Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2011. № 1(2). С. 5-14. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2011-2-1-5-14

Математика

УДК 519.7

ОБ ОДНОЭЛЕМЕНТНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПОЛНОТЕ В АЛГЕБРЕ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

А.П. Горюшкин

Камчатский государственной университет имени Витуса Беринга, 683032,
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная , 4
E-mail: as2022@mail. ru

В статье обсуждаются вопросы, связанные с функциональной полнотой булевых функций. Результаты могут найти применение при исследовании структуры подалгебр алгебры булевых функций.

Ключевые слова: булева функция, полная система, самодвойственность, полином Жегалкина

Mathematica

MSC 03G05

ABOUT 1-ELEMENT FUNCTIONAL FULLNESS IN ALGEBRA OF THE BOOLEAN FUNCTIONS

A.P. Goryshkin

Kamchatka State University by Vitus Bering, 683032, Petropavlovsk Kamchatskiy, Pogranichnaya st, 4, Russia
E-mail: as2022@mail. ru

This article covers the problems connected with the functional fullness Boolean function. The results may be used at the study of the structure subalgebas algebras of the Boolean functions.

Key words: Boolean function, full system, duality, Zhegalkin's multinomial.

Введение

Для построения математических моделей дискретных преобразователей информации основ-ным аппаратом являются булевы функции. Для алгебры булевых функций важным является во-прос о порождающих (полных) системах функций. Эта алгебра обладает порождающими множе-ствами, состоящими всего из одной (полной) функции. Классическими примерами полных функ-ций с двумя переменными являются штрих Шеффера и стрелка Пирса (см. например, [1]) Эти две функции несложно сделать функциями от большего числа переменных: функция $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee \bar{x}_n$ является обобщенной функцией Шеффера, а $\bar{x}_1 \& \bar{x}_2 \& \ldots \& \bar{x}_n$ – обобщенной функцией Пирса.

Здесь будет показано, что существуют полные функции от n переменных, отличные от этих простых обобщений; и число таких функций весьма значительно. Поиск полных функций существенно опирается на результаты И. Жегалкина ([2]), а методика сходна с исследованием конечно порожденных групп (см., например [3]). В каждом таком исследовании существенную роль играет компьютерный эксперимент с использованием последних версий математического макета символьных вычислений *Maple*.

Способы нахождения полных функций и вычисления их количества рассмотрим сначала для булевых функций с небольшим числом переменных.

Число полных функций для числа переменных ≤ 5

Полином Жегалкина, представляющий полную функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, содержит четное число одночленов, в противном случае $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$, а свободный член полинома равен единице, иначе $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$. Отметим, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с таким полиномом Жегалкина не монотонна.

Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет единичный свободный член и нечетное число одночленов в полиноме Жегалкина, тогда полином ее двойственной функции $f(x_1 + 1, x_2 + 1, \ldots, x_n + 1) + 1$ будет уже без свободного члена. Это значит, что самодвойственная функция с единичным свободным членом имеет четное число одночленов в полиноме Жегалкина. Следовательно, самодвойственная функция, не сохраняющая нуль, не сохраняет и единицу.

Наоборот, пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не сохраняет единицу, т.е. число одночленов в ее полиноме Жегалкина четное. Тогда $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет единичный свободный член. Если f - самодвойственная, то и у функции f в ее полиноме Жегалкина должен быть свободный член, равный единице. Это значит, что самодвойственная функция, не сохраняющая единицу, не сохраняет и нуль.

Совершенная конъюнктивная форма самодвойственной функции получается из совершенной дизъюнктивной формы при переходе к двойственной функции. Поэтому самодвойственная функция принимает значение 0 в точности столько же раз, сколько и значение 1.

