И. А. Ильин, Д. С. Нощенко, А. С. Пережогин, Численное решение обыкновенного дифференциального уравнения в случае дробной разности матричного оператора, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2012, выпуск 2(5), 62–68

DOI: http://dx.doi.org/10.18454/2079-6641-2012-5-2-62-68

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2012. № 2(5). С. 62-68. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2012-5-2-62-68

УДК 517.3

Численное решение обыкновенного дифференциального уравнения в случае дробной разности матричного оператора *

Ильин И.А.[1, 2], Нощенко Д.С.[2], Пережогин А.С.[1, 2]

[1] Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7

[2] Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: drew72156@yandex.ru

Рассмотрено численное моделирование решения обыкновенного дифференциального уравнения в случае обобщения разностного оператора. Численные расчеты приведены для уравнения первого порядка. Установлена связь дробной степени матричного оператора СЛАУ с операторами Грюнвальда – Летникова.

Ключевые слова: численное моделирование, дробный разностный оператор, формула Грюнвальда – Летникова

MSC 34A08

Computation of differential equation with fractional matrix

Ilyin I.A.[1, 2], Noshchenko D.S.[2], Perezhogin A.S.[1, 2]

[1] Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

[2] Vitus Bering Kamchatka State University, 683032, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: drew72156@yandex.ru

Fractional power computation of matrix is represented. Numerical calculations for ordinary differential equation and its fraction analog is done. Results are compared with Grunvald – Letnikov operator.

Key words: computation, fractional differential calculus, Grunvald – Letnikov operator

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга» на 2012–2016 гг.

Введение

Математическое моделирование физических процессов, протекающих в реальных системах с фрактальными свойствами, выполняется с помощью аппарата дробного дифференцирования [4]. В таких задачах применяются операторы с дробным порядком α, которые в случае целого порядка оператора совпадают с классическими дифференциальными операторами.

В настоящей работе предложен подход к построению модели с дробным оператором через замену классической производной на разностное соотношение и дальнейшее вычисление дробной степени матрицы в системе линейных алгебраических уравнений. Численное моделирование выполнено для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с начальным условием.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{dy}{dt}+y(t)=0, \quad y(0)=1. \tag{1}$$

Для этого уравнения запишем разностную схему:

$$\frac{dy}{dt}\approx\frac{y_{i+1}-y_i}{\tau}, \quad i=0..n, \quad y_0=1.$$

Таким образом, численную схему для уравнения (1) можно записать в матричном виде:

$$\frac{1}{\tau}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} & 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Введем обозначение для матрицы в (2), которая соответствует оператору дифференцирования системы (1):

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ -1 & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Вычислим дробную степень α для матрицы A. Положим $\alpha=\frac{1}{2}$. Используем метод Ньютона решения нелинейных уравнений. Вычислительная схема матрицы $B=\sqrt{A}$:

$$B_{n+1}=\frac{B_n+A\cdot B_n^{-1}}{2}, \quad B_0=A. \tag{4}$$

Используя итерационную схему (4) и систему (2), можно получить численную схему для разностного аналога дробной степени исходного дифференциального оператора уравнения (1).

Реализуем итерационный процесс (4) с начальным приближением B_0 в виде (3). Алгоритм вычисления запрограммирован в системе компьютерной алгебры Maxima [2]. Приведем пример для матрицы размерности 4x4 (5).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -.5 & 1 & 0 & 0 \\ -.125 & -.5 & 1 & 0 \\ -.0625 & -.125 & -.5 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

После этого мы получаем систему (2) с основным оператором представленным матрицей B.

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -.5 & 1 & 0 & 0 \\ -.125 & -.5 & 1 & 0 \\ -.0625 & -.125 & -.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\tau}} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0. \tag{6}$$

Решение системы с дробной степенью матрицы A имеет вид, отличный от классического решения системы (2). На рис. 1 приведены решения аналогичных систем с размерностью матриц 100x100, шаг $t = 0.05$.

