=\bar{D}_a\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=s+0}+\bar{v}_a\left.f(x)\right|_{x=s+0}.$$

Решение первого уравнения (3) для атмосферы известно, его можно записать так:

$$f(x)=C_1e^{x\left(\frac{-r_1+\sqrt{r_1^2+4r_2}}{2}\right)}+C_2e^{-x\left(\frac{r_1+\sqrt{r_1^2+4r_2}}{2}\right)}, \quad r_1=W_a/\bar{D}_a, r_2=\bar{\lambda}/\bar{D}_a. \tag{4}$$

Из физических соображений при $x\to\infty$ решение уравнения (4) стремится к нулю. Действительно, концентрация радона падает к земной поверхности, а в атмосфере она близка к нулю. Поэтому константа C_1=0 и тогда краевые условия на границе грунт–атмосфера перепишутся следующим образом:

$$\lim_{x\to s-0}D_{xs}^{\alpha-2}f(x)=R_1C_2,$$

$$\lim_{x\to s-0}\left[\bar{D}_g D_{xs}^{\alpha-1}f(x)+\bar{v}_g D_{xs}^{\beta-1}f(x)\right]=R_2C_2,$$

$$R_1=\exp\left(-s\left(r_1+\sqrt{r_1^2+4r_2}\right)\Big/2\right), R_2=-R_1(\bar{D}_a(r_1+\sqrt{r_1^2+4r_2})\Big/2+\bar{v}_a)$$

Рассмотрим более подробно второе уравнение (3). Применив к нему интегральное преобразование Лапласа, получим следующее уравнение:

$$f(p)=\frac{C_2R_2p+p^2C_2R_1-\bar{\lambda}A_\infty}{p\left(\bar{D}_gp^{\alpha}+V^{\beta}p^{\gamma}-\bar{v}_gp^{\beta}-\bar{\lambda}\right)}. \tag{5}$$

Рассмотрим отдельно выражение: $1\Big/(\bar{D}_gp^{\alpha}+V^{\beta}p^{\gamma}-\bar{v}_gp^{\beta}-\bar{\lambda})$. Здесь возможны следующие случаи: $\gamma<\beta, \gamma=\beta, \gamma>\beta$ Случай, когда $\gamma=\beta$ приводит нас к решению, полученному в работе [17], но с несколько другими коэффициентами. Пусть $\gamma>\beta$, тогда можно записать:

$$1/(p^{\alpha}-\sigma p^{\gamma}-\mu p^{\beta}-b)=p^{-\gamma}\Big/\left[(p^{\alpha-\gamma}-\sigma)(1-(\mu p^{\beta-\gamma}+bp^{-\gamma})/(p^{\alpha-\gamma}-\sigma))\right],$$

$$\sigma=-V^{\beta}\Big/\bar{D}_g, \quad \mu=\bar{v}_g/\bar{D}_g, \quad b=\bar{\lambda}/\bar{D}_g.$$

С учетом условия $\left|(\mu p^{\beta-\gamma}+bp^{-\gamma})/(p^{\alpha-\gamma}+\sigma)\right|<1$ его можно записать следующим образом [22]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{-\gamma}\left(\mu p^{\beta-\gamma}+bp^{-\gamma}\right)^{n}\Big/(p^{\alpha-\gamma}+\sigma)^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l+m=n}\frac{n!\mu^{m}b^{l}}{m!l!}p^{-1-l-(\gamma-\beta)m}\Big/(p^{\alpha-\gamma}+\sigma)^{n+1}.$$

Согласно работе [22] обратное преобразование Лапласа этого выражения для первого слагаемого уравнения (5) дает:

$$f_1(x)=\frac{C_1R_2}{\bar{D}_g}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l+m=n}\frac{n!\mu^{m}b^{l}x^{(\alpha-\gamma)n+\alpha-2+l+(\gamma-\beta)m}}{m!l!}F_1,$$

$$F_1={}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(n+1,1)\\((\alpha-\gamma)n+\alpha-1+l+(\gamma-\beta)m,\alpha-\gamma)\end{array}\middle|\left(\sigma x^{\alpha-\gamma}\right)\right],$$

