А. П. Горюшкин, О подгруппах почти амальгамированного произведения двух групп с конечной объединенной подгруппой, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2012, выпуск 1(4), 5–10

DOI: http://dx.doi.org/10.18454/2079-6641-2012-4-1-5-10

DOI: 10.18454/2079-6641-2012-4-1-5-10

МАТЕМАТИКА

УДК 512.24

О ПОДГРУППАХ ПОЧТИ АМАЛЬГАМИРОВАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ГРУПП С КОНЕЧНОЙ ОБЪЕДИНЕННОЙ ПОДГРУППОЙ

А.П. Горюшкин[1,2]

[1] Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4
[2] Филиал Дальневосточного Федерального государственного университета, 683031, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Тушканова, 11/1
E-mail: as2021@mail.ru

Исследуются подгруппы групп, почти разложимых в свободное произведение с объединенной конечной подгруппой.

Ключевые слова: свободное произведение с объединением, порождающее множество, индекс подгруппы, нормальный делитель.

MATHEMATICA

MSC 18A32

ON SUBGROUPS OF ALMOST AMALGAMATED FREE PRODUCT TWO GROUPS WITH FINITE AMALGAMATED SUBGROUP

A.P. Goryushkin[1,2]

[1] Kamchatka State University by Vitus Bering, 683032, Petropavlovsk Kamchatskiy, Pogranichnaya st, 4, Russia
[2] Branch of the Far Eastern Federal State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Tushkanova st., 11 / 1
E-mail: as2021@mail.ru

Subgroups of groups which can be present as almost free product of two groups with finite
amalgamated subgroup are studied.

Key words: free product with amalgamation, set of generators, index of a subgroup, normal subgroup.

ВВЕДЕНИЕ

Группа G почти обладает некоторым свойством, если G является конечным расширением группы, обладающей этим свойством.

Например, свободное произведение двух конечных групп является почти свободной группой. Почти свободной группой будет и амальгамированное произведение двух конечных групп с объеденной нормальной подгруппой.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ПОЧТИ РАЗЛОЖИМОСТИ

Пусть группа G – почти разложима в амальгамированное произведение, т. е. в группе G есть нормальный делитель N конечного индекса, который является свободным произведением с объединенной подгруппой, $N = A \underset{U}{*} B$, причем подгруппа U имеет индекс больше единицы и в группе A, и в группе B. Предположим дополнительно, что подгруппа U – конечна.

В такой группе G конечным нормальным делителем может быть только подгруппа из U. Более того, каждая конечно порожденная подгруппа бесконечного индекса вместе со всеми своими сопряжениями, образно выражаясь, «занимает очень мало места», как показывает следующая теорема, являющаяся необходимым условием почти разложимости группы в свободное произведение с объединенной конечной подгруппой.

Теорема 1. *Если группа G почти разложима в амальгамированное произведение с объединенной конечной подгруппой, и H – произвольная конечно порожденная подгруппа бесконечного индекса в G, то для некоторого элемента w из G множество $wHw^1 \ \cap H$ конечно.*

Доказательство. По условию в G существует нормальный делитель N конечного индекса, причем $N = A \underset{U}{*} B$, где A, B – нееденичные группы, а подгруппа U – конечна, и $| A : U | > 1, | B : U | > 1$.

Пусть D – пересечение нормального делителя N и подгруппы H, $D = N \cap H$

Из неравенства $|H : D| \leq |G : N|$ и конечной порожденности H следует, что подгруппа D тоже конечно порождена. Кроме того, из конечности индекса N в G и бесконечности индекса H в G следует, что индекс $|N : D|$ – бесконечен.

Так как объединяемая подгруппа U конечна из бесконечности «обычного» индекса H в G следует бесконечность разложения Nпо двойному модулю (D, U).

Итак, D – конечно порожденная подгруппа в группе $N = A \underset{U}{*} B$, и индекс $|N : (D, U)|$ бесконечен. Число двухконцевых двойных смежных классов конечно (см. [1], следствие к лемме 8). Отсюда следует, что существует такой элемент u из N, что все элементы из uDu^1в полуприведенной форме начинаются и заканчивается Aслогом. Точно также найдется такой элемент s из N, что все элементы из sDs^1в полуприведенной форме начинаются и заканчивается Bслогом. Но это значит, что пересечение $uDu^{-1} \cap sDs^{-1}$ целиком содержится в объединяемой подгруппе U..

