Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2011. № 1(2). C. 24-29. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2011-2-1-24-29

УДК 517.958+517.927

ОБ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ ПОЛОИДАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

Г.М. Водинчар[1,2], Л.К. Фещенко[2]

[1] Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4
[2] Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7
E-mail: gvodinchar@ikir.ru, krutevalu@mail.ru

Доказывается ортогональность собственных полей спектральной задачи $\mathrm{rot}\triangle\mathbf{S}+\lambda\mathrm{rot}\mathbf{S}=\mathbf{0}$ в пространстве полоидальных полей в сферической оболочке

Ключевые слова: спектральные задачи, сферическая оболочка, ортогональные поля

MSC 47F05+57R25

ORTHOGONAL SOLUTIONS OF A SPECTRAL PROBLEM IN THE CLASS OF POLOIDAL FIELD

G.M. Vodinchar[1,2], L.K. Feschenko[2]

[1] Kamchatka State University by Vitus Bering, 683032, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia
[2] Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia
E-mail: gvodinchar@ikir.ru, krutevalu@mail.ru

We prove the orthogonality of the eigenfields of the spectral problem $\mathrm{rot}\triangle\mathbf{S}+\lambda\mathrm{rot}\mathbf{S}=\mathbf{0}$ in the space of the poloidal field in a spherical shell

Key words: spectral problem, the spherical shell, orthogonal field

Введение

Модельное описание динамики вязкой несжимаемой жидкости в сферических оболочках играет большую роль в физике планет и звезд. Решение уравнения Навье-Стокса, описывающего подобные процессы, за исключение простейших случаев, можно получать только различными приближенными методами. Большую популярность при этом имеют методы, относящиеся к группе методов взвешенных невязок [1]. В этих методах искомое поле скорости жидкости раскладывается в линейную комбинацию стационарных бездивергентных полей с зависящими от времени амплитудами. Выбор системы полей для разложения можно сделать на основании различных соображений и одним из возможных подходов является использование для разложения полоидальной составляющей скорости собственных полей формулируемой ниже задачи (1).

При этом возникает важный для вычислительной устойчивости и качества аппроксимации вопрос об ортогональности используемых для разложения скорости базисных полей, исследуемый в настоящей работе.

Ортогональность собственных полей

Пусть H_S – пространство полоидальных полей в сферической оболочке Ω радиусов r_1 и r_2, нулевых на границе этой оболочки. Рассмотрим в H_S спектральную задачу

$$\begin{aligned} &\mathrm{rot}\,\triangle\,\mathbf{S}+\lambda\,\mathrm{rot}\mathbf{S}=\mathbf{0},\\ &\mathbf{S}\big|_{\partial\Omega}=\mathbf{0}. \end{aligned} \tag{1}$$

Явные выражения для собственных полей этой задачи и уравнение на собственные значения были получены в работе [2], поэтому приведем их здесь без вывода.

Если ввести сферическую систему координат с началом в центре оболочки, то собственными полями являются

$$\mathbf{S}_{knm}=\mathrm{rotrot}\left(R_{kn}(r)Y_n^m(\theta,\varphi)\mathbf{r}\right),$$

где $k=0,1,2,\ldots$ определяет дискретизацию решений задачи (1) и ее спектра по радиусу, а индексы $n=1,2,3,\ldots$ и $m=-n,\ldots,n$ – дискретизацию по угловым переменным θ и φ, т.е. по поверхности единичной сферы $\mathscr{S}^2$. Далее n и m будем называть сферическими индексами.

Здесь $Y_n^m(\theta,\varphi)$ – сферические гармоники, которые далее будем считать нормированными следующим образом:

$$\iint\limits_{\mathscr{S}^2}|Y_n^m|^2\,dS=1,$$

а радиальные функции R_{kn} удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}_n^2R_{kn}+\lambda_{kn}\mathscr{L}_nR_{kn}=0,\\ &R_{kn}(r_1)=R_{kn}(r_2)=\frac{dR_{kn}}{dr}\Big|_{r=r_1}=\frac{dR_{kn}}{dr}\Big|_{r=r_2}=0, \end{aligned} \tag{2}$$

где оператор

$$\mathscr{L}_n = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2},$$

а λ_{kn} – положительные собственные значения.

Каждому собственному значению λ_{kn} соответствуют при этом $2n+1$ линейно независимых собственных полей $\mathbf{S}_{knm}$ при $n = 0, \pm 1, \dots, \pm n$.

Рассмотрим теперь вопрос об ортогональности полей $\mathbf{S}_{knm}$ в объеме оболочки.

