



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Чемарев, Г. М. Водинчар, А. Б. Тристанов, Численное моделирование в маломодовой модели геодинамо с использованием пакетов вычислений произвольной точности, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2011, выпуск 2(3), 89–95

DOI: <http://dx.doi.org/10.18454/2079-6641-2011-3-2-89-95>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 77.82.206.18

19 июля 2016 г., 18:23:52



УДК 519.688+532.5+551.16

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В МАЛОМОДОВОЙ МОДЕЛИ ГЕОДИНАМО С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТОВ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЧНОСТИ**

**Чемарев А.С.<sup>1</sup>, Водинчар Г.М.<sup>1,2</sup>, Тристанов А.Б.<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup> Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7

<sup>2</sup> Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, 683032, ул. Пограничная, 4

E-mail: [chemarev@gmail.com](mailto:chemarev@gmail.com), [gvodinchar@ikir.ru](mailto:gvodinchar@ikir.ru), [lex3@ikir.ru](mailto:lex3@ikir.ru)

Рассмотрены средства вычислений с высокой точностью, проведен их сравнительный анализ, рассматривается применение оптимального из них к решению задачи геодинамо.

*Ключевые слова: геодинамо, высокоточные вычисления, ресурсоемкие вычисления*

© Чемарёв А.С., Водинчар Г.М., Тристанов А.Б., 2011

MSC 68Q17

## **NUMERICAL SIMULATION IN LOW MODED GEODYNAMO MODEL APPLYING THE PACKAGES OF HIGH PRECISION CALCULATION**

**Chemarev A.S.<sup>1</sup>, Vodinchar G.M.<sup>1,2</sup>, Tristanov A.B.<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup> Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7

<sup>2</sup> Vitus Bering Kamchatka State University, 683032, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4

E-mail: [chemarev@gmail.com](mailto:chemarev@gmail.com), [gvodinchar@ikir.ru](mailto:gvodinchar@ikir.ru), [lex3@ikir.ru](mailto:lex3@ikir.ru)

The means of high precision calculation are considered, their comparative analysis is fulfilled, application of the most efficient of them for the geodynamo task is regarded.

*Key words: geodynamo, high precision calculation, resource-intensive calculation.*

© Chemarev A.S., Vodinchar G.M., Tristanov A.B., 2011

## Введение

Одним из видов ошибок, которые возникают при численном моделировании на ЭВМ, являются ошибки, возникающие из-за специфики устройства вычислительной техники. Числа, с которыми работает машина, имеют ограниченное количество значащих цифр.

При этом решаемые задачи могут содержать слагаемые, различающиеся на много порядков. В результате, возникает ситуация, в которой при сложении двух чисел результатом будет наибольшее по модулю из них. Малые слагаемые, которые при этом теряются, могут отвечать важным составляющим модели, например малым нелинейным эффектам. Пропуск таких слагаемых может принципиально изменить решение при численном исследовании нелинейных моделей.

Выходом из подобных ситуаций является использование средств вычислений, в которых числа имеют неограниченное (точнее говоря - управляемое) количество значащих цифр. Такую возможность предоставляют системы компьютерной алгебры Maple, Maxima, Matlab (расширение ToolBox Symbolic Math).

В этих системах алгебраическая арифметика реализована вообще с бесконечной точностью, а точностью вычислений с плавающей точностью можно управлять. Однако их недостаток в том, что они ориентированные на символьные вычисления, и программы, написанные при помощи этих систем, работают чрезвычайно медленно.

Другим вариантом является использование в программах, написанных на универсальных языках высокого уровня, специализированных библиотек высокоточной арифметики. В языках C/C++ можно использовать библиотеку GNU MP, в языке Java - типы данных BigInteger и BigDecimal.

В настоящей работе будут рассмотрены некоторые из указанных вариантов и использование одного из них для численного исследования одной маломодовой модели геодинамо [1].

## Обзор средств вычислений с произвольной точностью

Приведем некоторые характеристики указанных во введении программных средств.

Программные средства, реализующие высокоточные вычисления можно характеризовать по ряду показателей, таких как: условия лицензирования (распространения), специализация. Проведем небольшой сравнительный анализ некоторых программных средств, реализующих высокоточные вычисления.

Прежде всего, отметим пакеты символьных вычислений, такие как Maple, Maxima, Mathematica, Derive, ToolBox Symbolic Math для Matlab. Во всех этих системах высокоточные вычисления с плавающей точкой реализованы как символьные преобразования, что делает их весьма медленными. К тому же программы в этих системах интерпретируемые, что также снижает быстродействие.