Пусть $w = us$. Тогда подгруппа $D_1 = wDw^1 \cap \ D$ целиком содержится в uUu^1, и поэтому конечна. Теперь заметим, что

$$wHw^1 \cap H) \cap N = wHw^1 \cap N) \quad \cap (H \ \cap N) = wHw^1 \ \cap wNw^1) \cap \ (H \ \cap N) =$$

$$= w(H \ \cap N)w^1 \ \cap (H \ \cap N) = wDw^1 \cap D \subset uUu^1.$$

Итак, множество $wHw^1 \cap H) \cap N$ содержится в сопряжении объединяемой подгруппы, и поэтому состоит из конечного числа элементов.

Кроме того, индекс $(wHw^1 \cap H) \cap N$в $(wHw^1 \cap H)$ конечен; а это и означает, что $wHw^1 \cap H$ – конечное множество. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Пусть группа G порождается конечным множеством своих подгрупп $G_1, G_2, ..., G_m$, причем каждое пересечение $D_{ij} = G_i \cap G_j (i, j \in \{1, 2, ..., m\})$ – конечно порождено и имеет конечный индекс и в G_i,* и в G_j, *и хотя бы одна из подгрупп D_{ij} имеет бесконечный индекс в G. Тогда если G – почти разложима в свободное произведение с объединенной конечной подгруппой, то все подгруппы $G_1, G_2, ..., G_m$* – конечны.

Доказательство. Предположим, например, что группа G_1 бесконечна. Следовательно, D_{1k}– тоже бесконечны для всех $k = 2, 3, ..., m$, и, следовательно, бесконечны и все остальные подгруппы G_k. Покажем, что тогда необходимое условие почти разложимости в свободное произведение с объединенной конечной подгруппой для группы G не выполняется.

В качестве контрпримера – подгруппы H, опровергающей утверждение теоремы 1 о свойствах конечно порожденных подгруппах почти разложимых групп, возьмем пересечение $G_i \cap G_j$, имеющее бесконечный индекс в G, $H = G_i \cap G_j$.

Так как $G = gp(G_1, G_2, ..., G_m)$, произвольный элемент w из G является словом, слогами которого являются элементы g_i, выбранные из G_i. Индукцией по числу этих слогов в представлении w получаем, что пересечение $wHw^1 \cap H$ имеет конечный индекс во всех подгруппах G_k. Поэтому для любого элемента w из G пересечение $wHw^1 \cap H$ состоит из бесконечного числа элементов. Утверждение доказано. □

Непосредственно из этого получается следующее утверждение.

Следствие 2. Свободное произведение $A \underset{U}{*} B$, где подгруппа U – конечно порождена и имеет конечный неединичный индекс в каждом сомножителе, является почти свободным произведением с объединенной конечной подгруппой тогда и только тогда, когда группы A, B – конечны.

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ КОНЕЧНОСТИ ИНДЕКСА ПОДГРУППЫ

Для каждой конечно порожденной подгруппы H бесконечного индекса в свободном произведении найдется нетривиальный нормальный делитель группы, имеющий с H единичное пересечение ([2], глава I, §7).

Свободное произведение групп является частным случаем обобщенного свободного произведения – объединяемая подгруппа в свободном произведении единична, и в частности – конечна.

Оказалось, что вместо слов «свободное произведение» можно говорить почти разложимая в свободное произведение с объединенной конечной подгруппой.

Теорема 2. *Если H – конечно порожденная подгруппа бесконечного индекса в почти свободном произведении двух групп и с объединенной конечной подгруппой, то существует такой неединичный нормальный делитель S группы что пересечение $H \cap S$– единично.*

Доказательство. По условию в нашей группе существует нормальный делитель G конечного индекса, причем $G = A \underset{U}{*} B$, где A, B – неединичные группы, а подгруппа U – конечна. Разложимость должна быть нетривиальна, т. е. индекс U в каждом из множителей должен быть больше единицы. Если он конечен в каждой из подгрупп, то G является почти свободной группой, а для почти свободных групп утверждение теоремы 2 верно. Поэтому можно считать, что по крайней мере один из индексов (а. следовательно, и один из множителей) бесконечен.

Рассуждая далее точно так же, как в начале доказательства теоремы 1, видим, что достаточно доказать утверждение теоремы 2 для группы G.

Итак, пусть конечно порожденная подгруппа H содержится в группе G и имеет в ней бесконечный индекс. Объединяемая подгруппа конечна, поэтому разложение группы G по двойному модулю (H, U) тоже бесконечно. Из конечной порожденности H следует, что число двухконцевых смежных классов HgU конечно, и следовательно, существуют одноконцевые смежные классы.

Из конечности объединяемой подгруппы следует, что и число правых смежных классов Hg_i, $i \in I$, тоже конечно. Используя множество всех L левых сегментов всех элементов из H, получаем, что некоторое сопряжение $g_i^{-1}Hg_i$ подгруппы H с помощью представителя g_i двухконцевого смежного класса является одноконцевым (причем длина элементов из подгруппы $g_i^{-1}Hg_i$ не ограничена).