Теорема 1. *Собственные поля спектральной задачи (1), отличающиеся хотя бы одним из сферических индексов, ортогональны относительно скалярного произведения, определяемого формулой*

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \iiint\limits_{\Omega} \mathbf{p}\mathbf{q}\, dV.$$

Доказательство. Непосредственным вычислением легко установить, что в локальном сферическом базисе

$$\mathbf{S}_{knm} = \frac{R_{kn}}{r} n(n+1) Y_n^m \mathbf{e}_r + \left(\frac{dR_{kn}}{dr} + \frac{R_{kn}}{r} \right) \nabla_s Y_n^m, \tag{3}$$

где векторный дифференциальный оператор

$$\nabla_s = \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Тогда

$$\begin{gathered}
\langle \mathbf{S}_{knm}, \mathbf{S}_{k'n'm'} \rangle = nn'(n+1)(n'+1) \int\limits_{r_1}^{r_2} R_{kn} R_{k'n'}\, dr \iint\limits_{\mathscr{S}^2} Y_n^m Y_{n'}^{m'}\, dS + \\
+ \int\limits_{r_1}^{r_2} \left(\frac{dR_{kn}}{dr} + \frac{R_{kn}}{r} \right) \left(\frac{dR_{k'n'}}{dr} + \frac{R_{k'n'}}{r} \right) r^2\, dr \iint\limits_{\mathscr{S}^2} \nabla_s Y_n^m \nabla_s Y_{n'}^{m'}\, dS.
\end{gathered} \tag{4}$$

В формуле (4) оба поверхностных интеграла при $n \neq n'$ или $m \neq m'$ равны нулю. Для первого это очевидно ввиду ортогональности сферических функций на единичной сфере, а для второго доказано, например в [3].

Таким образом, $\langle \mathbf{S}_{knm}, \mathbf{S}_{k'n'm'} \rangle = 0$ при $n \neq n'$ или $m \neq m'$. □

Замечание. В случае совпадения обоих сферических индексов доказательство ортогональности собственных полей $\mathbf{S}_{knm}$ и $\mathbf{S}_{k'nm}$ относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ сложнее. Учитывая нормированность сферических гармоник и равенство

$$\iint\limits_{\mathscr{S}^2} (\nabla_s Y_n^m)^2\, dS = n(n+1),$$

доказанное в [3], получим по формуле (4), что в этом случае

$$\begin{gathered}
\langle \mathbf{S}_{knm}, \mathbf{S}_{k'nm} \rangle = n^2 (n+1)^2 \int\limits_{r_1}^{r_2} R_{kn} R_{k'n}\, dr + \\
+ n(n+1) \int\limits_{r_1}^{r_2} \left(\frac{dR_{kn}}{dr} + \frac{R_{kn}}{r} \right) \left(\frac{dR_{k'n}}{dr} + \frac{R_{k'n}}{r} \right) r^2\, dr.
\end{gathered} \tag{5}$$

Поскольку функции R_{kn} и $R_{k'n}$ являются решениями спектральной задачи (2) и имеют различные (при $k \neq k'$) собственные значения λ_{kn} и $\lambda_{k'n}$, то ортогональность $\mathbf{S}_{knm}$ и $\mathbf{S}_{k'nm}$ вытекает с учетом равенства (5) из следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть в пространстве $C^2_{[r_1;r_2]}$ функций переменной r, задана спектральная задача*

$$\mathscr{L}_n^2 w + \lambda \mathscr{L}_n w = 0, \tag{6}$$

$$w(r_1) = w(r_2) = \frac{dw}{dr}\Big|_{r=r_1} = \frac{dw}{dr}\Big|_{r=r_2} = 0, \tag{7}$$

и определено скалярное произведение формулой

$$\langle u, v\rangle_1 = n^2(n+1)^2 \int\limits_{r_1}^{r_2} uv\,dr + n(n+1) \int\limits_{r_1}^{r_2} \left(\frac{u}{r} + \frac{du}{dr}\right)\left(\frac{v}{r} + \frac{dv}{dr}\right) r^2\,dr.$$

Тогда собственные функции соответствующие различными собственными значениями ортогональны.

Доказательство. Прежде всего распишем подробно формулу, определяющую скалярное произведение, раскрыв скобки во втором интеграле:

$$\langle u, v\rangle_1 = n^2(n+1)^2 \int\limits_{r_1}^{r_2} uv\,dr + n(n+1) \int\limits_{r_1}^{r_2} uv\,dr + n(n+1) \int\limits_{r_1}^{r_2} u\frac{dv}{dr} r\,dr + \tag{8}$$
$$+ n(n+1) \int\limits_{r_1}^{r_2} v\frac{du}{dr} r\,dr + n(n+1) \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{du}{dr}\frac{dv}{dr} r^2\,dr.$$

Преобразуем один из интегралов в (8), интегрируя по частям и используя краевые условия (7):

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} u\frac{dv}{dr} r\,dr = urv\Big|_{r_1}^{r_2} - \int\limits_{r_1}^{r_2} v\,d(ur) = -\int\limits_{r_1}^{r_2} vr\,du - \int\limits_{r_1}^{r_2} vu\,dr = \tag{9}$$
$$= -\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{du}{dr} vr\,dr - \int\limits_{r_1}^{r_2} vu\,dr.$$

Подставив (9) в (8), получаем

$$\langle u, v\rangle_1 = n^2(n+1)^2 \int\limits_{r_1}^{r_2} uv\,dr + n(n+1) \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{du}{dr}\frac{dv}{dr} r^2\,dr. \tag{10}$$