В языке Java существуют типы данных BigInteger и BigDecimal, но недостатком Java для высокоточного численного моделирования на наш взгляд является то, что даже простейшие операции типа сложения и вычитания реализованы функциями. В целом, в этом языке не допускается операция перегрузки операторов для стандартных типов данных [2]. Это приводит к тому, что программирование даже несложных расчетных формул становится очень громоздким.

Для языков C/C++ существует библиотека GNU MP, в которой реализовано представление больших целых чисел, рациональных чисел и чисел с плавающей точкой с произвольной мантиссой, а также функции по вычислениям с ними [3]. При этом для программ на C++ перегружены для этих чисел стандартные арифметические операции.

Таким образом, в первом приближении, для разработки высокоточных программ численного моделирования предпочтительным выглядит использование библиотеки GNU MP.

Далее рассмотрим в качестве примера сопоставление некоторых систем по быстродействию на примере численного исследования осциллятора Ван-Дер Поля, известного как одна из стандартных тестовых задач для алгоритмов решения жестких системы обыкновенных дифференциальных уравнений [4].

## Решение задачи Ван-Дер Поля

Задача Ван-Дер Поля, записанная в виде системы уравнений, выглядит следующим образом [5]:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 & y_1(0) &= 2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= \mu(1 - y_1^2)y_2 - y_1 & y_2(0) &= 0 \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\mu$  это коэффициент жесткости. Причем, чем больше значение  $\mu$ , тем более жесткой становится задача. Для данной записи  $\mu$  необходимо брать положительным, однако система остается жесткой и для отрицательных значений. Это имеет место, если в системе обратить время и переменную  $y_1$ .

Известно, что характерной чертой фазового портрета этой системы является наличие предельного цикла, а точное аналитическое решение для этого осциллятора неизвестно [6]. При этом, период решения возрастает с ростом  $\mu$ .

Для решения использовался метод Розенброка, который для автономных систем ОДУ  $\frac{dy}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$  имеет вид [7]:

$$(E - \alpha hA - \beta h^2 A^2) \frac{\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n}{h} = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n + \gamma h \mathbf{f}(\mathbf{y}_n)) \quad (2)$$

Здесь  $h$  - шаг интегрирования,  $E$  - единичная матрица,  $A$  - матрица Якоби функции  $\mathbf{f}$  в точке  $\mathbf{y}_n$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  - параметры.

Сравним скорость решения этой задачи для систем Maxima, Maple 12 и библиотеки GNU MP.

Таблица 1

**Фазовое пространство задачи Ван-Дер Поля при  $\mu = 450$ ,  $h = 0.0002$ ,  $T = 980$ .**

$\mu$	$h$	$T$	Maxima	Maple	GNU MP
60	0,01	120	8 сек.	2 мин. 6 сек.	< 1 сек.
200	0,005	360	1 мин. 23 сек.	12 мин. 20 сек.	3,8 сек.
200	0,0005	720	> 1 ч.	> 1 ч.	1 мин. 15 сек.
450	0,0002	980	> 1 ч.	> 1 ч.	3 мин. 22 сек.

Тестирование проводилось на компьютере с процессором Intel Core i3 с частотой 2,53 ГГц и ОЗУ объемом 3 Гб.

По результатам видно, что библиотека GNU MP имеет колоссальное преимущество во времени счёта перед символьными системами компьютерной алгебры. Пример фазовой траектории рассчитанной в программе основанной на библиотеке GNU MP приведен на рис.1.

Далее рассмотрим использование этой библиотеки для задачи геодинамо.

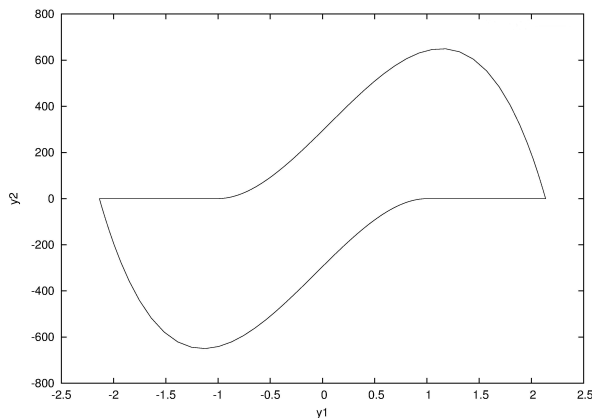


Рис. 1. Фазовое пространство задачи Ван-Дер Поля при  $\mu = 450, h = 0.0002, T = 980$ .