Пусть z – произвольный элемент из G, который начинается A-слогом, а заканчивается B-слогом. Тогда все элементы из множества

$$\left\{z^{-1}w^{-1}g_i^{-1}Hg_iwz \mid i \in I\right\}$$

оканчиваются только на Bслоги. Кроме того, для каждого неединичного элемента h из H верно неравенство $l\left(z^{-1}w^{-1}g_i^{-1}hg_iwz\right) > l(z)$.

Если теперь выбрать z так, чтобы $l(z) > l(w)$, то для каждого неединичного элемента a из свободного множителя A выполнится неравенство $l(wzaz^{-1}w^{1}) > l(z)$ - $l(w)$.

Следовательно, существует такой элемент w из группы G, что:

a) все элементы из множества $\left\{w^{-1}g_i^{-1}Hg_iw \mid i \in I\right\}$ оканчиваются только на B-слоги;

b) $min\{l\left(waw^{-1}\right),\ l\left(w^{-1}g_i^{-1}hg_iw\right)\} > max\{l\left(g_i^{-1}g_j\right)\}$ для любых $i,\ j \in I$, h из $H \setminus U$, a из $A \setminus U$;

c) $l\left(waw^{-1}\right) > \max\left\{l\left(g_i\right) \mid i \in I\right\}$.

Если w обладает свойствами a и b и a - произвольный неединичный элемент из A, то элемент $x = waw^{1}$ не принадлежит множеству $\left\{g_i^{-1}Hg_j \mid i,\ j \in I\right\}$. Предположим, что существует элемент h и индексы i, j такие, что $x = g_i^{-1}hg_j$. Ввиду условия b $h \notin U$. Из этого равенства следует $g_i^{-1}g_j = g_i^{-1}hg_i^{w}aw^{-1} = w\left(w^{-1}g_i^{-1}h^{-1}g_iwa\right)w^{-1}$.

Элемент $w^{-1}g_i^{-1}h^{-1}g_i^{w}$ оканчивается на B-слог, поэтому

$$l\left(w^{-1}g_i^{-1}h^{-1}g_i^{w}a\right) > l\left(w^{-1}g_i^{-1}h^{-1}g_i^{w}\right)$$

.

Кроме того, элемент $w^{-1}g_i^{-1}h^{-1}g_i^{w}a$является строго циклически приведенным, и, следовательно, для каждого элемента g из G выполняется неравенство

$$l\left(g^{-1}w^{-1}g_i^{-1}h^{-1}g_i^{w}ag\right) \quad \geq \quad l\left(w^{-1}g_i^{-1}h^{-1}g_i^{w}a\right).$$

Таким образом, получаем, что

$$l\left(g_i^{-1}g_j\right) = l\left(g_i^{-1}h^{-1}g_i^{w}aw^{-1}\right) \geq l\left(w^{-1}g_i^{-1}h^{-1}g_i^{wa}\right) > \quad l\left(w^{-1}g_i^{-1}h^{-1}g_i^{w}\right) > l\left(g_i^{-1}g_j\right).$$

Полученное противоречие означает, что предположение о том, что элемент x принадлежит множеству $\left\{g_i^{-1}Hg_j \mid i,\ j \in I\right\}$, неверно: элемент g_ix несравним с g_j по модулю H для всех $i,\ j\ \ \in I$.

Возьмем w в выражении $x = waw^1$, удовлетворяющим условиям a,b,c.

Тогда для каждого i из I элемент g_ix оканчивается на такой же слог, что и элемент x. Пусть для определенности элемент x оканчивается на A-слог.

Каждый правый смежный класс Hg_ix содержит элемент, оканчивающийся на A-слог. Кроме того, смежный класс Hg_ix – одноконцевой, так как он не входит в множество M, а множество M содержит все двухконцевые правые смежные классы по H.

Это значит, что все элементы из Hg_ix оканчиваются только на A-слоги. Следовательно, и все элементы из Mx оканчиваются тоже только на A-слоги, а так как M содержит L, то и все элементы из Lx оканчиваются на A-слоги, и ни один элемент из U не попал в Lx. Следовательно, элемент x^{-1} не является правым сегментом никакого элемента из L.

Первый слог x^{-1} является обращением последнего слога элемента x, откуда следует, что элемент q оканчивается на B-слог. Но тогда $yx = q$ – элемент из Lx, оканчивающийся на B-слог; получили противоречие.

Таким образом, элемент x^{-1} не является правым сегментом никакого элемента из L. Это означает, что x^{-1} не может быть внутренним сегментом никакого элемента h из H. Другими словами, для каждой конечно порожденной подгруппы H бесконечного индекса в G найдется такой элемент w_0, который не содержится в качестве внутреннего сегмента ни в одном из элементов из подгруппы H.