Теперь рассмотрим простейший случай с заранее известным ответом – случай двух переменных. Предположим, что функция $f(x, y) = a_0xy + a_1x + a_2y + 1$ – полная. Тогда она не совпадает с двойственной ей функцией

$$f^{\star}(x,y) = f(x+1, y+1) + 1 = a_0(x+1)(y+1) + a_1(x+1) + a_2(y+1) + 1 =$$
$$= a_0xy + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_2)y + (a_0 + a_1 + a_2).$$

Представление булевой функции в виде полинома Жегалкина над полем $\mathbf{Z}_2$ классов вычетов по модулю два единственно. Поэтому функция $f(x,\ y)$ будет самодвойственной (и, следовательно, неполной) тогда и только тогда, когда коэффициенты a_0, a_1, a_2 ее полинома Жегалкина являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} a_0 = a_0, \\ a_0 + a_1 = a_1, \\ a_0 + a_2 = a_2, \\ a_0 + a_1 + a_2 = 1. \end{cases}$$

Эта система равносильна системе

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 1 + a_2. \end{cases}$$

Переменное a_2 – свободное и принимает в точности два значения: $a_2 \in \{0,\ 1\}$. Следовательно, среди функций от двух переменных, представленных полиномами Жегалкина с ненулевым свободным членом самодвойственных всего две. Придавая значения свободному неизвестному a_2, найдем эти две функции (см. табл. 1):

Таблица 1

Полиномы Жегалкина

a_2	$f\ (x,\ y) = (1 + a_2)x + a_2y + 1$
0	$x + 1$
1	$y + 1$

Таким образом, из четырех функций, не сохраняющих ни нуль, ни единицу, в точности две являются самодвойственными. Значит, оставшиеся две – несамодвойственные и, следовательно, полны.

Естественно, что одна из них – это штрих Шеффера, $x \mid y = xy + 1$; вторая – стрелка Пирса: $x \downarrow y = xy + x + y + 1$.

При автоморфизме полная система переходит в полную же систему, и в частности полная функция – в полную. Отображение, переводящее функцию в двойственную, является автоморфизмом. Неподвижные элементы этого автоморфизма (самодвойственные функции) неполные. Поэтому множество полных функций распадается на два класса двойственных друг другу функций. В рассматриваемом случае классы эти одноэлементные: функции Шеффера и Пирса двойственны друг другу.

Пусть $f(x,\ y,\ z) = a_0xyz + a_1xy + a_2xz + a_3yz + a_4x + a_5y + a_6z + 1$ – булева функция с неопределенными пока коэффициентами a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6.

Двойственная для $f(x,\ y,\ z)$ функция имеет вид:

$$f^{\star}(x,y,z) = f(x+1, y+1, z+1) + 1 = a_0xyz + a_6 + a_0 + a_1x + a_1y +$$

$$+ a_2x + a_2z + a_3y + a_3z + a_4x + a_5y + a_6z + a_0x + a_0y + a_0z + a_1 +$$

$$+ a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_0yz + a_0xy + a_0xz + a_2xz + a_1xy + a_3yz =$$

$$= a_3 + a_1 + a_2 + a_0 + a_6 + a_4 + a_5 + (a_1 + a_2 + a_4 + a_0)x + (a_1 + a_3 + a_0 + a_5)y +$$

$$+ (a_3 + a_6 + a_2 + a_0)z + a_0xyz + (a_0 + a_1)xy + (a_0 + a_2)xz + (a_0 + a_3)yz.$$

Найдем разность

$$f_1(x,y,z)=f(x,y,z)-f^{\star}(x,y,z)=(a_1x+a_2x+a_0x)+(a_0y+a_3y+a_1y)+(a_0z+a_3z+a_2z)+$$

$$+a_0yz+a_0xy+a_0xz\ \ +(1+a_6+a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5).$$

Функция $f(x,\ y)$ будет самодвойственной (и соответственно неполной) тогда и только тогда, когда коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_0 ее полинома Жегалкина являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2=0, \\ a_0+a_1+a_3=0, \\ a_0+a_2+a_3=0, \\ a_0=0, \\ a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+1=0. \end{cases}$$

Найдем общее решение этой системы:

$$\begin{cases} a_0=0, \\ a_1=1+a_4+a_5+a_6, \\ a_2=1+a_4+a_5+a_6, \\ a_3=1+a_4+a_5+a_6, \end{cases}$$

где a_4, a_5, a_6 – свободные переменные; a_5, a_4, $a_6 \in\{0,\ 1\}\}$.