${}_1\Psi_1(x)$ – обобщенная функция Райта [22, 24]. Аналогично для второго и третьего слагаемого уравнения (5):

$$f_2(x)=\frac{C_1R_1}{\bar{D}_g}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l+m=n}\frac{n!\mu^{m}b^{l}x^{(\alpha-\gamma)n+\alpha-1+l+(\gamma-\beta)m}}{m!l!}F_2,$$

$$F_2={}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(n+1,1)\\((\alpha-\gamma)n+\alpha+l+(\gamma-\beta)m,\alpha-\gamma)\end{array}\middle|\left(\sigma x^{\alpha-\gamma}\right)\right]$$

$$f_3(x)=-A_{\infty}b\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l+m=n}\frac{n!\mu^{m}b^{l}x^{(\alpha-\gamma)n+\alpha+l+(\gamma-\beta)m}}{m!l!}F_3,$$

$$F_3={}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(n+1,1)\\((\alpha-\gamma)n+\alpha+1+l+(\gamma-\beta)m,\alpha-\gamma)\end{array}\middle|\left(\sigma x^{\alpha-\gamma}\right)\right]$$

Решение в этом случае есть суперпозиция:

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x) \tag{6}$$

Найдем константу C_1. Для этого используем методику, предложенную в работе [17]. Запишем уравнение (5) в виде:

$$f(p)=\frac{C_2R_1}{\bar{D}_gp}\frac{\left(p^2+R_2/R_1p-A_{\infty}b/(R_1C_2)\right)}{p^{\alpha}-\mu p^{\beta}-\sigma p^{\gamma}-b}= \tag{7}$$

$$=\frac{C_2R_1}{\bar{D}_gp}\frac{\left[p-\left(\dfrac{-R+\sqrt{R^2+4A_{\infty}b/(R_1C_2)}}{2}\right)\right]\left[p-\left(\dfrac{-R-\sqrt{R^2+4A_{\infty}b/(R_1C_2)}}{2}\right)\right]}{p^{\alpha}-\mu p^{\beta}-\sigma p^{\gamma}-b},$$

$$R=R_2/R_1.$$

Так знаменатель уравнения (7) $p^{\alpha}-\mu p^{\beta}-\sigma p^{\gamma}-b$ является бесконечно возрастающей функцией, а ее значения находятся в правой полуплоскости, то уравнение имеет положительный корень. Обозначим этот корень как K, тогда знаменатель уравнения (6) можно разложить по степеням $p-K$:

$$p^{\alpha}-\mu p^{\beta}-\sigma p^{\gamma}-b=\sum_{i=0}^{\infty}c_i(p-K)^{i} \tag{8}$$

:

Подставляя (7) в (6) получим:

$$f(p)=\frac{C_2R_1}{\bar{D}_g p}\frac{\left[p+\left(\frac{R-\sqrt{R^2+4A_\infty b/(R_1C_1)}}{2}\right)\right]\left[p+\left(\frac{R+\sqrt{R^2+4A_\infty b/(R_1C_1)}}{2}\right)\right]}{(p-K)\sum\limits_{i=0}^{\infty}c_i(p-K)^{i-1}} \tag{9}$$

Для того чтобы $f(p)$ была аналитической в правой полуплоскости, необходимо подобрать константу C_1 таким образом, чтобы сократилась первая скобка в числителе со скобкой в знаменателе. Это достигается, когда

$$C_2=\frac{A_\infty b}{(K^2+RK)R_1} \tag{10}$$

Тогда решение (7) согласно (10) запишется так:

$$A(\xi,\tau)=\frac{A_\infty b e^{-(\xi-V\tau)\left(\frac{r_1+\sqrt{r_1^2+4r_2}}{2}\right)}}{(K^2+RK)R_1},\quad \xi>0$$

$$A(\xi,\tau)=A_\infty b\left[\frac{R_2\theta_2+R_1\theta_1}{\bar{D}_g(K^2R_1+KR_2)}-\theta_0\right],\xi<0$$

$$\theta_i=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m+l=n}\frac{\mu^m b^l(\xi-V\tau)^{(\alpha-\gamma)n+\alpha-2+i+l+(\gamma-\beta)m}}{m!l!}F_i, \tag{11}$$

$$F_i={}_1\Psi_1\left[\begin{array}{l}(n+1,1)\\((\alpha-\gamma)n+\alpha-2+i+l+(\gamma-\beta)m,\alpha-\gamma)\end{array}\middle|\sigma(\xi-V\tau)^{\alpha-\gamma}\right],$$

$$R_1=\exp\left(V\tau\left(r_1+\sqrt{r_1^2+4r_2}\right)\Big/2\right),R_2=-R_1(\bar{D}_a(r_1+\sqrt{r_1^2+4r_2})\Big/2+\bar{v}_a),$$

K – решение уравнения $y^\alpha-\sigma y^\gamma-\mu y^\beta-b=0$, $i=1,2,3$.