### Решение задачи геодинамо

Одной из актуальных задач сегодняшней науки является задача моделирования процессов, которые приводят к генерации постоянного магнитного поля Земли.

В настоящее время общепризнанной теорией, объясняющей эти процессы, является теория геомагнитного динамо. Ключевой идеей этой теории является самогенерация магнитного поля за счет конвективных течений внутри внешнего ядра Земли. В работе [1] была предложена новая маломодовая модель, основанная на эмпирических данных о пространственной неоднородности плотности жидкого ядра.

Исходные уравнения геодинамо имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= \nu\Delta\mathbf{v} - \frac{1}{\rho_0}\nabla P + \beta\frac{g_2}{r_2}T\mathbf{r} - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) + \frac{1}{\mu_0\rho_0}\text{rot}\mathbf{B} \times \mathbf{B} \\
 \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)(T + T_s) &= k\Delta T \\
 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nu_m\Delta\mathbf{B} \\
 \nabla\mathbf{v} &= 0 \\
 \nabla\mathbf{B} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Здесь первое уравнение - уравнение Навье Стокса, второе - уравнение теплопроводности, третье - уравнение индукции, четвертое - уравнение неразрывности, пятое - условие отсутствия зарядов на поверхности.

В вышеупомянутой маломодовой модели принимаются следующие разложения полей задачи геодинамо:

$$T = \sum_j \alpha_j(t)\Theta_j, \mathbf{v} = \sum_i \beta_i(t)\mathbf{v}_i, \mathbf{B} = \sum_s \gamma_s(t)\mathbf{B}_s.
 \tag{4}$$

Здесь  $\Theta_j$ ,  $\mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{B}_s$  - некоторые стационарные поля, пространственная структура которых соответствует данному распределению плотности в ядре. Конкретный вид этих полей детально описан в работе [1].

Одним из вариантов методов взвешенных невязок из исходных уравнений геодинamo можно получить динамическую систему (5) для амплитуд  $\alpha_j$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_s$ .

$$\begin{aligned}
A_0^0 \frac{d\beta_0}{dt} &= -A_0^0 \mu_0 \beta_0 + \tau E_1^0 \beta_1 + L_{4,1}^0 \gamma_1 \gamma_4 + (L_{1,9}^0 + L_{9,1}^0) \gamma_1 \gamma_9 \\
A_1^1 \frac{d\beta_1}{dt} &= -A_1^1 \mu_1 \beta_1 + \frac{Ra}{Pr} C_1^1 \alpha_1 + \tau (E_0^1 \beta_0 + E_2^1 \beta_2) + (L_{1,3}^1 + L_{3,1}^1) \gamma_1 \gamma_3 + \\
&+ (L_{1,10}^1 + L_{10,1}^1) \gamma_1 \gamma_{10} + (L_{1,14}^1 + L_{14,1}^1) \gamma_1 \gamma_{14} \\
A_2^2 \frac{d\beta_2}{dt} &= -A_2^2 \mu_2 \beta_2 + \tau E_1^2 \beta_1 + L_{4,1}^2 \gamma_1 \gamma_4 + (L_{1,13}^2 + L_{14,1}^2) \gamma_1 \gamma_{13} \\
\frac{d\alpha_0}{dt} &= F_{1,1}^0 \beta_1 \alpha_1 - Pr^{-1} \lambda_1 \alpha_0 \\
\frac{d\alpha_1}{dt} &= F_{1,0}^1 \beta_1 \alpha_0 + H_1^1 \beta_1 - Pr^{-1} \lambda_1 \alpha_1 \\
Q_1^1 \frac{d\gamma_1}{dt} &= W_{0,9}^1 \beta_0 \gamma_9 + W_{1,3}^1 \beta_1 \gamma_3 + W_{1,10}^1 \beta_1 \gamma_{10} + W_{1,14}^1 \beta_1 \gamma_{14} + W_{2,13}^1 \beta_2 \gamma_{13} - \\
&- q^{-1} Pr^{-1} Q_1^1 \eta_1 \gamma_1 \\
Q_3^3 \frac{d\gamma_3}{dt} &= W_{1,1}^3 \beta_1 \gamma_1 - q^{-1} Pr^{-1} Q_3^3 \eta_3 \gamma_3 \\
Q_4^4 \frac{d\gamma_4}{dt} &= W_{2,1}^4 \beta_2 \gamma_1 + W_{0,1}^4 \beta_0 \gamma_1 - q^{-1} Pr^{-1} Q_4^4 \eta_4 \gamma_4 \\
Q_9^9 \frac{d\gamma_9}{dt} &= W_{0,1}^9 \beta_0 \gamma_1 - q^{-1} Pr^{-1} Q_9^9 \eta_9 \gamma_9 \\
Q_{10}^{10} \frac{d\gamma_{10}}{dt} &= W_{1,1}^{10} \beta_1 \gamma_1 - q^{-1} Pr^{-1} Q_{10}^{10} \eta_{10} \gamma_{10} \\
Q_{13}^{13} \frac{d\gamma_{13}}{dt} &= W_{2,1}^{13} \beta_2 \gamma_1 - q^{-1} Pr^{-1} Q_{13}^{13} \eta_{13} \gamma_{13} \\
Q_{14}^{14} \frac{d\gamma_{14}}{dt} &= W_{1,1}^{14} \beta_1 \gamma_1 - q^{-1} Pr^{-1} Q_{14}^{14} \eta_{14} \gamma_{14}
\end{aligned} \tag{5}$$