Таким образом, если функция $f(x,\ y,\ z)$ – самодвойственная (и следовательно, неполная), то она имеет полином Жегалкина вида

$$(1+a_4+a_5+a_6)xy+(1+a_4+a_5+a_6)xz+(1+a_4+a_5+a_6)yz+a_4x+a_5y+a_6z+1.$$

Разместим все восемь получившихся самодвойственных функций в таблицу:

Таблица 2

Свободные переменные			Полиномы Жегалкина
a_4	a_5	a_6	$(1+a_4+a_5+a_6)xy+(1+a_4+a_5+a_6)xy+$ $(1+a_4+a_5+a_6)yz+a_4x+a_5y+a_6z+1$
0	0	0	$xy+xz+yz+1$
0	0	1	$z+1$
0	1	0	$x+1$
0	1	1	$xy+xz+yz+x+z+1$
1	0	0	$y+1$
1	0	1	$xy+xz+yz+y+z+1$
1	1	0	$xy+xz+yz+x+y+1$
1	1	1	$x+y+z+1$

Все остальные функции, не сохраняющие ни ноль, ни единицу, являются несамодвойственными и поэтому полными. Число функций от трех переменных, не сохраняющих ни нуль, ни единицу, составляет $2^6=64$, восемь из них неполные, каждая из остальных 56 функций с помощью суперпозиций порождает всю алгебру булевых функций. От трех переменных x, y, z можно построить три функции Шеффера, три функции Пирса и два их обобщения:

$$\overline{x}\vee\overline{y},\quad \overline{x}\vee\overline{z},\quad \overline{y}\vee\overline{z},\quad \overline{x}\&\overline{y},\quad \overline{x}\&\overline{z},\quad \overline{y}\&\overline{z},\quad \overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z},\quad \overline{x}\&\overline{y}\&\overline{z}.$$

Таким образом, в точности 48 функций от трех переменных не являются функциями Шеффера и Пирса или их обобщениями. Выясним, например, является ли полной функция

$$s(x,y,z)=xy+xz+x+y+z+1.$$

Эта функция нелинейна, в своем полиноме Жегалкина имеет единичный свободный член и четное число одночленов, и этой функции нет в таблице самодвойственных функций. Следовательно, функция $s(x,\ y,\ z)$ образует полную систему. Отметим, что полной будет любая функция от трех переменных, имеющая полином Жегалкина с четным числом одночленов, один из которых равен единице, и содержащая одночлен xyz или одночлены axy, bxz с yz, у которых коэффициенты a,b,c различны.

Рассмотрим теперь функции от четырех переменных. Найдем сначала все самодвойственные функции от четырех переменных, не сохраняющих ни нуль, ни единицу. Пусть

$$f(x,y,z,t)=a_0xyzt+a_1xyz+a_2xyt+a_3xtz+a_4yzt+a_5xy+a_6xz+$$
$$+a_7yz+a_8xt+a_9yt+a_{10}zt+a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t+1$$

– булева функция с неопределенными коэффициентами a_0, a_1, $a_{3,}\ldots$, a_{14}. Функция $f^\star$, двойственная для f, имеет вид:

$$f^\star(x,y,z,t)=f(x+1,y+1,z+1,z+1)+1=$$
$$=a_0(x+1)(y+1)(z+1)(t+1)+a_1(x+1)(y+1)(z+1)+$$
$$+a_2(x+1)(y+1)(t+1)+a_3(x+1)(t+1)(z+1)+a_4(y+1)(z+1)(t+1)+a_5(x+1)(y+1)+$$
$$+a_6(x+1)(z+1)+a_7(y+1)(z+1)+a_8(x+1)(t+1)+a_9(y+1)(t+1)+a_{10}(z+1)(t+1)+$$
$$+a_{11}(x+1)+a_{12}(y+1)+a_{13}(z+1)+a_{14}(t+1)+1=$$
$$=a_0xyz+a_0xyt+a_0xzt+a_0yzt+a_0zt+a_1xyz+a_2xyt+a_3xtz+$$
$$+a_4yzt+a_{12}y+a_{11}x+a_0xyzt+a_5xy+a_6xz+a_7yz+a_0yz+a_8xt+$$
$$+a_9yt+a_{10}zt+a_1xy+a_1xz+a_1yz+a_2xy+a_2xt+a_2yt+a_3xt+a_3xz+$$
$$+a_3zt+a_4yz+a_4yt+a_4zt+a_{13}z+a_{14}t+a_0x+a_0y+a_0z+$$
$$+a_0t+a_1x+a_1y+a_1z+a_2x+a_2y+a_2t+a_3x+a_3t+a_3z+a_4y+$$
$$+a_4z+a_4t+a_5x+a_5y+a_6x+a_6z+a_7y+a_7z+a_8x+a_8t+a_9y+a_9t+$$
$$+a_{10}z+a_{10}t+a_0xt+a_0xz+a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+$$
$$+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_0xy+a_0yt=$$
$$=(a_4+a_0)yzt+(a_0+a_2)xyt+(a_0+a_3)xzt+(a_1+a_0)xyz+a_0xyzt+$$
$$+(a_{11}+a_2+a_0+a_5+a_1+a_8+a_3+a_6)x+(a_4+a_2+a_9+a_{12}+a_5+a_0+a_7+a_1)y+$$
$$+(a_{10}+a_4+a_{13}+a_7+a_3+a_6+a_0+a_1)z+(a_2+a_{14}+a_8+a_3+a_0+a_{10}+a_4+a_9)t+$$