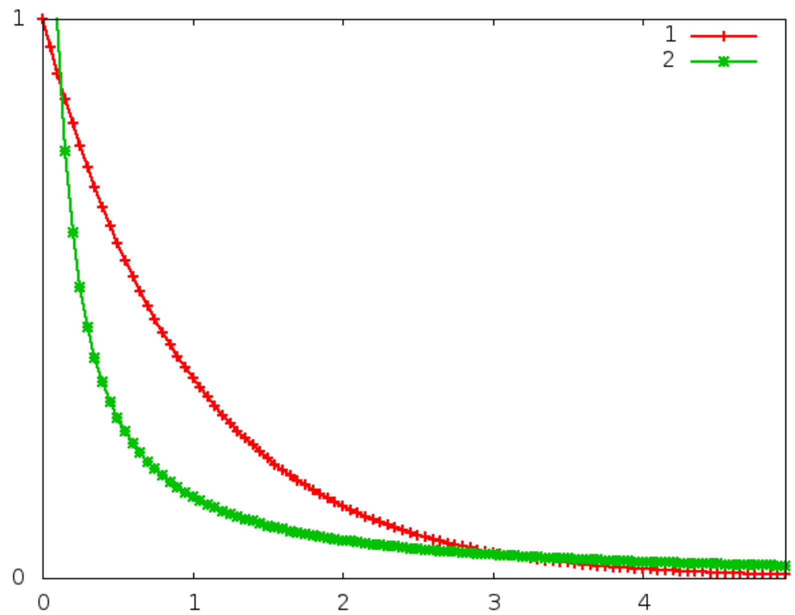

Рис. 1. Решение систем линейных уравнений: *1* – классическое решение системы 2-го порядка (2); *2* – линия решение системы порядка 3/2 (6)

Решение системы с матрицей B имеет особенность в начальной точке. При этом асимптотическое поведение решения отличается более длительным режимом затухания в отличии от классического решения.

Сравнение с формулой Грюнвальда – Летникова

Обобщение разностного оператора на случай дробного порядка выполняется с помощью формальной замены целого порядка на дробный. В общем случае, разностный оператор n-порядка с шагом τ записывается в виде:

$$\delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n+1)}{k!\Gamma(n-k+1)} f(x-k\tau). \tag{7}$$

Полагая порядок оператора n дробным, обозначим через ν дробный порядок оператора и получим обобщение [5]:

$$\delta^\nu f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+1)}{k!\Gamma(\nu-k+1)} f(x-k\tau). \tag{8}$$

Корень квадратный из разностного оператора первого порядка (3):

$$\begin{pmatrix}
1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-0.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-0.125 & -0.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-0.0625 & -0.125 & -0.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-.039063 & -0.0625 & -0.125 & -0.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-.027344 & -.039063 & -0.0625 & -0.125 & -0.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-.020508 & -.027344 & -.039063 & -0.0625 & -0.125 & -0.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
-.016113 & -.020508 & -.027344 & -.039063 & -0.0625 & -0.125 & -0.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\
-.013092 & -.016113 & -.020508 & -.027344 & -.039063 & -0.0625 & -0.125 & -0.5 & 1.0 & 0.0 \\
-0.01091 & -.013092 & -.016113 & -.020508 & -.027344 & -.039063 & -0.0625 & -0.125 & -0.5 & 1.0.
\end{pmatrix}.$$

Проведем вычисления в пакете Maxima для коэффициентов входящих в формулу (8) с показателем дробности $\nu = \frac{1}{2}$

```
nu : 1/2;
eq : (-1)^k*gamma(nu+1)/gamma(k+1)/gamma(nu-k+1);
makelist( subst( j, k, eq ),j,0,10),eval,float;
```

В результате вычисления для коэффициентов дробного разностного оператора получаем значения, которые совпадают со значениями матрицы B:

$$[1, -.5, -.125, -.0625, -.039063]. \tag{9}$$

Получаем согласование вычисления квадратного корня из матрицы A с формулой (8), которая получена формальной процедурой обобщения разностного оператора на случай дробного порядка.

Возьмем определение оператора Грюнвальда – Летникова H^ν и установим связь с вычисленным корнем квадратным из матрицы A:

$$H^\nu f(x) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+1)}{k!\Gamma(\nu-k+1)} f(x-k\tau) \tag{10}$$

Если не вычислять предел при $\tau \to 0$, то $H^{\frac{1}{2}}$ совпадает с выражением корня квадратного из матрицы A. При этом ряд, входящий в формулу Грюнвальда – Летникова, обрывается при задании начального условия. Полученный результат говорит о том, что вычисление значения в текущей точке зависит от всех предыдущих значений.

Матричный оператор степени больше чем единица

Умножим матрицу (3) на (5) в случае размерности 10x10, и в результате матричный оператор будет иметь вид:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}
1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\\
-1.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\\
0.375 & -1.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\\
0.0625 & 0.375 & -1.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\\
.02344 & 0.0625 & 0.375 & -1.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\\
.01172 & .02344 & 0.0625 & 0.375 & -1.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\\
.006836 & .01172 & .02344 & 0.0625 & 0.375 & -1.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\\
.004395 & .006836 & .01172 & .02344 & 0.0625 & 0.375 & -1.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0\\
.003021 & .004395 & .006836 & .01172 & .02344 & 0.0625 & 0.375 & -1.5 & 1.0 & 0.0\\
.002182 & .003021 & .004395 & .006836 & .01172 & .02344 & 0.0625 & 0.375 & -1.5 & 1.0.
\end{pmatrix}$$

Вычислим коэффициенты входящие в определение оператора Грюнвальда – Летникова при $\alpha=\frac{3}{2}$. Получим значения коэффициентов:

$$[1.0,-1.5,0.375,0.0625,.02344,.01172,.006836,.004395,.003021,.002182,.001637].$$

Коэффициенты в точности совпадают с результатом, который получен в произведении $A\cdot B$.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y(t)=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0. \tag{11}$$