Далее, интегрируя по частям, преобразуем второй интеграл в (10):

$$\begin{aligned} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{du}{dr}\frac{dv}{dr} r^2\,dr &= r^2\frac{du}{dr} v\Big|_{r_1}^{r_2} - \int\limits_{r_1}^{r_2} v\,d\left(\frac{du}{dr} r^2\right) = \\ &= -2\int\limits_{r_1}^{r_2} vr\frac{du}{dr}\,dr - \int\limits_{r_1}^{r_2} vr^2\frac{d^2u}{dr^2}\,dr. \end{aligned} \tag{11}$$

Теперь, подставив (11) в (10), получаем:

$$\langle u,v\rangle_1 = \int\limits_{r_1}^{r_2} \left[-n(n+1)r^2\frac{d^2u}{dr^2} - n(n+1)2r\frac{du}{dr} + n^2(n+1)^2u \right] v\,dr. \tag{12}$$

Введем дифференциальный оператор

$$\mathscr{N}_n = -n(n+1)r^2\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2}\right] = -n(n+1)r^2\mathscr{L}_n.$$

Тогда, выражение в квадратных скобках в (12) равно $\mathscr{N}_n u$ и

$$\langle u,v\rangle_1 = \int\limits_{r_1}^{r_2} v\mathscr{N}_n u\,dr. \tag{13}$$

Домножая (6) на $-n(n+1)r^2$ и вводя оператор $\mathscr{M}_n = n(n+1)r^2\mathscr{L}_n^2$, запишем исследуемую спектральную задачу в виде:

$$\mathscr{M}_n u = \lambda\mathscr{N}_n u. \tag{14}$$

Определим теперь следующие функции:

$$g_0(r) = n^2(n+1)^2, \quad g_1(r) = n(n+1)r^2,$$

$$f_0(r) = -n^2(n+1)^2/r^2, \quad f_1(r) = 4n(n+1), \quad f_2(r) = n(n+1)r^2.$$

Тогда непосредственным вычислением легко показать, что операторы $\mathscr{N}_n$ и $\mathscr{M}_n$ можно представить в следующей стандартной форме при $p=1$:

$$\mathscr{N}_n = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{d^k}{dr^k}\left(g_k(r)\frac{d^k}{dr^k}\right),\ \mathscr{M}_n = \sum_{k=0}^{2p}(-1)^k\frac{d^k}{dr^k}\left(f_k(r)\frac{d^k}{dr^k}\right),$$

Спектральные задачи вида (14) с операторами такого вида рассматривались в [4]. Покажем, что задача (14) является самосопряженной по терминологии этого источника, т.е., что выполняются равенства:

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}(v\mathscr{N}_n u - u\mathscr{N}_n v)\,dr = 0, \quad \int\limits_{r_1}^{r_2}(v\mathscr{M}_n u - u\mathscr{M}_n v)\,dr = 0. \tag{15}$$

Справедливость первого из этих равенств очевидно вытекает из (13), поскольку

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}(v\mathscr{N}_n u - u\mathscr{N}_n v)\,dr = \langle u,v\rangle_1 - \langle v,u\rangle_1 = 0.$$

Для интеграла во втором из равенств (15) применим преобразование Дирихле [4]:

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}(v\mathscr{M}_n u - u\mathscr{M}_n v)\,dr = \sum_{k=0}^{2}\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^{k+s}\times$$

$$\times\left[\frac{d^s u}{dr^s}\frac{d^{k-s-1}}{dr^{k-s-1}}\left(f_k\frac{d^k v}{dr^k}\right)-\frac{d^s v}{dr^s}\frac{d^{k-s-1}}{dr^{k-s-1}}\left(f_k\frac{d^k u}{dr^k}\right)\right]\Bigg|_{r_1}^{r_2}. \tag{16}$$

С учетом краевых условий (7) легко видеть, что все слагаемые двойной суммы в (16) нулевые, что и доказывает справедливость второго равенства (15).

Итак, спектральная задача (14) является самосопряженной. Тогда, для двух собственных функции $u_1(r)$ и $u_2(r)$, соответствующих двум различным собственным значениям λ_1 и λ_2 справедливы равенства [4]:

$$\int_{r_1}^{r_2} u_1\mathscr{N}_n u_2\,dr=\int_{r_1}^{r_2} u_1\mathscr{M}_n u_2\,dr=0,$$

Теперь, по формуле (13), получим $\langle u_1,u_2\rangle_1=0$, что и завершает доказательство теоремы. □

Заключение

В работе доказана ортогональность системы собственных полей задачи (1). Это свойство делает систему собственных полей удобной для использования в качестве аппроксимирующей системы при приближенном решении уравнения Навье-Стокса в сферической оболочке спектральным методом.

Библиографический список

1. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости. Т. 1. – М.: Мир, 1991. – 504 с.
2. Водинчар Г.М., Шевцов Б.М. Маломодовая модель конвекции во вращающемся шаровом слое вязкой жидкости // Вычисл. технологии. – 2009. – Т. 14. – № 4. – С. 3–15.
3. Chandrasekhar S. Hydrodynamics and hydromagnetic stability. – N.-Y.: Dover Publ. Inc, 1981. – 654 p.
4. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968. – 504 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 05.02.11