$$+(a_2+a_5+a_0+a_1)xy+(a_6+a_3+a_1+a_0)xz+(a_1+a_4+a_0+a_7)yz+$$
$$+(a_3+a_0+a_8+a_2)xt+(a_0+a_9+a_2+a_4)yt+(a_3+a_4+a_{10}+a_0)zt+a_0+$$
$$+(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}).$$

Вычислим полином Жегалкина для функции $f_1(x,y,z,t)=f(x,y,z,t)-f^{\star}(x,y,z,t)$:

$$f_1(x,y,z,t)=1+a_0xyz+a_0xyt+a_0xzt+a_0yzt+a_0zt+$$
$$+a_0yz+a_1xy+a_1xz+a_1yz+a_2xy+a_2xt+a_2yt+a_3xt+a_3xz+a_3zt+a_4yz+$$
$$+a_4yt+a_4zt+a_0x+a_0y+a_0z+a_0t+a_1x+a_1y+a_1z+a_2x+a_2y+a_2t+a_3x+$$
$$+a_3t+a_3z+a_4y+a_4z+a_4t+a_5x+a_5y+a_6x+a_6z+a_7y+a_7z+a_8x+$$
$$+a_8t+a_9y+a_9t+a_{10}z+a_{10}t+a_0xt+a_0xz+a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+$$
$$+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_0xy+a_0yt=$$
$$=a_0xyz+a_0xyt+a_0xzt+a_0yzt+(a_2+a_0+a_1)xy+$$
$$+(a_3+a_1+a_0)xz+(a_0+a_4+a_1)yz+(a_2+a_3+a_0)xt+(a_2+a_0+a_4)yt+$$
$$+(a_4+a_3+a_0)zt+(a_3+a_2+a_0+a_1+$$
$$+a_6+a_8+a_5)x+(a_0+a_9+a_1+a_7+a_4+a_5+a_2)y+$$
$$+(a_{10}+a_3+a_0+a_1+a_6+a_7+a_4)z+(a_2+a_3+a_8+a_{10}+a_9+a_4+a_0)t+$$
$$+(a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+1).$$

Функция $f(x,y,z,t)$ будет самодвойственной тогда и только тогда, когда все коэффициенты у многочлена $f_1(x,y,z,t)$ нулевые. Множество решений системы уравнений

$$\{a_0=0, a_2+a_0+a_1=0, a_3+a_1+a_0=0, a_0+a_4+a_1=0, a_2+a_3+a_0=0, a_2+a_0+a_4=0,$$
$$a_4+a_3+a_0=0, a_3+a_2+a_0+a_1+a_6+a_8+a_5=0, a_0+a_9+a_1+a_7+a_4+a_5+a_2=0,$$
$$a_{10}+a_3+a_0+a_1+a_6+a_7+a_4=0, a_2+a_3+a_8+a_{10}+a_9+a_4+a_0=0,$$
$$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+1=0\}$$

имеет вид:

$$\{(0,\ a_5+a_8+a_9,\ a_5+a_8+a_9,\ a_5+a_8+a_9,\ a_5+a_8+a_9,\ a_5,\ a_9,\ a_8,\ a_8,\ a_9,\ a_5,$$
$$1+a_{12}+a_{13}+a_{14},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14})\mid a_5,\ a_8,\ a_9,\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14}\in\{0,\ 1\}\}.$$