Теперь покажем, что для любого элемента w_0 из группы $G = A \underset{U}{*} B$, где подгруппа U – конечна, найдется нормальный такой делитель S группы G, что каждый неединичный элемент из S содержит в своей нормальной форме в качестве сегмента элемент w_0.

Для этого воспользуемся методом малых сокращений для амальгамированных свободных произведений (см., например: [3], гл. V, раздел 11). Чтобы построить требуемый нормальный делитель S, достаточно указать такое симметризованное множество R, удовлетворяющее условию $C'\left(\dfrac{1}{6}\right)$, что левая половина каждого элемента из R содержит в качестве внутреннего сегмента наперед заданный элемент w_0.

Условие $C'\left(\dfrac{1}{6}\right)$ означает, что для различных элементов r_1 и r_2 из R, имеющих приведенные формы $r_1 = xy_1$ и $r_2 = xy_2$, выполняется неравенство $l\,(x) < \dfrac{\bar{l}\,(x)}{6}$. Пусть w – элемент из G, имеет приведенную форму $w = a_1b_1sa_2b_2$, где a_1, a_2, b_1, b_2 – элементы из $A \setminus U$, $B \setminus U$ соответственно, а элемент s содержит элементы w_0 и w_0^{-1}в качестве внутренних сегментов. Предположим, кроме того, что $l\ (w) \geq 15$.

Так как, по крайней мере, один из индексов подгруппы U в группах A, B бесконечен, а другой индекс не меньше двух, элемент w можно выбрать таким образом, что элементы a_1, a_2, b_1, b_2 и их участвуют в образовании элемента w в точности один раз.

Рассмотрим теперь симметризованное множество R, порожденное элементом w^7. Множество R состоит из всех циклически приведенных сопряжений элементов w^7 и w^{-7}. Каждый элемент r из R можно представить в виде $r = x^{-1}w_1x$, где w_1 – циклическая перестановка элемента w^7 или w^{-7}, а x - элемент из свободного множителя A или B.

Если $x \notin U$, то $r = x^1 u_1 x$ является полуприведенной формой элемента r. Поэтому приведенная форма элемента r из R, отличного от u и u^1, имеет вид $r = (w_2 w^6 w_1)^{\varepsilon}$, где $\varepsilon = \pm 1$, а $w = w_1 w_2$ – полуприведенная форма элемента w. Если $r = w$ или w^{-7}, то получим разложение для элемента r полагая $w_1 = 1$ если $\varepsilon = 1$, и $w_2 = 1$, если $\varepsilon = -1$.

Таким образом, в приведенной форме элемента r, если $\varepsilon = 1$, то $l\ (w) \geq 1$ и w_2 заканчивается B-слогом; если $\varepsilon = -1$, то $l\ (w) \geq 1$ и элемент w_1^{-1} заканчивается A-слогом. В любом случае $l\ (w_1) \leq l\ (w)$ и $l\ (w_1) \leq l\ (w)$. Кроме того, для каждого элемент r из R выполняется равенство $\bar{l}\,(r) = 7 \cdot l\,(w)$, и поэтому $l\,(w) + 2 < \frac{1}{6}\bar{l}\,(r)$.

Левая половина каждого элемент из R содержит элемент w_0 по построению R. Отсюда следует, что, что множество R удовлетворяет условию $C'\left(\frac{1}{6}\right)$, и поэтому каждый элемент из S – нормального замыкания множества R содержит в качестве внутреннего сегмента левую половину некоторого элемента из R, которая содержит внутри себя элемент w_0. Теорема 2 доказана. □

Доказанное утверждение означает, в частности, что достаточным условием конечности порожденной подгруппы H почти амальгамированного произведения G двух групп с конечной объединенной подгруппой является не тривиальность пересечения H с любым неединичным нормальным делителем группы G.

Заключение

Убрать условие конечности для объединяемой подгруппы в формулировке теоремы 2 нельзя. Даже в случае, когда множители являются свободными группами, амальгамированное произведение свободных групп может оказаться простой группой. В таком случае, естественно, что о никаких нормальных делителях, лежащих вне конечно порожденной подгруппы, речь уже идти не может.

Библиографический список

1. Karras A., Solitar D. The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup // Trans. Amer. Math. Soc. – 1970 – V.150 – P. 227–255.
2. Горюшкин А.П. Группы, разложимые в свободное произведение (строение и применение), Palmarium Academic Publishing, Саарбрюккен, 2012. – 142 с.
3. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. – М., Мир, 1980. – 448 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 15.05.2012