В этой системе обозначенные большими буквами коэффициенты являются объемными интегралами от некоторых комбинаций базисных полей  $\Theta_j$ ,  $\mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{B}_s$ . Поскольку эти поля известны, динамическая система (5) является квадратичной системой с постоянными коэффициентами. Для данной системы рассчитаны точки покоя, установлено, что все эти точки являются неустойчивыми по первому приближению и в окрестности каждой из этих точек система является жесткой и быстроосциллирующей.

Фазовые координаты  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  наиболее интересны в физическом отношении т.к. определяют характерную скорость конвекции и величину дипольной компоненты геомагнитного поля соответственно. Значения этих координат для точек покоя в маломодовой модели имеют вид:

Точка покоя №2 системы дает решение, которое по порядку величин совпадает с существующими данными о скорости конвекции, но поскольку она неустойчива по первому приближению ей можно поставить в соответствие устойчивый режим геодинamo, только если нелинейные эффекты будут тормозить экспоненциальный уход фазовых траекторий, и в окрестности этой точки существует некий аттрактор. Для проверки этого необходимо произвести численное интегрирование нелинейной системы (5) в окрестности точки покоя №2.

Таблица 2

**Точки покоя в маломодовой модели**

№ точки покоя	$\beta_1$ , м/с	$\alpha_1$ , нТл
1	$7.33 \cdot 10^{11}$	0
2	$1.17 \cdot 10^{-4}$	687
3	$1.31 \cdot 10^{-5}$	602

При решении данной системы необходимо использовать средства вычислений произвольной точности, т.к. в системе содержатся параметры отличающиеся на 10 и более порядков (6).

$$\begin{aligned}
 \frac{d\beta_0}{dt} &= 10^{-2}\gamma_1\gamma_9 + 10^{-1}\gamma_1\gamma_4 + 10^{14}\beta_1 - 10^1\beta_0 \\
 \frac{d\beta_1}{dt} &= -10^{-3}\gamma_1\gamma_{14} + 10^1\gamma_1\gamma_{10} + 10^{14}\beta_2 - 10^1\beta_1 - 10^{14}\beta_0 + 10^{30}\alpha_1 \\
 \frac{d\beta_2}{dt} &= -10^{-1}\gamma_1\gamma_4 + 10^{-2}\gamma_1\gamma_{13} - 10^1\beta_2 - 10^{14}\beta_1 \\
 \frac{d\alpha_0}{dt} &= -10^1\alpha_1\beta_1 - 10^2\alpha_0 \\
 \frac{d\alpha_1}{dt} &= 10^{-1}\alpha_0\beta_1 + 10^{-1}\beta_1 - 10^{-2}\alpha_1 \\
 \frac{d\gamma_1}{dt} &= 10^1\beta_0\gamma_9 - 10^{-1}\beta_1\gamma_3 - 10^{-1}\beta_1\gamma_{14} - 10^{-1}\beta_2\gamma_{13} - 10^{-1}\beta_1\gamma_{10} - 10^6\gamma_1 \\
 \frac{d\gamma_3}{dt} &= 10^{-1}\beta_1\gamma_1 - 10^7\gamma_3 \\
 \frac{d\gamma_4}{dt} &= -10^7\gamma_4 + 10^{-1}\beta_2\gamma_1 - 10^{-1}\beta_0\gamma_1 \\
 \frac{d\gamma_9}{dt} &= -10^{-1}\beta_0\gamma_1 - 10^7\gamma_9 \\
 \frac{d\gamma_{10}}{dt} &= -10^{-1}\beta_1\gamma_1 - 10^7\gamma_{10} \\
 \frac{d\gamma_{13}}{dt} &= 10^{-1}\beta_2\gamma_1 - 10^7\gamma_{13} \\
 \frac{d\gamma_{14}}{dt} &= 10^{-2}\beta_1\gamma_1 - 10^7\gamma_{14}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Для численного решения системы и изучения её фазового пространства была написана программа на языке C++ с использованием библиотеки GNU MP. В данной программе были реализованы вычисления по схеме Розенброка (2).