В качестве аппроксимации оператора второго порядка выберем вторую разность:

$$\frac{d^2y}{dt^2}\approx\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{\tau^2},\quad i=0..n, \tag{12}$$

тогда систему линейных уравнений для уравнения (11) можно записать в виде:

$$\frac{1}{\tau^2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{\tau^2}&0&0&0\\\frac{1}{\tau^2}&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=0. \tag{13}$$

В качестве вычислительного эксперимента зададим значение $\alpha=\frac{3}{2}$ и система линейных алгебраических уравнений примет вид:

$$\frac{1}{\tau^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1.5&1&0&0\\.375&-1.5&1&0\\.0625&.375&-1.5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{\tau^{\frac{3}{2}}}&0&0&0\\\frac{1}{2\tau^{3/2}}&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=0. \tag{14}$$

Построим графики решений для системы второго порядка и $\dfrac{3}{2}$ (рис. 2).

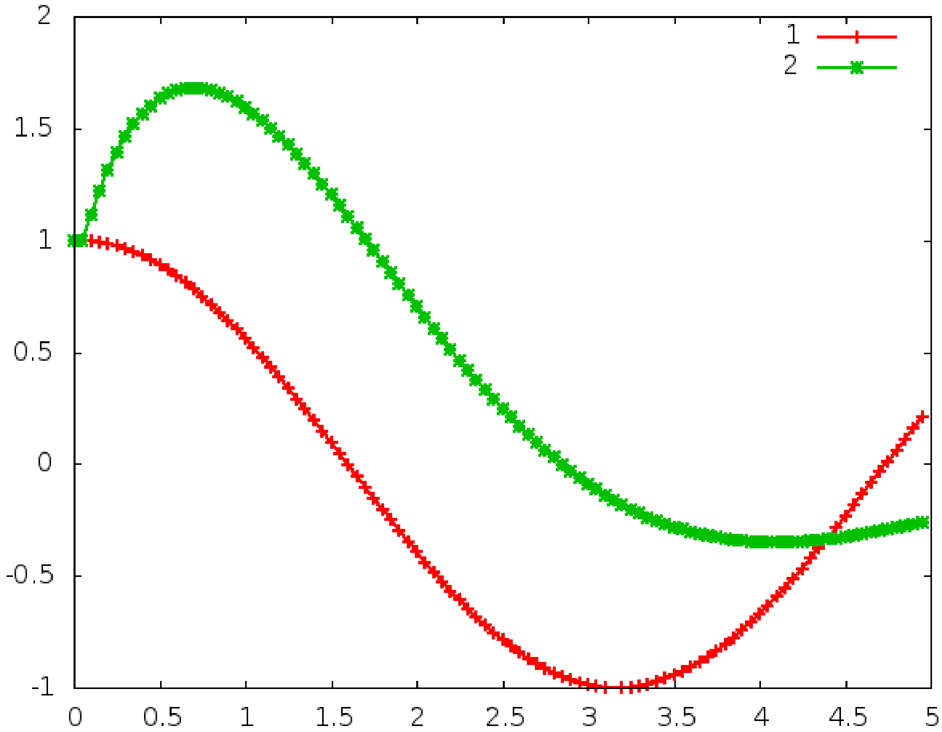

Рис. 2. Решение систем линейных уравнений: *1* – решение системы 2-го порядка (13); *2* – решение системы порядка 3/2 (14)

Как и в случае системы для системы с порядком дробности $\alpha = \frac{1}{2}$ имеется особенность в начальной точке. Однако, асимптотический характер решения совпадает с тем, который хорошо известен для дробного осциллятора [3]. Подобная динамика решения хорошо согласуется с задачами Коши для обыкновенных уравнений с дробной производной Римана – Лиувилля. Чтобы устранить особенность в начальной точке, можно использовать методику предложенную в работе [1]. В целом, представленные результаты могут быть использованы при численном моделировании динамики систем с памятью. В частности, в теории вязко-упругости можно выполнить моделирование релаксационных процессов для сложных природных сред и композитных материалов.

Заключение

Полученные численные решения имеют принципиальное отличие от экспоненциального решения за счет более медленного спадания решения на асимптотике. Характер решения указывает на особенности динамики таких систем, которые проявляются в наличии эффектов памяти. Связь, установленная между разностным оператором дробного порядка Грюнвальда – Летникова и дробной степенью матрицы, указывает на прямую связь двух подходов.

Библиографический список

1. Ильин И.А., Нощенко Д.С., Пережогин А.С. О дробной степени разностного оператора для обыкновенного дифференциального уравнения // Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики: материалы II Междунар. конф. молод. ученых. Нальчик; Эльбрус, 2012. С. 107-109.

2. Электронный ресурс: URL: maxima.sourceforge.net/

3. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

4. Тарасов В.Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. М., Ижевск: РХД, 2011. 568 с.

5. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 03.12.2012