Переменные a_5, a_8, a_9, a_{12}, a_{13}, a_{14} – свободные; число различных наборов свободных переменных составляет $2^6=64$. Поэтому число самодвойственных функций, не сохраняющих ни нуль, ни единицу равно 64. Каждая такая функция представима в виде

$$(a_5+a_8+a_9)xyz+(a_5+a_8+a_9)xyt+(a_5+a_8+a_9)xtz+(a_5+a_8+a_9)yzt+$$
$$+a_5xy+a_9xz+a_8yz+a_8xt+a_9yt+a_5zt+(1+a_{12}+a_{13}+a_{14})x+ \tag{1}$$
$$+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t+1.$$

Итак, из 65 536 функций от четырех переменных 2^{14} =16 384 функции не сохраняют ни нуль, ни единицу, а среди них в точности 64 самодвойственных (и одновременно линейных) функций. Это значит, что число полных функций от четырех переменных составляет 16 384 – 64 = 16 320.

Если полином Жегалкина функции от четырех переменных имеет единичный свободный член, четное число одночленов и не имеет вид (1), то такая функция полная.

Например, функция $s(x,y,z,t)=xyzt+xyz+z+1$ обладает всеми этими свойствами и, следовательно, $s(x,y,z,t)$ - полная. Вообще любая функция с четным числом одночленов и единичным свободным членом, содержащая одночлен четвертой степени (или число одночленов третьей степени, отличное от нуля и четырех), заведомо будет полной.

Исследование полных функций от пяти переменных можно провести по той же методике. Запишем функцию от пяти переменных с единичным свободным членом в полиноме Жегалкина с неопределенными коэффициентами:

$$f(x,y,z,t,u)=a_0xyztu+a_1yztu+a_2xztu+a_3xytu+$$

$$+a_4xyzu+a_5xyzt+a_6ztu+a_7xtu+a_8ytu+a_9xyz+$$

$$+a_{10}xyu+a_{11}yzt+a_{12}yzu+a_{13}xzt+a_{14}xyt+a_{15}xzu+a_{16}xy+$$

$$+a_{17}yz+a_{18}xz+a_{19}tu+a_{20}zt+a_{21}xu+a_{22}xt+a_{23}yu+a_{24}zu+a_{25}yt+$$

$$+a_{26}x+a_{27}y+a_{28}z+a_{29}t+a_{30}u+1.$$

Вычислим двойственную $f^{\star}(x,y,z,t,u)$ функцию для $f(x,y,z,t,u)$ и приравняем коэффициенты разности $f^{\star}(x,y,z,t,u)-f(x,y,z,t,u)$ к нулю. В результате получим систему уравнений для коэффициентов функции $f(x,y,z,t,u)$:

$$\{a_0=0,\ a_3+a_0+a_5=0,\ a_0+a_5=0,\ a_2+a_0+a_5=0,\ a_5+a_0+a_1=0,\ a_0+a_3=0,$$

$$a_0+a_2=0,\ a_0+a_1=0,\ a_1+a_3+a_0=0,\ a_1+a_2+a_0=0,\ a_3+a_2+a_0=0,$$

$$a_0+a_{10}+a_{15}+a_{12}+a_4x+a_8+a_6+a_7+a_{21}+a_3+a_2+a_1+a_{24}+a_{23}+a_{19}=0,$$

$$a_{16}+a_{18}+a_0+a_{22}+a_{10}+a_3+a_{13}+a_7+a_9+a_2+a_5+a_{14}+a_{15}+a_{21}=0,$$

$$a_{12}+a_{14}+a_{16}+a_0+a_1+a_{25}+a_3+a_4x+a_5+a_9+a_8+a_{11}+a_{23}+a_{17}+a_{10}=0,$$

$$a_{13}+a_{15}+a_{17}+a_0+a_1+a_{24}+a_2+a_4x+a_5+a_9+a_6+a_{12}+a_{20}+a_{18}+a_{11}=0,$$

$$a_0+a_{22}+a_5+a_7+a_2+a_8+a_3+a_6+a_{20}+a_{25}+a_{14}+a_{13}+a_{11}+a_1+a_{19}=0,$$