Замечание. Аналогичные рассждения можно использовать для случая $\gamma<\beta$. Произойдет переопределение параметров в (11).

Заключение

В настоящей работе было получено аналитическое решение задачи нестационарного переноса радона из рыхлых отложений в приземный слой атмосферыв режиме аномальной диффузии и адвекции, которое имеет явный вид. Это решение выражено через обобщенную функцию Райта в зависимости от параметров среды α,β,γ. Следующим этапом развития разработанной модели является исследование ее решения для различных значений α,β,γ, а также сопоставление результатов моделирования с экспериментальными данными.

Библиографический список

1. Фирстов П.П. и др. Подпочвенный радон и градиент потенциала атмосферного электрического поля в районе Петропавловск - Камчатского геодинамического полигона в 1998–2005 гг. (Камчатка) / П.П. Фирстов, Е.А. Понаморев, Н.В. Чернева, А.В. Бузевич // Вестник КРАУНЦ. Сер. науки о Земле. – 2006. – № 1. – Вып. 7. – С. 102–109.

2. Фирстов П.П., Рудаков В.П. Результаты регистрации подпочвенного радона в 1997–2000 гг. на Петропавловск-Камчастком геодинамическом полигоне // Вулканология и сейсмология. – 2002. – № 6. – С. 1–16.

3. Nigmatullin R.R. The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry // Phys. Stat. Solidi(b). – 1986. – Vol. 133. – P. 425–430.

4. Беданокова С.Ю. Математическое моделирование водного и солевого режимов в почвах с фрактальной организацией. автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Таганрог, 2007. – 16 с.

5. Мейланов Р.П., Шабанова М.Р Уравнение теплопроводности для сред с фрактальной структурой // Современные наукоемкие технологии. – 2007. – №8. – С. – 84–85.

6. Сербина Л.И. Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. – М.: Наука, 2007. – 167 с.

7. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.

8. Нахушева В.А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. – М.: Наука, 2006. – 173 с.

9. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. – М.: Университетская книга, 2005. – 848 с.

10. Metzler R., Klafter J. The random walks guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // Physics Reports. – 2000. – Vol. 339. – P. 1–77.

11. Mainardi F. Applications of integral transforms in fractional diffusion processes // Integral Transform. Spec. Function. – 2004. – Vol. – 15. – P. 477–484.

12. Zhou T., Li C. Synchronization in fractional-order differential systems // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2005. – Vol. 212. – P. 111–125.

13. Новиков Г.Ф. Радиометрическая разведка. – Л.: Недра, 1989. – 407 с.

14. Паровик Р.И. Моделирование процессов переноса радона ^{222}Rn в средах с фрактальной структурой и его стока в приземный слой атмосферы // Вестник КРАУНЦ. Сер. Науки о Земле. – 2008. – № 1. – Вып. 12. – С. 188—193.

15. Паровик Р.И., Шевцов Б.М. Моделирование процессов переноса радона в средах с фрактальной структурой // Математическое моделирование. – 2009. – Т. – 21. – №8. – С. 79–85.

16. Паровик Р.И. Об одной нелокальной модели диффузии–адвекции радона во фрактальной среде // Докл. АМАН. – 2009. – Т.11. – №1. – С. 110–113.

17. Паровик Р.И. Нелокальная модель диффузии-адвекции радона в среде с фрактальными свойствами // Докл. АМАН. – 2010. – Т.12. – №1. – С. 98–101.

18. Паровик Р.И. Модель нестационарной диффузии–адвекции радона в системе грунт–атмосфера // Вестник КРАУНЦ. Сер. Физ.-мат. науки. – 2010. – №1(1). – С. – 39–45.

19. Паровик Р.И. Решение задачи нестационарного переноса радона в системе грунт-атмосфера // Естественные и технические наук. – 2010. – №1. – С. – 348–349.

20. Паровик Р.И. Задача Коши для нелокального уравнения диффузии–адвекции радона во фрактальной среде // Вестник СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. – 2010. – № 1(20). – С. 127–132.

21. Учайкин В.В. Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008. – 512 с.

22. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 p.

23. Герасимов А.Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // АН СССР. Прикладная математика и механика. – 1948. – Т. 12. – С. 529–539.

24. Mathai A.M., Haubold H.J. Special Functions for Applied Scientists. New York: Springer, 2008. – 464 p.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 05.03.11