Расчёты проводились на временном интервале полмиллионна лет с шагом полгода. Время вычислений составило 30 минут.

В результате расчёты показали, что траектории, стартующие из окрестности исследуемой точки покоя, имеют поведение подобное изображенным на рис. 2.

По этим рисункам видно существование устойчивых колебаний вокруг точки покоя, что с учетом её неустойчивости в линейном приближении, по нашему мнению, свидетельствует о наличии аттрактора в виде предельного цикла. Этот предельный цикл соответствует квазистационарному режиму геодинамо в маломодовой модели.

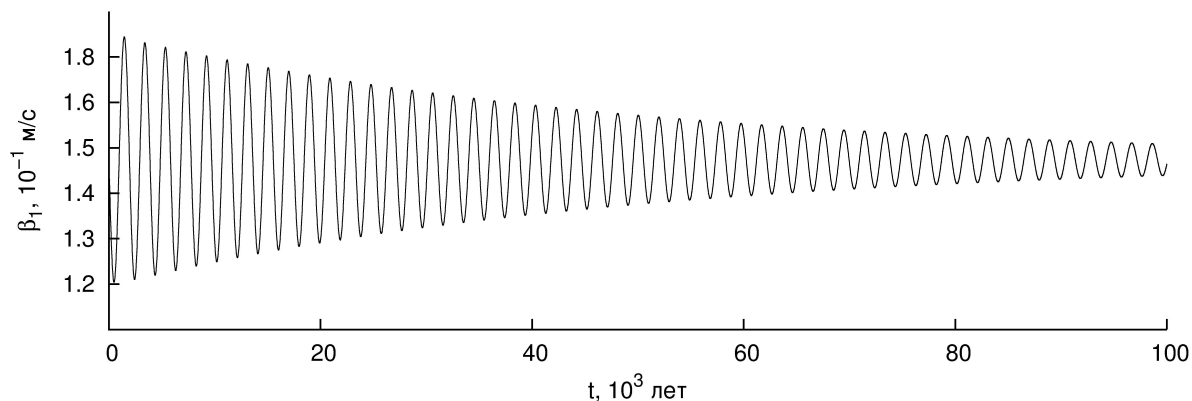


Рис. 2. Динамика амплитуды  $\beta_1$  в окрестности точки покоя №2

## Заключение

В настоящей работе было проведено численное моделирование в модели геодинамо для исследования фазового пространства одной из маломодовых моделей геодинамо. Проведен анализ вычислительных средств поддерживающих арифметику высокой точности, с целью выбора среды разработки программы численного моделирования. Для тестирования систем решалась задача Коши для осциллятора Ван-Дер Поля. В результате, для разработки программы была выбрана библиотека GNU MP для языка C++.

В дальнейшем эту программу и её модификации можно положить в основу специализированного программного комплекса компьютерного моделирования конвекции в жидком ядре Земли в рамках маломодовой модели геодинамо с использованием средств вычислений произвольной точности.

## Библиографический список

1. Водинчар Г.М., Крутьева Л.К. Маломодовая модель геодинамо // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16. № 2. С. 35-44
2. Хорстманн К., Корнелл Г. Java 2. Библиотека профессионала, том 1. Основы. – М: Издательской дом “Вильямс”, 2007. – 110 с.
3. The GNU MP Bignum Library. URL: <http://gmplib.org> (дата обращения: 1.12.2011).
4. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи - М.: Мир, 1999. – 167 с.
5. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – 11 с.
6. Чуличков А.И. Математические модели нелинейной динамики - М.: ФИЗМАЛИТ, 2003. – 19 с.
7. Федоренко Р. П. Введение в вычислительную физику - М.: Изд-во Моск. физ-техн. ин-та, 1994. – 223 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 01.10.2011