$$a_0+a_9+a_3+a_{10}+a_{14}+a_5=0, a_9+a_{13}+a_{15}+a_5+a_0+a_2=0,$$

$$a_{11}+a_5+a_4x+a_{12}+a_1+a_0+a_9=0, a_3+a_{14}+a_0+a_2+a_7+a_{13}+a_5=0,$$

$$a_{11}+a_0+a_{14}+a_8+a_1+a_5+a_3=0, a_{11}+a_0+a_{13}+a_6+a_1+a_5+a_2=0,$$

$$a_{10}+a_{15}+a_7+a_3+a_0+a_2=0, a_4x+a_{10}+a_0+a_8+a_{12}+a_1+a_3=0,$$

$$a_4x+a_{15}+a_0+a_6+a_{12}+a_1+a_2=0, a_8+a_1+a_6+a_7+a_0+a_3+a_2=0,$$

$$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4x+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16}+$$

$$+a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}+a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}+a_{25}+a_{26}+a_{27}+a_{28}+a_{29}+a_{30}+1=0\}.$$

Эта система равносильна системе

$$\{a_0=0,\ a_1=0,\ a_{10}=0,\ a_{11}=0,\ a_{12}=a_4,\ a_{13}=0,\ a_{14}=0,\ a_{15}=0,\ a_{16}=a_{25}+a_{24}+a_{22},$$

$$a_{17}=a_{24}+a_{22}+a_{23},\ a_{18}=a_{21}+a_{25}+a_{24},\ a_{19}=a_{21}+a_{24}+a_{23},\ a_2=0,$$

$$a_{20}=a_{22}+a_{25}+a_{21}+a_{24}+a_{23},\ a_{21}=a_{21},\ a_{22}=a_{22},\ a_{23}=a_{23},\ a_{24}=a_{24},\ a_{25}=a_{25},$$

$$a_{26}=1+a_{27}+a_{28}+a_{29}+a_{30},\ a_{27}=a_{27},\ a_{28}=a_{28},\ a_{29}=a_{29},\ a_3=0,\ a_{30}=a_{30},$$

$$a_4=a_4,\ a_5=0,\ a_6=0,\ a_7=0,\ a_8=0,\ a_9=0\}.$$

Следовательно, десять неизвестных: a_4, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{27}, a_{28}, a_{29}, a_{30}, являются свободными, и число самодвойственных функций от пяти переменных, не сохраняющих ни нуль, ни единицу, составляет $2^{10}=1\ 024$. Таким образом, среди всех 4 294 967 296 функций от пяти переменных содержится $2^{2^5-2}-1\ 024=2^{30}-1\ 024=$1 073 740 800 полных функций.

Функция от пяти переменных полна, если ее полином Жегалкина имеет четное число одночленов, единичный свободный член и ее нельзя представить в виде

$$f(x,y,z,t,u)=(a_{22}+a_{25}+a_{21}+a_{24}+a_{23})zt+a_{21}xu+a_{22}xt+a_{23}yu+a_{24}zu+a_{25}yt+a_{28}z+$$

$$+a_{29}t+a_{30}u+a_{27}y+a_4xyzu+a_4yzu+(1+a_{27}+a_{28}+a_{29}+a_{30})x+(a_{21}+a_{24}+a_{23})tu+$$

$$+(a_{24}+a_{22}+a_{23})yz+(a_{25}+a_{24}+a_{22})xy+(a_{21}+a_{25}+a_{24})xz+1,$$

где a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{27}, a_{28}, a_{29}, a_{30}, a_4 принадлежат множеству $\{0,\ 1\}$.

Например, любая функция с четным числом одночленов и единичным свободным членом в полиноме Жегалкина, содержащая одночлен пятой степени, будет полной.

Подведем первые итоги. Обозначим символом ПП(n) плотность n-полноты, т. е. отношения числа полных функций от n переменных к числу всех функций от n переменных. Предыдущие вычисления показали, что

$$\text{ПП}(2)=0{,}125;\ \text{ПП}(3)=0{,}2187500000;$$
$$\text{ПП}(4)=0{,}2490234375;\ \text{ПП}(5)=0{,}2499997616.$$

Даже из этого небольшого числа примеров видно, что с увеличением n число ПП(n) приближается к одной четверти всех функций. Покажем, что это свойство сохранится при увеличении числа n.

Асимптотическое число полных функций от n переменных

Во всех случаях вычисления числа ПП(n) при $n\ \leq 5$ использовался тот простой факт, что если $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ – полная функция, то

$$f(0,0,\ldots,0)=1 \text{ и } f(1,1,\ldots,1)=0,$$

а это означало, в частности, что f к тому же и немонотонна.

Оставшиеся $2^n - 2$ строк таблицы значений для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ могут быть заполнены 2^{2^n-2} различными способами. Из этих 2^{2^n-2} функций все функции, не являющиеся линейными или самодвойственными, будут полными. Таким образом, получается оценка сверху для ПП(n):

$$\text{ПП}(n) < \frac{2^{2^n-2}}{2^{2^n}} = \frac{1}{4}.$$

Уберем теперь из множества функций, не сохраняющих ни нуль, ни единицу, все самодвойственные (одновременно будут удалены и все линейные функции).

Пусть g – функция от n переменных, не сохраняющая ни нуль, ни единицу и принимающая значение 0 в точности столько же раз, сколько и значение 1. Чтобы задать таблицу значений для g достаточно ровно половину 2^n-2 строк таблицы заполнить единицами. Следовательно, число функций g с перечисленными свойствами равно числу $\left(\frac{2^n-2}{2}\right)$ –элементных подмножеств множества, состоящего из 2^n-2 элементов. Таким образом, число самодвойственных функций, не сохраняющих ни 0, ни 1, не превышает числа

$$C_{2^n-2}^{2^{n-1}-1} = \frac{(2^n-2)!}{(2^{n-1})!\,((2^n-2)-(2^{n-1}-1))!}.$$

Число всех функций от nпеременных, не сохраняющих ни нуль, ни единицу, равно 2^{2^n-2}, поэтому число полных функций от n переменных не меньше числа

$$2^{2^n-2} - \frac{(2^n-2)!}{(2^{n-1}-1)!\,(2^n-2^{n-1}-1)!}.$$

Таким образом, получаем оценку относительной плотности ПП(n) снизу:

$$\text{ПП}(n) \geq \frac{2^{2^n-2} - \frac{(2^n-2)!}{(2^{n-1}-1)!(2^n-2^{n-1}-1)!}}{2^{2^n}} = \frac{1}{4} - \frac{(2^n-2)!}{(2^{n-1}-1)!\,(2^n-2^{n-1}-1)!\cdot 2^{2^n}} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{-(2^n)!\cdot 2^n}{4\cdot(2^{n-1}-1)\cdot\left((2^{n-1})!\right)^2\cdot 2^{2^n}} = \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}\frac{(2^n)!\cdot 2^n}{(2^{n-1}-1)\left((2^{n-1})!\right)^2\cdot 2^{2^n}}\right).$$

При $n \to \infty$ второе слагаемое стремится к нулю. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^n)!}{\left((2^{n-1})!\right)^2\cdot 2^{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi\cdot 2^n}\cdot(2^n)^{(2^n)}\cdot e^{-2^n}}{\left(\sqrt{2\pi\cdot 2^{n-1}}\cdot(2^{n-1})^{(2^{n-1})}\cdot e^{-2^{n-1}}\right)^2\cdot 2^{2^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n)^{(2^n)}}{\left((2^{n-1})^{(2^{n-1})}\right)^2\cdot\sqrt{2^n}\cdot 2^{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{(n2^n)}}{2^{\left(n2^n+\frac{n}{2}\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} = 0.$$

Полученный результат означает, что при увеличении числа n число полных функций от n переменных приближается снизу к числу $2^{(2^n)-2}$. Вместе с верхней границей для плотности полноты $\Pi\Pi(n) < \frac{1}{4}$ получаем точную асимптотическую оценку для $\Pi\Pi(n)$:

$$\lim_{n\to\infty} \Pi\Pi(n) = \frac{1}{4}.$$

Библиографический список

1. Жегалкин И.И. О технике вычисления предложений в символической логике // Матем. сб. – 1927. – №1(34). – С. 45–52.
2. PEIRCE Ch. S. Collected papers // Cambridge, Harvard univ. press, 1958. – Vol. 8.
3. Горюшкин А.П. О группах с представлением $<a,\ b;\ a^n = 1,\ ab = b^3a^3>$ // Вестник КРАУНЦ, Сер. Физ.-мат. науки. – 2010. – №1(1). – С. 8–11.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 28.03.11